

GOVERNMENT OF INDIA
NATIONAL LIBRARY, CALCUTTA.

Mar
Class No. 512
Book No. H 698

N. L. 38.

MGIPC-84-38 LNL/56-22-5-57-50,000.

A
COURSE
OF
MATHEMATICS
IN THE
MARATHA LANGUAGE,

CONSISTING OF

ELEMENTS OF ALGEBRA,

LOGARITHMS,

ELEMENTS OF GEOMETRY,

MENSURATION;

APPLICATION OF ALGEBRA TO

GEOMETRY,

PLANE TRIGONOMETRY,

WITH

TABLES OF LOGARITHMS.

TRANSLATED

FROM THE WORKS OF

DR. CHARLES HUTTON,

BY

Captain George Kitso Jernis,

BOMBAY ENGINEERS.

BOMBAY:
1827.



Mar

512

H698

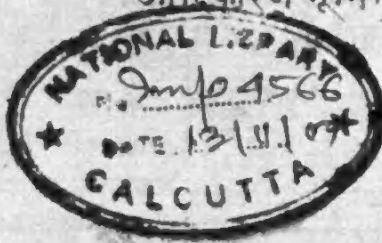
शिक्षामाला

महाराष्ट्र भाषेत,

♥ जांत

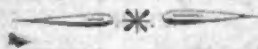
बीजगणित,
लाग्रंज,
आदिकारण भूमिति,

बीजभूमिति संगतीकरण,
सरळरेष त्रिकोणमिति,
भूमापन,



आणि

लाग्रंजमाचे कोष्टक.



RARE BOOK

याचें मूळ पुस्तक इंग्रजी भाषेंत आहे त्याचा कवि

डॉक्टर चार्ल्स हट्टन,

त्या पुस्तकाचें भाषांतर

क्यापटन जार्ज जार्विस साहेब

इंजनेर

याणी महाराष्ट्र भाषेंत केलें



मुंबई:

१८२७.

PART I.

ELEMENTS OF ALGEBRA.

CONTENTS.

	PAGE.
Definitions and Notation	1
Addition	11
Subtraction	17
Multiplication	20
Division	24
Fractions	32
Involution	46
Evolution	54
Surds	60
Arithmetical Proportion and Progression	90
Piles of Shot or Shells	96
Geometrical Proportion and Progression	104
Infinite Series and their Summation	109
Simple Equations	134
Quadratic Equations	177
Cubic and Higher Equations	199
Simple Interest	217
Compound Interest	219
Annuities.	226

प्रथम भाग

बीज गणित

अनुक्रमणिका

	पृष्ठ
च्यारव्या आणि लिहिण्याची परिपाटी	१
मिळवणी	११
वजाबाकी	१३
गुणाकार	२०
भागाकार	२४
अपूर्णबीज	३२
वर्गघनादि	४६
वर्गघनादिमूळ	५४
करणी	६०
गणितप्रमाण आणि श्रेढी	९०
गोळ्यांचे राशीचे गणित	९६
भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी	१०४
अनंत श्रेणी	१०९
एकवर्णसमीकरण	१३४
वर्गसमीकरण	१७७
घनादिसमीकरण	१९९
सरळ व्याज	२१७
चक्रवाद व्याज	२१९
प्राप्ति	२२६

श्री

बीज गणित

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी

१ बीज गणित स्मरणजे त्याच्या संख्यांचे अंकांवांचून अक्षरं चिन्हे करूनच गणित करण्याची विद्या ही गणित करण्याची सामान्य रीति आहे

२ या विद्ये मध्ये सर्व पदार्थ जातींचे संख्यांचे स्थानीं अक्षरें योजितात त्या संगातीं जीं कामें करायाचीं आहेत जसें मिळवणी वजाबाकी इत्यादिक तीं सर्व कित्येक स्वल्प रूप कार्यप्रकाशक चिन्हे करून होतात

३ बीज गणिताचे उदाहरणां मध्ये कित्येक पदे व्यक्त स्मरणजे ठाडुक किंवा सांगीतलीं आहेत जांस भास्कराचार्यांचे बीज गणितांत रूप स्पष्टलें आहे आणि जीं दुसरीं पदे अव्यक्त स्मरणजे ठाडुक किंवा सांगीतलीं नाहीत त्यांस त्याच आचार्यांचे बीज गणितांत यावत् तावत् इत्यादिक नावे दिलीं आहेत इंग्रजी रीतींत व्यक्त संख्या दारववायास मूळ लिपीचे आरंभींचीं अबक इत्यादिक अक्षरें घेतात आणि अव्यक्त संख्या दारववायास मूळ लिपीचे शेवटील क्षयज्ञ इत्यादिक अक्षरें घेतात

४ कामें दारवविणारीं चिन्हे आहेत त्यांस कार्यप्रकाशक चिन्हे स्मरतात तीं लिहितो

(२)

+ हें चिन्ह मिळवणी दारववितें या ठिकाणीं अधिक असें
सणतात यास धन चिन्ह सणावें

- हें चिन्ह वजा बाकी दारववितें या ठिकाणीं उणें असें स-
णतात यास ऋण चिन्ह सणावें

x हें अथवा • हें चिन्ह गुणाकार दारववितें या ठिकाणीं गु-
णिले असें सणतात

÷ हें चिन्ह भागाकार दारववितें या ठिकाणीं भागिले अ-
सें सणतात

✓ हें चिन्ह वर्गमूळ दारववितें √ हें चिन्ह घनमूळ दारववि-
तें ५/ हें चिन्ह चतुर्घातमूळ दारववितें याप्रमाणे पुढेंही आणि नु/
हें चिन्ह नसंख्याघातमूळ दारववितें

::: हें चिन्ह राशि अथवा प्रमाण दारववितें

= हें चिन्ह बरोबरी दारववितें या ठिकाणीं बरोबर असें स-
णतात अथवा सणजे असा शब्द बोलतात

यांचे उपयोगाचीं स्थले

जसें अ + ब हें दारववितें किं बचे संख्येस अची संख्या
मिळवावी

अ - ब यांतील चिन्ह दारववितें किं अचे संख्येतून
बची संख्या वजा करावी

अ ~ ब हें चिन्ह अ आणि ब यां दोन संख्यांची वजा
बाकी

(३)

बाकी दाखवितें परंतु या दोन संख्यांत लाहान कोणती आणि लोटी कोणती हें विदित नाही

अब अथवा $अ \times ब$ किंवा $अ \cdot ब$ हें चिन्ह अ आणि ब या दोन संख्यांचा गुणाकार दाखवितें

$अ \div ब$ अथवा $\frac{अ}{ब}$ हें चिन्ह दाखवितें किं अची संख्या ब-चे संख्येनें भागावी

$अ : ब :: क : ड$ हे दाखवितें किं जसें अ प्रमाण बला होतें तसें क प्रमाण डला होतें

$क्ष = अ - ब + क$ हें समीकरण आहे तें दाखवितें किं-
अ आणि ब यांचे संख्यांची वजा बाकी करून त्यांत कची संख्या मिळवावी तें क्षचे बरोबर आहे

✓ $अ^२$ अथवा $अ^२$ हें अचें वर्गमूळ दाखवितें ३/ $अ$ अथवा $अ^{\frac{१}{३}}$ हें अचें घनमूळ दाखवितें ३/ $अ^२$ अथवा $अ^{\frac{२}{३}}$ हें अचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितें ५/ $अ$ अथवा $अ^{\frac{१}{५}}$ हें अचें मसंख्याघातमूळ दाखवितें ५/ $अ^२$ अथवा $अ^{\frac{२}{५}}$ हें दाखवितें किं जितकी म संख्या आहे तितकें असंख्येचें घातमूळ काढावें आणि त्या मूळाचा न संख्या घात करावा अथवा अची संख्या $\frac{१}{५}$ याचा भागाकार येईल तितकी अची संख्या वर्गादिकें करून वाढवावी किंवा मूळ काढावें

$अ^३$ हें अचा वर्ग दाखवितें $अ^३$ हें अचा घन दाखवितें $अ^४$ हें अचा चतुर्घात दाखवितें $अ^०$ हें नची संख्या आहे तितका

अचा

अच्चा घातदारववितें

$\overline{अ+ब} \times क$ अथवा $(अ+ब)क$ हें $अ+ब$ या संयुक्त पदानें गुणिलें $क$ हें एकपद याच्चा जो गुणाकार तो दारववितें — याप्रमाणें वरतीरेष किंवा $()$ या प्रमाणें दोन बाजूंस दोन कौस हें चिन्ह वियुक्त पदें परस्पर संबद्ध यामुळें संयुक्त असें दारववितें

$\overline{अ+ब} \div \overline{अ-ब}$ अथवा व्यवहारी अपूर्णाकरीतीनें
 $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ हें $अ+ब$ भागिला $अ-ब$ नें या पासून जो भागाकार तो दारववितें

$\sqrt{अब+कड}$ अथवा $(अब+कड)^{\frac{1}{2}}$ हें $अब+कड$ या संयुक्त पदाचें वर्गमूळ दारववितें आणि $क\sqrt{अब+कड}$ अथवा $क(अब+कड)^{\frac{1}{2}}$ हें $अब+कड$ या संयुक्त पदाचें वर्गमूळ $क$ या एक पदानें गुणून जो गुणाकार तो दारववितें

$\overline{अ+ब-क}$ अथवा $(अ+ब-क)$ हें $अ+ब-क$ या संयुक्त पदाचा घन दारववितें

३ अहें अची संख्या ३ याणीं गुणावी ऐसें दारववितें आणि ४ $(अ+ब)$ हें $अ+ब$ या संयुक्त पदाचे संख्येस ४ याणीं गुणावें ऐसें दारववितें आणि यांतील गुणक अंकास वेळाप्रकाशक स्मृतात - आणि ३क्ष हें तीन चतुर्थांशानीं गुणिलाक्ष असें दारववितें जसें ३ \times क्ष अथवा ३क्ष

५ सरूप पदें तींच होत जांचीं अक्षरें आणि वर्गादिक ए
 कच

(५)

कच आहे जसें अ आणि १अ अथवा २अब आणि ४अब
अथवा ३अबक आणि -५अबक

६ विरूप पदे तींच होत जांचीं अक्षरे आणि वर्गादिक हीं
भिन्न जाति आहेत जसें अ आणि ब अथवा २अ आणि अ^२
अथवा ३अब^२ आणि ३अबक

७ एक पद तेच होय जांत एकच रकम आहे जसें ३अ अ-
थवा ५अब अथवा ६अबक

८ संयुक्त पदे तींच होत जांत दोन तीन आदिकरून अने-
क रकमा परस्पर संबद्ध आहेत जसें अ+ब अथवा २अ-३क अथ-
वा अ+२ब-३क

९ आणि जेव्हां संयुक्त पदांत दोनच रकमा आहेत तेव्हां त्या-
स द्वियुक्पद स्मृतात जसें अ+ब जेव्हां त्यांत तीन पदे आहेत ते-
व्हां त्यास त्रियुक्पद स्मृतात जसें अ+२ब-३क जेव्हां त्यांत चा-
र रकमा आहेत तेव्हां त्यास चतुर्युक्पद स्मृतात जसें २अ-३ब+क-४ड
आणि याप्रमाणेच पंचयुक्पद इत्यादिक पुढेही जाणावीं आणखीही
जांत बहुत रकमा आहेत त्यास बहुयुक्पद स्मृतात

१० जेव्हां द्वियुक्पदांत एक रकम ऋण आहे तेव्हां त्यास
धनर्ण पद स्मृतात जसें अ-२ब

११ धन पद तेच होय जें मिळवायाचें आहे अथवा जास+ हें
अधिक जाति प्रकाशकचिन्ह जोडिलें आहे जसें अ अथवा +अ अथ-
वा अब

(६)

वा अब जेव्हां कोणतेही पद कोणत्येही चिन्हा वांधून असेल ते व्हां तें धन आहे असें समजावें

१२ ऋण पद तेच होय जें वजा करायाचें आहे जसें -अ अथवा -२अब अथवा -३अब^३

१३ सरूप चिन्हें तींच होत जीं सर्व(+) धन किंवा सर्व(-) ऋण आहेत

१४ विरूप चिन्हें तींच होत जांत कित्येक(+) धन आणि कित्येक(-) ऋण अशीं आहेत

१५ कोणत्येही पदाचा वेळाप्रकाशक तोच होय जो अंक- त्या पदाचे मागे लिहिला आहे जसें ३अब एथे ३हा अंक वेळा- प्रकाशक आहे

१६ कोणतेही पद स्रणजे जसा(अ) याचा वर्ग जसा(अ^२) अथवा घन जसा(अ^३) अथवा चतुर्घातं(अ^४) याप्रमाणें पुढेही

१७ वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गमूळादिप्रकाशक तोच अंक होय जो त्या पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूळादिक दारवधितो स्रणजे २हा अंक वर्गप्रकाशक जसें अ^२ आणि ३हा अंक घनप्रकाशक जसें अ^३ आणि ३हा वर्गमूळप्रकाशक जसें अ^३ अथवा १अ आणि ३हा घनमूळप्रकाशक जसें अ^३ अथवा ३अ

१८ अखंड पद तेच होय जास मूळप्रकाशक(✓) नाही जसें

जसें अ अथवा ३अब

१९. खंड पद अथवा करणी तीव्र होय जाचें मूळ अंशां वां चून केवळ पूर्णांकांतच येत नाहीं जसें २, ३, ५ इत्यादिक यांचें वर्गमूळ केवळ पूर्णांकांतच येत नाहीं करणीस मूळप्रकाशक (✓) सर्वदा जोडिला राहातो जसें ✓२ अथवा ✓अ अथवा ३/अ अथवा अब

२०. कोणत्याही पदाचा व्युत्क्रम तोच होय जें पद उलटें लिहिलें अथवा त्या पदानें १ भागिला जसें अ अथवा अ याचा व्युत्क्रम हा होय जे अ आणि अ याचा व्युत्क्रम हा होय जे अ

२१. जीं अक्षरें एक एकपदाचे संख्यानिवेदनार्थ कामांत घेतात तीं इछेस येईल त्या क्रमानें लिहावीं जसें अ आणि-ब यांचा गुणाकार या प्रमाणें लिहितां येतो अब अथवा बअ आणि अ . ब . क यांचा गुणाकार याप्रमाणें लिहितां येतो अबक अथवा अकब अथवा बअक अथवा बकअ अथवा कअब किंवा कबअ यांत कोणताही प्रथम गुणिला ल्पणोन चिंता नाहीं गुणाकार बरोबरच येतो

२२. याप्रमाणें संयुक्त पदाचा वेगळाल्या रकमा असतील त्याही इछेस येईल तशा क्रमानें लिहाव्या त्यांची किंमत अथवा अर्थ बरोबरच आहे जसें ३अ-२अब+४अबक हे असेही लिहितां

(८)

लिहितां येतात ३अ+४अबक-२अब अथवा याप्रमाणे
४अबक+३अ-२अब किंवा याप्रमाणेही -२अब+४अबक+३अ
इत्यादि स्तणजे हेसर्व ४अबक आणि ३अ यांचे बेरिजेतून
२अब वजा करून जी बाकी राहाले तीच बराबर दारववितात प
रंतु बद्धत करून धनरकम आरंभीं लिहितात अशी चाल
आहे

या सर्व वरचा व्याख्या समजावया करितां किलेक उदाहर-
णे लिहितो

तीं अशीं किं वेगळाल्ये चिन्हांचे संयुक्त पदांपासून संख्या
काढायाचीं

मनांत आणकिं पुढील उदाहरणांत अ=६, ब=५, क=४
ड=१ ई=०

उदाहरणे

प्रथम अ+३अब-क याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ३६+१०-१६=११०

दुसरें २अ-३अब+क याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ४३२-५४०+६४=-४४

तिसरें अ^३अ+ब-२अबक याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ३६×११-२४०=१५६

चौथें $\frac{अ^३}{अ+३क} + क$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\frac{३६}{११} + १६ = १२ + १६ = २८$

पांचवें

(९)

पांचवें $\sqrt{२अक+क}$ अथवा $\sqrt{२अक+क}$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } \sqrt{६४} = ८$$

साहावें $\sqrt{क+\frac{२४क}{२अक+क}}$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } २+\frac{४}{३} = ७$$

सातवें $\frac{अ+\sqrt{ब-अक}}{२अ-\sqrt{ब+अक}}$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } \frac{१५-१}{१२-७} = \frac{१४}{५} = ७$$

आठवें $\sqrt{ब-अक}+\sqrt{२अक+क}$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } १+८ = ९$$

नववें $\sqrt{ब-अक}+\sqrt{२अक+क}$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } \sqrt{२५-२४+८} = ३$$

दाहावें $अब+क-३$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } १८०$$

अकरावें $९अब-१०ब+क$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } २७०-२५०+४ = २०+४ = २४$$

बारावें $\frac{अ+ब}{क} \times ६$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } ४५$$

तेरावें $\frac{अ+ब}{क} \times \frac{४}{३}$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } १३ \frac{३}{४}$$

चौदावें $\frac{अ+ब}{क} - \frac{अ-ब}{३}$ याची संख्या काय होत्ये

$$\text{उत्तर } १ \frac{३}{४}$$

पंधरावें

(१०)

पंधरावें $\frac{अ+ब}{क} + इ$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ४५

सोळावें $\frac{अ+ब}{क} \times इ$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ०

सत्रावें $\overline{ब-क} \times \overline{ड-ई}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १

अठरावें $\overline{अ+ब-क-ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ८

एकुणिसावें $\overline{अ+ब-क-ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ६

विसावें $\overline{अक} \times \overline{ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १४४

एकविसावें $\overline{अकड-ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर २१

बाविसावें $\overline{अई+बई+ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १

तेविसावें $\frac{\overline{ब-ई}}{\overline{ड-ई}} \times \frac{\overline{अ+ब}}{\overline{क-ड}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १८३

चौविसावें $\sqrt{\overline{अ+ब}^2} - \sqrt{\overline{अ-ब}^2}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ४४५३६२४८

पंचविसावें

— पंचविसावे $१अक+१अ+ब$ याची संख्या काय होले

उत्तर २५२४९९८४२

सविसावे $४अ+१अ+२अ+ब$ याची संख्या काय होले

उत्तर ७२

मिळवणी

बीज गणितांत मिळवणीची होय जे वेगळालीं पदे त्यांचे त्यांचे चिन्हांनी जोडून लिहिणें जेव्हां सरूप पदेच असतील तेव्हां तीं एकत्र मिळवून त्यांची एकरकम करावी जसें $१अ+२ब-२अ$ यांची बेरीज $अ+२ब$

बीज गणितांत मिळवणीचे रितीचे प्रकार तीन आहेत

- १ वेगळालीं पदे सरूप आणि त्यांचीं चिन्हेही सरूप आहेत
- २ वेगळालीं पदे सरूप आहेत परंतु त्यांचीं चिन्हे विरूप आहेत
- ३ वेगळालीं पदे विरूप आहेत-यांचीं कामे पुढें सांगतो*

* जीं पदे मिळवाची आहेत त्यांची जाति लक्षांत आणिली असता या काळाचा आशय आणि व्यापकारांचीं कारणे त्यांच्यांत समजात येतील लुणजे प्रथम प्रकाराक दोन पदे आहेत $१अ$ आणि $५अ$ आतां एथे एकरकमेंतील $अ$ जी वस्तु निवेदितो तीच वस्तु दुपयें रकमेंतीलही $अ$ निवेदितो तेव्हां जी वस्तु १ वेळा तीच वस्तु पुनः ५ वेळा एकूण ८ वेळा परंतु वस्तु तीच हा निश्चय जर $अ$ एक रुपया निवेदितो तर $१अ$ ५ रुपये आणि $५अ$ ५ रुपये त्यांची बेरीज $८अ$ लुणजे ८ रुपये जावी या प्रमाणे— $२अ$ व आणि— $७अ$ व अथवा कोणतीही वस्तु— २ आणि तीच वस्तु— ७ हे कोणी मिळोन तीच वस्तु— ९ बेरीज आली

आतां दुसरे प्रकारांत पदे साम सरूप आणि चिन्हे विरूप या प्रकाराचे कारण यापासून त्यांच्यांत समजात येईल किं मिळवणी लुणजे ही आहे जे वेगळालीं पदे गणित रितीनें एकत्र मिळवावीं अशी त्यांची चिन्हे $+$ धन आणि— $-$ ऋण हीं दाखवितात लुणजे मिळवणी आणि वजाबाकी परतु हीं

(१२)

प्रथमप्रकार

जेव्हा वेगळी पदे सरूप आहेत आणि त्यांची विन्हेही सरूप आहेत

रीति

सर्व वेळा प्रकाशक मिळवून त्यांची बेरीज लिहावी नंतर त्या सरूप पदांचे अक्षर पुढे लिहावे आणि प्रकाशक विन्हे + धन किंवा - करण असेल ते ओढो ओढावे

जसे ३अ आणि ५अ या दोहोंची बेरीज - अहोले

॥ -३अब आणि -७अब यांची बेरीज -१०अब होले

॥ ५अ + ७ब आणि ७अ + ३ब यांची बेरीज १२अ + १०ब होले

॥ ही दोन कामे परस्परविरुद्ध याज करितां असें आल्यास एकाचा वेळा प्रकाशक दुसऱ्याचा तो न बजा केला पाहिजे असा किं त्या पदांची एकच रकम होईल

आतां तिसरें प्रकारांत जेव्हां सर्वपदे विरूप आहेत तेव्हां स्पष्ट दिसतें किं ७अशी पदे एकच रकमें न कदापि येणार नाहीत ह्मणजे त्यांची बेरीज वेगळाल्या रकमा त्यांचे त्यांचे जिन्हांनीं जोडिऱ्या यांभून दुसऱ्या रीतीनें कदापि होणार नाही जसे जर अ एकपया मिबेदितो आणि ब एकपसा तर अ-आणिब यांची बेरीज २अ किंवा २ब होणार नाही ह्मणजे २रूपचे किंवा येणे नाहीत परंतु अ+ब हे आहे किं एकपयाअधिक एकपसा

या रीतीन मिळवणी हा शब्द यांगव्य प्रकारें लागत नाही एथे नितकें काम करावाचें आहे तितका पूर्ण अर्थ वाक्यापासून मिळत नाही तें काम हें आहे किं वेगळालीं पदे एकच मिळतील तर मिळवावीं न मिळतील तर त्यांचीं त्यांचीं विन्हे ओढून अतुकमें लिहावीं जेव्हां वेगळाल्ये पदांत कित्येक - धन आणि कित्येक - करण आहेत तर त्यांत सरूप पदे असतील तीं पूर्वे रीतीनें एकच करितां येतील

बीजगणितांत मिळवणी पाहातां कोडे अनेक रकमांची एक रकम करणे कोडे बजा बाकी करणे ऐसें परम आवश्यक दिसतें परंतु मिळवणी शब्दाचा अर्थ एकीकरण किंवा बाकी ऐसा एथे मनांत आणित्वावर किंमति आवश्यक नाही ऐसें दिसेल

(१३)

हीच रीति समजाया करितां दुसरीं उदाहरणे

१ अ	— १ वक्ष	वक्षय
१ अ	— ५ वक्ष	२ वक्षय
५ अ	— ४ वक्ष	५ वक्षय
१२ अ	— २ वक्ष	वक्षय
अ	— ७ वक्ष	३ वक्षय
२ अ	— वक्ष	६ वक्षय
<u>१२ अ</u>	<u>— २२ वक्ष</u>	<u>१८ वक्षय</u>
१ ज	१ क्ष + ५ क्षय	२ अक्ष - ४ य
२ ज	क्ष + क्षय	४ अक्ष - य
४ ज	२ क्ष + ४ क्षय	अक्ष - ३ य
ज	५ क्ष + २ क्षय	५ अक्ष - ५ य
५ ज	४ क्ष + ३ क्षय	७ अक्ष - २ य
<u>१५ ज</u>	<u>१५ क्ष + १५ क्षय</u>	<u>१९ अक्ष - १५ य</u>
५ क्षय	— १२ य	४ अ - ४ व
१४ क्षय	— ७ य	५ अ - ५ व
२२ क्षय	— २ य	६ अ - व
१७ क्षय	— ४ य	७ अ - २ व
१३ क्षय	— य	२ अ - ७ व
<u>३ क्षय</u>	<u>— ७ य</u>	<u>८ अ - व</u>
३०-१३ क्ष - क्षव		५ क्षय - ७ क्ष + ४ अव
२७-१० क्ष - ४ क्षय		८ क्षय - ४ क्ष + ७ अव
१४-१४ क्ष - ७ क्षय		७ क्षय - ५ क्ष + ५ अव
१०-१६ क्ष - ५ क्षय		क्षय - २ क्ष + अव
<u>१६-२० क्ष - क्षय</u>		<u>४ क्षय - क्ष + ७ अव</u>

(१४)

दुसरा प्रकार

जेव्हा वेगळाली पदे सरूप आहेत परंतु त्यांचीं चिन्हे विरूप आहेत

रीति

धन वेळा प्रकाशकांची बेरीज घ्यावी आणि ऋण वेळा प्रकाशकांची बेरीज घ्यावी नंतर या दोन बेरीजांत जी अधिक असेल त्यांतून उणी बेरीज वजाकरून बाकी राहील तिचे आदो अधिक बेरीजेचें प्रकाशक चिन्ह जें असेल तें लिहावें आणि त्याचे पुढें या बाकी सरूप पदाचें अक्षर चिन्ह लिहावें

जसें +५अ आणि -३अ यांची बेरीज +२अ जाली

॥ -५अ आणि +३अ यांची बेरीज -२अ जाली

हीच रीति समजावयाकरितां दुसरीं उदाहरणें

-५अ	+३अक्ष ^२	+८क्ष-३य
+४अ	+४अक्ष ^२	-५क्ष+४य
+६अ	-८अक्ष ^२	-१६क्ष+५य
-३अ	-६अक्ष ^२	+३क्ष-७य
+ अ	+५अक्ष ^२	+२क्ष-७य
<u>+३अ</u>	<u>-२अक्ष^२</u>	<u>-८क्ष-३य</u>
-३अ ^२	+३बेय ^२	+४अब+४
-५अ ^२	+९बेय ^२	-४अब+१२
-१०अ ^२	-१०बेय ^२	+७अब-१४
+१०अ ^२	-१९बेय ^२	+ अब+३
<u>+१४अ^२</u>	<u>-३बेय^२</u>	<u>-५अब-१०</u>

-३ अक्ष^३
 ++ अक्ष^३
 +५ अक्ष^३
 +६ अक्ष^३

+१०✓अक्ष
 -३✓अक्ष
 +४✓अक्ष
 -१२✓अक्ष

+३य+४ अक्ष^३
 - य-५ अक्ष^३
 +४ य+२ अक्ष^३
 -२य+६ अक्ष^३

तिसरा प्रकार

जेव्हा वेगळालीं पदे विरूप आहेत तेव्हा
 रीति

पूर्वी सांगितल्ये दोन प्रकारां प्रमाणें सरूप पदे एकत्र मिळवून
 लिहावीं आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांचे त्यांचे प्रकाशकचिन्हां
 सह वर्तमान एकापुढें एक जोडून लिहावीं

उदाहरणे

३ क्षय
 २ अक्ष
 -५ क्षय
 ६ अक्ष-
-२क्षय+८अक्ष

९क्षय^२
 -७क्षय^२
 +३अक्षय
 +४क्षय^२

-६क्षय-१२क्ष^२
 -४क्ष^२+३क्षय
 +४क्ष^२+२क्षय
 -३क्षय+४क्ष^२
-४क्षय-८क्ष^२

१४अक्ष-२क्ष^२
 ५ अक्ष+३क्षय
 ८ य^२-४अक्ष
 ३क्ष^२+२५

४ अक्ष-१३०+३क्ष^२
 ५क्ष^२+३अक्ष+५क्ष^२
 ३क्षय-४क्ष+१०
 १क्ष+४०-६क्ष^२
७अक्ष+८क्ष^२+७क्षय

१-१०✓अक्ष-५य
 २क्ष+७✓क्षय+५य
 ५य+३✓अक्ष-४य
१०-४✓अक्ष+४य

(१६)

४ क्षेय
-६ क्षय
+३ यक्ष
-३ क्षेय

४√क्ष - ३ य
२√क्षय+१४क्ष
३ क्ष + २ य
-९-३ क्षय

३अ+९+क्ष-४
२अ-८+२अ-३क्ष
४क्ष-२अ+१८-७
-१२-अ-३क्ष-२य

आणखी उदाहरणे

प्रथम अ+ब आणि ३अ-५ब यांची बेरीज काय होईल

दुसरे ५अ-८क्ष आणि ३अ-४क्ष यांची बेरीज काय होईल

तिसरे ६क्ष-५ब+अ+८ आणि -५अ-४क्ष+४ब-३ यांची बेरीज काय होईल

चौथे अ+२ब-३क-१० आणि ३ब-४अ+५क+१० आणि ५ब-क यांची बेरीज काय होईल

पांचवे अ+ब आणि अ-ब यांची बेरीज काय होईल

साहावे ३अ+ब-१० आणि क-ड-अ आणि -४क+२अ-३ब-७ यांची बेरीज काय होईल

सातवे

(१७)

सातवें १अ+बे-क आणि २अब-१अ+बक-व यांची बेरीज काय होत्ये

आठवें अ+बक-बे आणि अबे-अबक+बे यांची बेरीज काय होत्ये .

नववें ९अ-८ब+१०क्ष-६ड-७क+९० आणि २क्ष-१अ-९क+४ब+६ड-१० यांची बेरीज काय होईल

वजा बाकी

जर कोणत्याही पदापासून काहीही वजा करायाचें आहे तर तें पद वर एक ओळीत लिहि नंतर जें पद वजा करायाचें आहे तें तसेंच त्या चे खाली लिहि असें किं सरूप अक्षरें एकाखाली एक अशी येतील

नंतर खालचे ओळीतील चिह्ने + धन आणि - ऋण असतील ती बदल करून लिहि अथवा बदल केलीं असें मनांत आण नंतर मिळवणीचे रितीनें तीं सर्व पदे एकत्र कर *

※ या रितीस आशुगुण्य आहे किं मिळवणी आणि वजा बाकी यांचा जाति आण कोन परस्पर विरुद्ध आहेत हे त्याची चिह्ने दाखवितान + आणि - कोणतीही ऋण पदे दुसऱ्या धन पदाशीं मळवितां असें कार्य होतें किं धन पदातून या ऋण पदाबरोबर धन पद वजा करितां वजा बाकी मिळवणीशीं विरुद्ध आहे याज करितां धन पद कोणत्याही दुसऱ्या धन पदास वजा करणें हें याचे बरोबर आहे किं ऋण पद धन पदास मळविलें या रितीनें एक ऋण पद मळविणें हें याचे बरोबर आहे किं एक धन पद मळविलें याप्रमाणे कोणत्याही पदाचीं चिह्ने बदल करितां खणजे + धन ठिकाणीं - ऋण आणि - ऋण ठिकाणीं + धन याप्रमाणें करितां त्या पदाची जातीही बदल होय खणजे पूर्वी वजा बाकीचे रूप होते तें मळवणीचे रूप जाले

(१८)

उदाहरणें

७अ-३ब यांतून	८क्ष-४य+८	८ क्षय-३+६क्ष-य
२अ-८ब हेवजा	६क्ष+९य-४	४ क्षय-७-६क्ष-४य
५अ+५ब बाकी	३क्ष-९य+१२	४क्षय+४+१२क्ष+३य
५क्षय-६	४य-३य-४	-२०-६क्ष-५क्षय
-२क्षय+६	२य+२य+४	३क्षय-९क्ष+८-२अय
७क्षय-१२	२य-५य-८	-२८+३क्ष-८क्षय+२अय
८क्षय+६	५√क्षय+२क्ष/क्षय	७क्ष+२√क्ष-१८+३ब
-२क्षय+२	७√क्षय+३-२क्षय	८क्ष-१२+५ब+क्ष
५क्षय-३०	७क्ष-२ (अ+ब)	३क्षय+२०अ/८क्षय+१२
७क्षय-५०	२क्ष-४ (अ+ब)	४क्षय+१२अ/८क्षय+३

आणखी उदाहरणें

प्रथम	अ+ब यांतून अ-ब हेवजाकर
दुसरें	४अ+४ब यांतून ब+अ हेवजाकर
तिसरें	४अ-४ब यांतून ३अ+५ब हेवजाकर
चौथें	८अ-१२क्ष यांतून ४अ-३क्ष हेवजाकर
पांचवें	३क्ष-४अ-२ब+५ यांतून ८-५ब+अ+६क्ष हेवजाकर

साहायें

साहावे ३ अ + ब + क - ड - १० यातून क + २ अ - ड हे वजा
कर

सातवे ३ अ + ब + क - ड - १० यातून ब - १० + ३ अ हे वजा
कर

आठवे २ अब + ब - ४ क + वक - ब यातून ३ अ - क + ब हे
वजाकर

नववे ३ अ + ३ ब + क + अब - अबक यातून ब + अब - अबक
हे वजा कर

दाहावे १२ क्ष + ६ अ - ४ ब + ४० यातून ४ ब - ३ अ + ४ क्ष +
६ ड हे वजाकर

अकरावे २ क्ष - ३ अ + ४ ब + ६ क - ५० यातून ९ अ + क्ष + ६
ब - ६ क - ४ हे वजा कर

बारावे ६ अ - ४ ब - १२ क + १२ क्ष यातून २ क्ष - ८ अ + ४ ब
- ५ क हे वजा कर

गुणाकार

गुणाकार

गुणाकारांत गुण्य आणि गुणक यांची पदे एकाकी अथवा संयुक्त याज वस्तु त्याचे अनेक प्रकार आहेत

प्रथम प्रकार

जेव्हा गुण्य आणि गुणक हीं दोनही पदे एकाकी आहेत
रिति

गुण्य आणि गुणक यांचे वेळा प्रकाशक परस्पर गुणून लिहावे
नंतर दोन रकमांची जीं अक्षरे आहेत तीं सर्व जोडून त्या गुणाकारा पुढे
लिहावीं सगळे हे सर्व मिळून गुणाकार जाला

गुण्य आणि गुणक यांचीं चिन्हे सरूप असल्यास गुणाकार (+) ध-
न होतो आणि तीं गुण्यगुणकांचीं चिन्हे विरूप असल्यास गुणाकार (-) ऋ-
ण होतो *

* यादीतील खरपणा यापुढील लिहिण्यावस्तु समजात येतो

१. जेव्हा + अ हा + क संगती गुणायाचा आहे यातील अर्थ हा किं + क या मध्ये जितकी संख्या आहे तितक्या वेळा + अ घेतला पाहिजे आतां जा रकमा धन आहेत त्याची बेरीज धन होले यांतून निघते किं + अ X + क याचा गुणाकार + अक होतो

२. जेव्हा दोन आदिकरत पदे परस्पर गुणायाची आहेत तर कोणत्याही तर्हेने तीं पदे लिहि-
लीं तरी गुणाकार बराबर येईल सगळे अ X क आणि क X अ हे दोनही एकच आहेत याजकरितां
जेव्हा - अ हा + क याचे गुणायाचा अथवा + क हा - अ याचे गुणायाचा आहे या म अर्थ हा आहे कि जितकी संख्या + क या मध्ये आहे तितक्या वेळा - अ घेतला पाहिजे आतां जा रकमा ऋण आहेत त्यांची बेरीज ऋण होले यांतून निघते किं - अ X + क अथवा + क X - अ हे दोनही गुणाकार
- अक होतात

३. जेव्हा - अ आणि - क हे परस्पर गुणायाचे आहेत एथे जी संख्या - क या मध्ये आहे ति-
तक्या वेळा - अ वजा केला पाहिजे परंतु ऋण वजा करणे हे पूर्वी सांगितले वजाबाकी वरील टीपी
प्रमाणे धनाचे पिलवणी बराबर आहे क X अ अथवा + अक

अमे नसल अ-अ=० याजकरितां (अ-अ) X - क हे ही = ० कारण कोणत्याही पदाने ० श-
य गुणित्यास गुणाकार ० शून्य होईल आतां गुणाकारांत प्रथम रकम अ X - क = - अक हे दु-
सरे प्रकार प्रमाणे मिळते आहे याजकरितां गुणाकाराची दुसरी रकम - अ X - क = निश्चय + अक
जसा कि दोन रकमांची बेरीज ० शून्या बराबर होईल याप्रमाणे - अक + अक = ० शून्य यांतून निघ-
ते कि - अ X - क = + अक आहे

64566 dt 13/4/17 RARE BOOK

उदाहरणे



(२१)

उदाहरणें

१०अ	-३अ	७अ	-६क्ष	हे गुण्य
२ब	+२ब	-४क	-४अ	हे गुणक
<u>२०अब</u>	<u>-६अब</u>	<u>-२८अक</u>	<u>२४अक्ष</u>	हा गुणाकार
४अक	९अक्ष	-२क्षय	-४क्षय	
-३अब	४क्ष	३क्षय	- क्षय	
<u>-१२अबक</u>	<u>३६अक्ष</u>	<u>-६क्षय</u>	<u>४क्षय</u>	
-३अक्ष	-अक्ष	३क्षय	-५क्षयज्ञ	
<u>४क्ष</u>	<u>-६क</u>	<u>-४</u>	<u>-५अक्ष</u>	

दुसरा प्रकार

जैहां गुण्य आणि गुणक यांत एक संयुक्त पद आहे

शिति

संयुक्त पदाची एक रकम एक वेगळाती एक पदानें पूर्व शिती प्रमाणें गुणावी गुणाकार येईल तो एकापुढें एक त्याचे त्याचे चिन्हांनें संयुक्त करून अनुक्रमानें लिहावा सणजे सर्व मिळोन गुणाकार जाला

उदाहरणें

५अ-३क	३अक-४ब	२अ-३क+५
<u>२अ</u>	<u>३अ</u>	<u>बक</u>
<u>१०अ-६अक</u>	<u>९अक-१२अब</u>	<u>२अबक-३बक+५बक</u>

(२२)

१२ क्ष-२ अक

४ अ

२५ क-७ व

-२ अ

४ क्ष-व+३ अब

२ अब

३ क+क्ष

४ क्षय

१० क्ष-३ य

-४ क्ष

३ अ-२ क्ष-६ व

२ अक्ष

तिसरा प्रकार

जेव्हा गुण्य आणि गुणक हीं दोनही संयुक्त पदेच आहेत
रिति

गुण्याचा सर्व वेगळाल्या रकमा गुणकाचे सर्व वेगळाल्ये र-
कमांनीं अनुक्रमें गुणाव्या अशा किं गुण्याची एक एक रकम सर्व
गुणकानें गुणिली जाईल गुणाकार येईल तो एकारवालीं एक अ-
थवा एका पुढें एक अनुक्रमें लिहावा नंतर त्यांत जीं सरूप पदे अ-
सतील तीं सर्व एकत्र करावीं स्रणजे सर्व मिळोन गुणाकार जाला

उदाहरणें

अ+व

अ+व

अ+अब

+अब+बे

अ+२अब+बे

३क्ष+२य

४क्ष-५य

१२क्ष+८क्षय

-१५क्षय-१०य

१२क्ष-७क्षय-१०य

२क्ष+क्षय-३य

३क्ष-३य

६क्ष+३क्षय-६क्षय

-६क्षय-३क्षय+६य

६क्ष-३क्षय-९क्षय+६य

अ+व

(२३)

अ+ब	क्षे+य	अ+अब+बे
अ-ब	क्षे+य	अ-ब
अ+अब	क्षे+क्षेय	अ+अब+अबे
-अब-बे	+क्षेय+ये	-अब-अबे-बे
अ. * -बे	क्षे+२क्षेय+ये	अ. * * -बे

जेव्हां संयुक्त पदांस परस्पर गुणितात तेव्हां गुणायांचा आरंभ डावेकडून करावा सणजे अंक गणित गुणाकाराचे उलटा आणि गुणाकार लिहिते समयीं पूर्वओळीचें एक स्थान सोडून दुसरे ओळीचा आरंभ करावा या प्रमाणें प्रति ओळीस एक एक स्थान सोडून असें पुढेही सणजे सरूप रकमा एकारवालीं एक येतुन मिळवणी समयीं श्रम पडणार नाहीं

बहुतेक प्रकारें संयुक्त पदांचा गुणाकार असा लिहितात किं संयुक्त पदे सारवळींत लिहून मध्यें गुणाकाराचें चिन्ह मात्र लिहितात

जसें (अ+ब) × (अ-ब) × ३अब अथवा या प्रमाणें

अ+ब • अ-ब • ३अब

उदाहरणें •

प्रथम १० अक यांस २अ याणीं गुण

गुणाकार २०अक

दुसरें ३अ-२ब यांस ३ब याणीं गुण

गुणाकार ९अब-६बे

तिसरें

तिसरें ३अ+२ब यांस ३अ-२ब याणीं गुण

गुणाकार ९अ-४ब

चवथें क्ष-क्षय+य यांस क्ष+य याणीं गुण

गुणाकार क्ष+य

पांचवें अ+अब+अब+ब यांस अ-ब याणीं गुण

गुणाकार अ-ब

साहावें अ+अब+ब यांस अ-अब+ब याणीं गुण

सातवें क्ष-२क्षय+५ यांस क्ष+२क्षय-६ याणीं गुण

आठवें ३अ-२अक्ष+५क्ष यांस ३अ-४अक्ष-७क्ष याणीं
गुण

नववें ३क्ष+२क्षय+३य यांस २क्ष-३क्षय-३य याणीं गु-

ण

दाहावें अ+अब+ब यांस अ-२ब याणीं गुण

भागाकार

बीजगणितांत भागाकार अंकगणिताप्रमाणेंच गुणाकाराचे
उलटा आहे आणि अंकगणिताप्रमाणेंच डावेकडून उजवेकडे भागी
तजावें भाज्य निःशेष भागिला जाईल तर वर सांगितले रीतीने भा-
गुन .

गून भागाकार लिहावा तसें नहोईल तर व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें वर भाज्य लिहून रवालीं भाजक लिहावा त्यांतही होईल तर संक्षेप करावा आणि लिहावा त्याचे प्रकार आहेत ते मांगतो

प्रथम प्रकार

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही एकाकी आहेत

अंक गणिता प्रमाणें भाजक भाज्याचे मागें अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें भाज्याचे रवालीं अशा तरेनें दोनही रकमा लिहाव्या नंतर भाज्य भाजकांचा होईल तेवढा संक्षेप करावा त्याची रीति ही आहे किंवा दोन रकमांत जीं साधारण अक्षरें असतील तीं दोनही रकमांतून रद्द करावीं नंतर भाजक वेळा प्रकाशानें भाज्य वेळा प्रकाशक भागावा अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें त्या दोहोंचा दृढ भाजकानें भागून संक्षेप करावा

भाज्य आणि भाजक यांचीं चिन्हे सरूप असल्यास भागाकार (+) धन होतो आणि तीं विरूप असल्यास भागाकार (-) ऋण होतो *

*. सुणोन पाहा भाजक आणि भागाकार हे परस्पर गुणित असतां भाज्य सिद्ध होतो याजकरितां
१. जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (+) धन आहेत तेव्हां भागाकार निश्चित (+) धन होईल कारण धन भाजक धन भागाकारानें गुणिला असतां गुणाकार भाज्य धन होतो

२. जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (-) ऋण आहेत तेव्हांही भागाकार (+) धन होईल कारण ऋण भाजक ऋण भागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (+) धन होतो

३. जेव्हां भाज्य आणि भाजक यांत एक धन आणि एक ऋण असें आहे तेव्हां भागाकार निश्चित (-) ऋण होईल कारण धन भाजक × ऋण भागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (-) ऋण होतो अथवा ऋण भाजक × धन भागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (-) ऋण होतो

यांतून दिसतें किं भाज्य भाजकांचीं सरूप चिन्हे भागाकारास (+) धन करितात आणि त्या भाज्य भाजकांचीं विरूप चिन्हे भागाकारास (-) ऋण करितात ही सामान्य रीति होय

उदाहरणें

(२६)

उदाहरणें

प्रथम ६अब यांस ३अ याणीं भाग

आतां $६अब \div ३अ$ अथवा $३अ)६अब$ (अथवा $\frac{६अब}{३अ} = २ब$

दुसरें $क \div क = \frac{क}{क} = १$ आणि $अबक्ष \div बक्षय = \frac{अबक्ष}{बक्षय} = अ$

तिसरें १६क्ष यांस ८क्ष याणीं भाग

भागाकार २क्ष

चवथें १२अक्ष यांस ३अक्ष याणीं भाग

भागाकार - ४क्ष

पांचवें - १५अय यांस ३अय याणीं भाग

भागाकार - ५य

साहावें - १८अक्षय यांस - ८अक्षय याणीं भाग

भागाकार $\frac{१८क्षय}{८क्षय}$

दुसरा प्रकार

जेव्हां भाज्य संयुक्तपद आहे आणि भाजक एकाकी आहे
रीति

भाज्यांतील सर्व रकमा पूर्वरीती प्रमाणे भाजकाने वेगळा-
ल्या भागाच्या

उदाहरणें

प्रथम $(अब+ब) \div २ब$ अथवा $\frac{अब+ब}{२ब} = \frac{अ+ब}{२} =$

३अ+२ब

दुसरें

(२७)

दुसरें $(१०अब+१५अक्ष)+५अ$ अथवा $\frac{१०अब+१५अक्ष}{५अ}$

२ब+३क्ष

तिसरें $(३०अक्ष-४०क्ष)+३क्ष$ अथवा $\frac{३०अक्ष-४०क्ष}{३क्ष}$

भागाकार ३०अ-४०

चवथें $६अब-८अक्ष+अ$ यांस २अ याणीं भाग

पांचवें $३क्ष-१५+६क्ष+६अ$ यांस ३क्ष याणीं भाग

साहावें $६अबक+१२अबक्ष-९अब$ यांस ३अब याणीं भाग

सातवें $१०अक्ष-१५क्ष-२५क्ष$ यांस ५क्ष याणीं भाग

आठवें $१५अबक-१५अकक्ष+५अडें$ यांस-५अक याणीं भाग

नववें $१५अ+३अय-१०य$ यांस २१अ याणीं भाग

दाहावें $-२०डेंबे+६०अबे$ यांस-६अब याणीं भाग

तिसरा

(२८)

तिसरा प्रकार

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही संयुक्त पदेच आहेत
शीति

१ अंक गणितरीतीने भाज्यभाजक लिहावे म्हणजे प्रथम भाजक लिहावा नंतर भाज्यलिहावा आतां यादोहोंचे मध्ये एक वांकडी रेघ करावी आणि दोहोंत अक्षरचिन्हें असतील तीं सोद्ये घातापासून उतरतीं लिहावीं

२ भाज्याचें पहिलें पद भाजकाचे पहिल्या पदानें प्रथम प्रकाराप्रमाणें भागावें आणि भागाकार येईल तो भागाकार स्थळीं लिहावा

३ या भागाकारानें सर्व भाजक पदें गुणून तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा

४ नंतर बाकीवर वरचे भाज्यांतून पद खाली घेऊन पुनः पूर्व प्रमाणें भागावें या प्रमाणें भाज्याचे प्रतिपदीं करावें असें शेवट पर्यंत करावें जसें अंकगणितांत करितात

टीप जर भाजक भाज्यांतून बरोबर जात नाही तर तें पद व्यवहारी अपूर्णाकरीतीने लिहावें जशी अंकगणितांत जाकी लिहितात

उदाहरणें

$$\begin{array}{r} \text{अ-क) अ-४ अंक} + ४ \text{अंक-क) (अ-३ अंक} + \text{क} \\ \text{अ-३ अंक} \\ * - ३ \text{अंक} + ४ \text{अंक} \\ - ३ \text{अंक} + ३ \text{अंक} \\ * + \text{अंक-क} \\ + \text{अंक-क} \\ * * \end{array}$$

अ-ब)

(२९)

अ-ब) अ-२ अव+ब (अ-ब भागाकार

अ-२ अव

- अव+ब

- अव+ब

* *

अ-२) अ-६ अ+१२ अ-८ (अ-४ अ+४ भागाकार

अ-२ अ

* - ४ अ+१२ अ

- ४ अ+८ अ

* + ४ अ-८

+ ४ अ-८

* *

अ+ज्ञ) अ+ज्ञ (अ-अज्ञ+ज्ञ भागाकार

अ+अज्ञ

* - अज्ञ+ज्ञ

- अज्ञ-अज्ञ

+ अज्ञ+ज्ञ

+ अज्ञ+ज्ञ

* *

अ+२क्ष) अ+४ अक्ष+४ क्ष (अ+२ क्ष भागाकार

अ+२ अक्ष

* + २ अक्ष+४ क्ष

+ २ अक्ष+४ क्ष

* *

अ+क्ष

(३०)

अ+क्ष) अ-३ क्ष (अ-अक्ष+अक्ष-क्ष-^{२क्ष} अ+क्ष भागाका
अ+अक्ष

* - अक्ष-३ क्ष
- अक्ष-अक्ष

* +अक्ष-३ क्ष
+अक्ष+अक्ष

* -अक्ष-३ क्ष
-अक्ष-क्ष

* -२क्ष

दुसरीं उदाहरणें

प्रथम अ+४अक्ष+४क्ष यांस अ+२क्ष याणीं भाग

उत्तर अ+२क्ष

दुसरे अ+३अक्ष+३अक्ष-क्ष यांस अ-क्ष याणीं भाग

उत्तर अ-२अक्ष+क्ष

तिसरे १ यास १+अ याणीं भाग

उत्तर १-अ+अ-अ इत्यादि अनंत

चवथे १२क्ष-१९२ यांस ३क्ष-६ याणीं भाग

उत्तर ४क्ष+१६क्ष+३२

पांचवें अ-५ अक्ष+१० अक्ष-१० अक्ष+५ अक्ष-ब यांस अ-२

अक्ष+ब याणीं भाग

उत्तर अ-३अक्ष+३अक्ष-ब

साहायें

(३१)

साहावे ४८ जे-९६ अजे-६४ अजे+१५० अ यांस २ ज-
३ अ याणी भाग

सातवे बे-३ बेक्षे+३ बेक्षे-क्षे यांस बे-३ बेक्षे+३ बेक्षे
-क्षे याणी भाग

आठवे अ-क्षे यांस भ-क्ष याणी भाग

नववे अ+५ अक्षे+५ अक्षे+क्षे यांस अ+क्ष याणी भाग

दाहावे अ+४ अजे-३२ बे यांस अ+२ ब याणी भाग

अकरावे २४ अ-बे यांस ३ अ-२ ब याणी भाग

(३२)

अपूर्ण बीज गणित

अपूर्ण बीज गणितांत नामें आणि रीति अपूर्णांक गणिताप्रमाणेंच आहंत हें पुढें सांगतो या प्रकारांवरून कळेल.

प्रथम प्रकार

भागानुबंधपूर्ण बीजास विषम अपूर्ण बीजाचें रूप द्यावयाचा रीति

पूर्ण बीज अपूर्ण बीजाचे छेदानीं गुणून त्या गुणाकारांत अंश मिळवून अथवा मिळवणीचे चिन्हांनीं जोडून वर लिहावें आणि खालीं छेद लिहावे म्हणजे विषम अपूर्ण बीजाचें रूप जालें

उदाहरणे

प्रथम $३\frac{४}{५}$ आणि अ- $\frac{४}{५}$ या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे

$$३\frac{४}{५} = \frac{३ \times ५ + ४}{५} = \frac{१५ + ४}{५} = \frac{१९}{५} \text{ हें उत्तर}$$

$$\text{अ-} \frac{४}{५} = \frac{\text{अ} \times ५ - ४}{५} = \frac{\text{अ} ५ - ४}{५} \text{ हें उत्तर}$$

दुसरें $\text{अ} + \frac{\text{अ}^२}{ब}$ आणि अ- $\frac{\text{अ}^२-ब}{अ}$ या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे

$$\text{अ} + \frac{\text{अ}^२}{ब} = \frac{\text{अ} \times ब + \text{अ}^२}{ब} = \frac{\text{अब} + \text{अ}^२}{ब} \text{ हें उत्तर}$$

$$\text{अ-} \frac{\text{अ}^२-ब}{अ} = \frac{\text{अ}^२ - \text{अ}^२ + ब}{अ} = \frac{ब - \text{अ}^२}{अ} \text{ हें उत्तर}$$

तिसरें $५\frac{३}{४}$ यांस विषम अपूर्णांक रूप दे

उत्तर $५\frac{३}{४}$

चवथें

(३३)

चवथें $१ - \frac{२अ}{क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{क्ष - २अ}{क्ष}$

पांचवें $२अ - \frac{२अक्ष + अ^२}{४क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{५अक्ष - अ^२}{४क्ष}$

साहावें $१२ + \frac{४क्ष - १८}{५क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{६४क्ष - १८}{५क्ष}$

सातवें $क्ष + \frac{१ - २अ - क}{क}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{कक्ष + १ - २अ - क}{क}$

आठवें $४ + २क्ष - \frac{२क्ष^२ + २अ}{५अ}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{२२अ + १०अक्ष - २क्ष^२}{५अ}$

दुसरा प्रकार

विषम अपूर्ण बीजास पूर्ण बीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्ण बी-
जरूप द्यावयाचा

रीति

पूर्ण बीज निघावयाकरितां अंशांस छेदानीं भागावे आणि
कांहीं बाकी राहिली तर ती भागाकाराचे बाजूस लिहून तिचे खा-
लीं छेद लिहावे

उदाहरणें

(२४)

उदाहरणें

प्रथम $\frac{१६}{३}$ आणि $\frac{अब+अ^३}{ब}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

$$\frac{१६}{३} = १६ \div ३ = ५ \frac{१}{३} \text{ हें उत्तर}$$

$$\frac{अब+अ^३}{ब} = \frac{अब+अ^३+ब=अ+अ^३}{ब} \text{ हें उत्तर}$$

दुसरें $\frac{२अक-३अ^३}{क}$ आणि $\frac{३अक्ष+४क्ष^३}{अ+क्ष}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

$$\frac{२अक-३अ^३}{क} = \frac{२अक-३अ^३+क=२अ-३अ^३}{क} \text{ हें उत्तर}$$

$$\frac{३अक्ष+४क्ष^३}{अ+क्ष} = \frac{३अक्ष+४क्ष^३+अ+क्ष=३क्ष+क्ष^३}{अ+क्ष} \text{ हें उत्तर}$$

तिसरें $\frac{३३}{५}$ आणि $\frac{२अक्ष-३क्ष^३}{अ}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

$$\text{उत्तर } ६ \frac{३}{५} \text{ आणि } २क्ष - \frac{३क्ष^३}{अ}$$

चवथें $\frac{४अ^३क्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ^३+२ब^३}{अ-ब}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

$$\text{उत्तर } २अक्ष \text{ आणि } २अ+२ब+\frac{४ब^३}{अ-ब}$$

पांचवें $\frac{३क्ष^३-३य^३}{क्ष+य}$ आणि $\frac{३क्ष^३-३य^३}{क्ष-य}$ यांस पूर्ण बीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

साहायें

(३५)

साहावे $\frac{१०अ-४अ+६}{५अ}$ यांस पूर्ण बीज रूप अथवा भागानुबंध पूर्ण बीज रूप दे

सातवे $\frac{१५अ+५अ}{१अ+२अ-२अ-४}$ यांस पूर्ण बीज रूप अथवा भागानुबंध पूर्ण बीज रूप दे

तिसरा प्रकार

अपूर्ण बीजास समछेद करायाचा

रीति

प्रतिपदाचे अंश आणि त्याचे छेदांवांचून सर्वपदांचे छेद हे नवे अंश होण्याकरितां परस्पर गुणावे आणि समछेद होण्याकरितां सर्वछेद परस्पर गुणावे

जेव्हां सर्व छेद कोणत्याही एक अंकानें अथवा बीजानें भागले जातात तेव्हां ते भागून संक्षेप करावा नंतर पूर्वप्रमाणें करावें आणि या प्रकरणीं अपूर्णांक गणितांत जा रीती सांगितल्या आहेत त्या सर्व मनांत धरून करावें

उदाहरणें

(३६)

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{क्ष}$ यांस समछेद रूप दे
आतां $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{क्ष} = \frac{अ+ब}{क्ष+क्ष}$ आणि $\frac{बक्ष}{क्षक्ष}$ हें उत्तर

दुसरे $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{क्ष}$ यांस समछेद रूप दे
आतां $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{क्ष} = \frac{अ+ब}{क्ष+क्ष}$ आणि $\frac{बक्ष}{क्षक्ष}$ हें उत्तर

तिसरे $\frac{२अ}{क्ष}$ आणि $\frac{२ब}{क्ष}$ यांस समछेद रूप दे
उत्तर $\frac{४अक}{२कक्ष}$ आणि $\frac{२बक्ष}{२कक्ष}$

चवथें $\frac{२अ}{क्ष}$ आणि $\frac{२अ+२ब}{२क्ष}$ यांस समछेद रूप दे
उत्तर $\frac{४अक}{२कक्ष}$ आणि $\frac{२अब+२ब^२}{२कक्ष}$

पांचवें $\frac{५अ}{५क्ष}$ आणि $\frac{२ब}{२क्ष}$ यांस समछेद रूप दे
उत्तर $\frac{१०अक}{५कक्ष}$ आणि $\frac{१०बक्ष}{५कक्ष}$

साहावें $\frac{५}{६}$ आणि $\frac{२अ}{४}$ आणि $\frac{२ब}{४}$ यांस समछेद रूप दे
उत्तर $\frac{२०ब}{२४ब}$ आणि $\frac{१०अब}{२४ब}$

सातवें $\frac{२अ}{४}$ आणि $\frac{२अ+ब}{अ+ब}$ यांस समछेद रूप दे
आठवें

(३७)

आठवें $\frac{१६}{४अ}$ $\frac{२६}{१अ}$ आणि $\frac{३}{२अ}$ यांस समछेद रूप दे

चौथा प्रकार

अपूर्ण बीजाचे पदांचा दृढ भाजक काढावाचा

रीति

सोटे पद लाहान पदानें भागावें बाकी राहिल तो भाजक कल्पू-
न त्याणें पूर्व भाजकास भागावें या प्रमाणें बाकी • पूज्य पर्यंत करा-
वें शेवटील भाजक दृढ भाजक होय

टीप भाजक पदांमध्ये जीं अक्षरें आणि अंक साधारण अ-
सतील तीं परस्पर भागून रद करावीं नंतर दृढ भाजक काढावा

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अब+बे}{अके+बके}$ यांचा दृढ भाजक काढ

अब+बे) अके+ बके

अथवा अ+ब) अके+ बके(के

अके+ बके

※ ※

एथे अ+ब हा दृढ भाजक आहे हें उत्तर

इसरे

(३८)

दुसरे $\frac{अ-अब}{अ+२अब+ब}$ यांचा दृढ भाजक काढ
 $अ+२अब+ब$ अ- अब (अ

$\frac{अ+२अब+अब}{अ+२अब+ब}$

$*-२अब-२अब$ अ+२अब+ब

अथवा अ + ब) अ+२अब+ब (अ+ब

$\frac{अ+अब}{अ+अब}$

$*अब+ब$

$\frac{अब+ब}{अब+ब}$

एथे अ+ब हा दृढ भाजक आहे हे उत्तर

तिसरे $\frac{अ-४}{अब+२ब}$ यांचा दृढ भाजक काढ

उत्तर अ-२

चवथे $\frac{अ-अब}{अ-ब}$ यांचा दृढ भाजक काढ

उत्तर अ-ब

पांचवे $\frac{अस+२अक्ष+२अक्ष+क्ष}{५अ+१०अक्ष+५अक्ष}$ यांचा दृढ भाजक काढ

पांचवा प्रकार

अपूर्ण बीजाचा संक्षेप करायाचा

रीति

पूर्व प्रकारा प्रमाणे पदांचा दृढ भाजक काढून त्यानें सर्व पदे भागावीं भागाकार येतील तो संक्षेप जाला

उदाहरणे

(३९)

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अब + ब^2}{अक + बक}$ यांचा संक्षेप कर

अब + ब^२ अक + बक

अथवा अ + ब अक + बक (क)

$\frac{अक + बक}{अक + बक}$

एथे अ + ब हा दृढ भाजक आहे याजकरितां

अ + ब) $\frac{अब + ब^2}{अक + बक} = \frac{ब}{क}$ हा संक्षेप जाला हें उत्तर

दुसरे $\frac{क - बक}{क + २बक + ब^2}$ यांचा संक्षेप कर

क + २बक + ब^२ क - बक (क)

क + २बक + ब^२

※ - २बक - २बक

क + ब) क + २बक + ब^२ (क + ब

$\frac{क + बक}{क + बक}$

※ - बक + ब^२

बक + ब^२

※ ※

एथे क + ब हा दृढ भाजक आहे याज करितां

क + ब) $\frac{क - बक}{क + २बक + ब^2} = \frac{क - बक}{क + ब}$ हा संक्षेप जाला

तिसरे

(४०)

तिसरें $\frac{क-ब}{क-बक}$ यांचा संक्षेप कर

उत्तर $\frac{क+बक+ब^2}{क+बक}$

चवथें $\frac{अ-ब}{अ-ब}$ यांचा संक्षेप कर

उत्तर $\frac{१}{अ+ब}$

पांचवें $\frac{अ-ब}{अ-१अब+१अब-ब^2}$ यांचा संक्षेप कर

साहावें $\frac{१अ+६अक+१अक^2}{अक+१अक+१अक+क}$ यांचा संक्षेप कर

सातवें $\frac{अ-अब}{अ+२अब+ब^2}$ यांचा संक्षेप कर

साहावा प्रकार

अपूर्ण बीजाची मिळवणी करायाचा

रीति

अपूर्ण बीज पदांचे छेद सम असल्यास सर्व अंशांची बेरीज घ्यावी आणि त्या बेरीजेखाली समछेद लिहावे सणजे मिळवणी जाली ते छेद सम नसल्यास समछेद करून नंतर वर सांगितल्या प्रमाणे करावे

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अ}{१}$ आणि $\frac{अ}{४}$ यांची मिळवणी काय होत्ये एथे $\frac{अ}{१} + \frac{अ}{४} = \frac{४अ}{४} + \frac{१अ}{४} = \frac{५अ}{४}$ ही बेरीज हें उत्तर

दुसरें

(४१)

दुसरे $\frac{अ}{ब} + \frac{ब}{क}$ आणि $\frac{क}{ड}$ यांची मिळवणी काय होत्ये
एथे $\frac{अ}{ब} + \frac{ब}{क} + \frac{क}{ड} = \frac{अकड}{बकड} + \frac{बेड}{बकड} + \frac{बके}{बकड} = \frac{अकड + बेड + बके}{बकड}$ ही बे-
रीज आली हें उत्तर

तिसरे * $अ - \frac{१क^२}{ब}$ आणि $ब + \frac{२अक}{क}$ यांची मिळवणी काय होत्ये
एथे $अ - \frac{१क^२}{ब} + ब + \frac{२अक}{क} = अ - \frac{१क^२}{बक} + ब + \frac{२अक}{बक} =$
 $अ + ब + \frac{२अक - १क^२}{बक}$ ही बेरीज हें उत्तर

चवथें $\frac{४क}{१अ}$ आणि $\frac{२क}{२ब}$ यांची मिळवणी काय होत्ये
उत्तर $\frac{२०बक + ६अक}{१५अब}$

पांचवें $\frac{अ}{३}$ आणि $\frac{अ}{४}$ यांची मिळवणी काय होत्ये
उत्तर $\frac{४७अ}{६०}$

साहावें $\frac{२अ-३}{४}$ आणि $\frac{५अ}{६}$ यांची मिळवणी काय होत्ये
उत्तर $\frac{१७अ-६}{६}$

सातवें $२अ + \frac{अ+३}{५}$ आणि $४अ + \frac{२अ-५}{४}$ यांची मि. होत्ये
उत्तर $६अ + \frac{१४अ-१३}{२०}$

आठवें $६अ$ आणि $\frac{१अ}{२ब}$ आणि $\frac{अ+५}{३ब}$ यांची मि. काय होत्ये

नववें $\frac{५अ}{४}$ आणि $\frac{५अ}{५}$ आणि $\frac{१अ+३}{७}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

* भागातुबंध पूर्णबीजाची मिळवणी करित्ये समयीं ही रीति मर्यादून उत्तम आहे किं
अपूर्ण बीजाचे मास अवयव समछेद करून मिळवणी करावी नंतर पूर्णबीजाची मिळवणी क-
रून त्या अपूर्ण बीज बेरिजेस जोडून लिहावी

दाहावें

(४२)

दाहावे २अ $\frac{१अ}{८}$ आणि ३+ $\frac{७अ}{८}$ यांची मिळवणी काय होले

अकरावे ८अ+ $\frac{१अ}{४}$ आणि २अ- $\frac{५अ}{८}$ यांची मिळवणी काय होले

सातवा प्रकार

एक अपूर्ण बीज पदास दुसर्यांतून वजा करायाचा

रीति

अपूर्ण बीज समछेद नसल्यास मिळवणी प्रमाणे त्यास सम-
छेद करावे मंतर अंशांची वजा बाकी करून त्याबाकी खालीं समछे-
द लिहावे सणजे वजा बाकी जाली

उदाहरणे

प्रथम $\frac{१अ}{८}$ आणि $\frac{४अ}{९}$ यांची वजाबाकी कर

एथे $\frac{१अ}{८} - \frac{४अ}{९} = \frac{२१अ}{७२} - \frac{१६अ}{७२} = \frac{५अ}{७२}$ बाकी हें उत्तर

दुसरे $\frac{१अ-४व}{८क}$ आणि $\frac{१अ-४व}{९क}$ यांची वजा बाकी कर

एथे $\frac{१अ-४व}{८क} - \frac{१अ-४व}{९क} = \frac{९अव-१२व}{७२क} - \frac{८अव-१२व}{७२क} = \frac{१अव-१२व-१२अक+१६वक}{७२क}$ हें उत्तर

तिसरे $\frac{१अ}{८}$ आणि $\frac{४अ}{९}$ यांची वजाबाकी कर

चवथे

(४३)

चवथें $\frac{६अ}{४}$ आणि $\frac{२अ}{४}$ यांची वजाबाकी कर

पांचवें $\frac{५अ}{४}$ आणि $\frac{२अ}{४}$ यांची वजाबाकी कर

साहावें $\frac{१अ+क}{४}$ यांतून $\frac{२अ}{४}$ हे वजाकर

सातवें $\frac{५अ+८}{५}$ यांतून $\frac{२अ+६}{५}$ हे वजाकर

आठवें $४अ+ \frac{२अ}{४}$ यांतून $२अ- \frac{अ-१ब}{४}$ हे वजाकर

आठवा प्रकार

अपूर्ण बीज पदे परस्पर गुणायाचा

रिति

गुणाकाराचे अंशांकरितां सर्व अंश परस्पर गुणावे आणि छेदां-
करितां सर्व छेद परस्पर गुणावे *

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अ}{४}$ आणि $\frac{२अ}{४}$ हे परस्पर गुण

आतां $\frac{अ \times २अ}{४ \times ४} = \frac{२अ^२}{१६} = \frac{अ^२}{८}$ हा गुणाकार हें उत्तर

* १ जेव्हां एक अपूर्ण बीज पदाचे अंश आणि दुसर्वा अपूर्ण बीज पदाचे छेद यांचा दृढभा-
जक निघेल तेव्हां त्याने संक्षेप करावा

२ जेव्हां अपूर्ण बीजासंगातीं पूर्णबीज गुणायाचे आहे तेव्हां गुणाकार याप्रमाणें हो-
तो पूर्णबीजाचें अंश गुणावे अथवा छेद भागाचे आणि जर पूर्णबीज आणि छेद एकच स-
कलप आहेत तर अंश सिद्धच गुणाकार आहे

दुसरें

(४४)

दुसरें $\frac{अ}{२}$ $\frac{१अ}{४}$ आणि $\frac{१अ}{४}$ हे परस्पर गुण

आतां $\frac{अ \times १अ \times १अ}{२ \times ४ \times ४} = \frac{१अ^३}{८४} = \frac{१अ^३}{८४}$ हा गुणाकार

तिसरें $\frac{२अ}{४}$ आणि $\frac{अ+ब}{२अ+क}$ हे परस्पर गुण

आतां $\frac{२अ \times (अ+ब)}{४ \times (२अ+क)} = \frac{२अ^२+२अब}{४अ+४क}$ गुणाकार हें उत्तर

चवथें $\frac{४अ}{२}$ आणि $\frac{४अ}{४क}$ हे परस्पर गुण

पांचवें $\frac{१अ}{४}$ आणि $\frac{४ब^२}{१अ}$ हे परस्पर गुण

साहावें $\frac{१अ}{४}$ आणि $\frac{८अक}{४}$ आणि $\frac{४अब}{१क}$ हे परस्पर गुण

सातवें $१अ + \frac{अब}{२क}$ आणि $\frac{१अ}{४}$ हे परस्पर गुण

आठवें $\frac{२अ-२ब}{१क}$ आणि $\frac{४अ+२ब}{अ+ब}$ हे परस्पर गुण

नववें $१अ$ आणि $\frac{२अ+१}{अ}$ आणि $\frac{२अ-१}{२अ+ब}$ हे परस्पर गुण

दाहावें $अ + \frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष^२}{४अ}$ यांस $क्ष - \frac{अ}{२क्ष} + \frac{अ^२}{४क्ष}$ याणीं गुण

नववा प्रकार

एक अपूर्ण बीज पदास दुसर्याने भागायाचा

रीति

(४५)

रीति

एकाचे अंश दुसऱ्याचे अंशांनीं भागावे आणि छेद छेदांनीं भागावे जर निःशेष भागिले जातील तसें नहोईल तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदल करून गुणाकार रीतीनें भाज्य भाजक गुणावे*

उदाहरणे

प्रथम $\frac{३५}{४}$ यांस $\frac{१५}{८}$ याणीं भाग

एथे $\frac{३५}{४} \div \frac{१५}{८} = \frac{३५}{४} \times \frac{८}{१५} = \frac{८५}{१२५} = \frac{२}{३}$ भागाकार हें उत्तर

दुसरे $\frac{१५}{२५}$ यांस $\frac{५५}{४३}$ याणीं भाग

एथे $\frac{१५}{२५} \div \frac{५५}{४३} = \frac{१५}{२५} \times \frac{४३}{५५} = \frac{१२५३}{१०५५}$ हा भागाकार हें उत्तर

तिसरे $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब}$ यांस $\frac{३अ+२ब}{४अ+ब}$ याणीं भाग

एथे $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब} \times \frac{४अ+ब}{३अ+२ब} = \frac{८अ^२+६अब+ब^२}{९अ^२-४ब^२}$ हा भागाकार हें उत्तर

चवथें $\frac{३अ^२}{अ+ब}$ यांस $\frac{अ}{अ+ब}$ याणीं भाग

एथे $\frac{३अ^२}{अ+ब} \times \frac{अ}{अ+ब} = \frac{३अ^३}{(अ+ब)^२} = \frac{३अ}{अ-अब+ब^२}$ भागाकार हें उत्तर

पांचवें $\frac{३५}{४}$ यांस $\frac{१५}{१२}$ याणीं भाग

* १. जर अपूर्णबीज भाज्य समछेद आहे तर भागाकाराचे अंशांकरिता त्याचे अंश घ्यावे आणि भागाकाराचे छेदांकरिता भाजकाचे अंश घ्यावे

२. जेव्हा अपूर्णबीज कोणत्याही पदार्थे भागायाचे आहे तेव्हा त्या पदार्थे अंश भागिले अथवा छेद गुणिले या दोहोंकडूनही गुणाकार बरोबरच होतो

३. जेव्हा दोनही अंशांची अथवा दोनही छेदांचा रटभाजक मिळतो तेव्हा त्याणे संक्षेप करून नंतर पूर्वेप्रकारे भागावे

साहायें

(४६)

साहाय्ये $\frac{४९}{५}$ यांस ३९ याणीं भाग

सातवे $\frac{४९+१}{५}$ यांस $\frac{४९}{५}$ याणीं भाग

आठवे $\frac{४९}{२९-१}$ यांस $\frac{९}{५}$ याणीं भाग

नववे $\frac{४९}{५}$ यांस $\frac{१०}{५}$ याणीं भाग

दाहाये $\frac{२अ-४}{४कड}$ यांस $\frac{५अक}{५ड}$ याणीं भाग

अकरावे $\frac{५अ-५ब}{२अ-४अब+२ब}$ यांस $\frac{५अ+५अब}{४अ-४ब}$ याणीं भाग

बीज वर्ग घनादि

बीज वर्ग घनादि स्तणजे सांगीतले मूळ बीज फिरून फिरून त्या-
च मूळबीजाने गुणून वाढविले बीज जसे कोणत्याही सांगीतल्ये पदा-
चा वर्ग काय होतो तो शोधायाचा तसाच घन चतुर्थात इत्यादिक याची
रिति पुढे सांगतो

* सांगीतल्ये मूळास अथवा पदास त्याणेच प्रकाशक संख्येत ए-

* एक अथवा अनेक पदे आहेत त्यांचे गुणाकाराचे वर्गादिक त्या पदांचे वेगळ्या त्या-
त्या वर्गादिकाचे गुणाकार करावे आहे जसा या तीन पदांचे गुणाकाराचा वर्ग $३ \times ५ \times ७ = १०५$
आणि $३ \times ५ \times ७ = १०५$ $२५ \times ४९ = १२२५$

आणि

क कर्मा वेळा पर्यंत पुनः पुनः गुणाचें शोधील गुणांकार इच्छिलें वर्ग घनादिक होईल अथवा सांगीतल्ये मूळांत किंवा पदांत अक्षरचिन्हेच असलीं तर या रीतीनें कराचें त्या अक्षरचिन्हाचा मूळप्रकाशक इच्छिल्ये वर्ग घनादिप्रकाशकानें गुणून जो गुणाकार येईल तें इच्छिलें वर्ग घनादिक होईल आणि वेळाप्रकाशकही एकमूळच होय यास्तव त्याचेंही वर्गादि प्रकाशका प्रमाणें वर्गादिक कराचें

टीप जेव्हां सांगीतल्ये मूळाचें कार्य प्रकाशक चिन्ह (+) धन आहे तेव्हां त्या पासून जें वर्गादिक होईल तें सर्व धन होईल परंतु जेव्हां त्या सांगीतल्ये मूळाचें कार्य प्रकाशक चिन्ह (-) ऋण आहे तेव्हां त्या पासून जें वर्ग घनादिक करायाचें तें वर्गादि प्रकाशक सम असेल त्या स्थळीं धन होईल आणि तो विषम असेल त्या स्थळीं ऋण होईल हें सर्व गुणाकार रीतीनें जाणावें

आणि अपूर्ण बीजाचें कोणतेंही वर्गादिक त्या अपूर्ण बीजाचे अंशाचें वर्गादिक छेदाचे तशेंच वर्गादिकानें भागिलें याचें बरोबर आहे

जसा या अपूर्ण बीजाचा घन $\left(\frac{२अ}{अ}\right)^३ = २ = ८$

आणि $\frac{२अ}{अ} = २ = ८$

आणि एकाच पदाचें वर्गादि अथवा वर्गमूलादि परस्पर गुणायानें आहे तर त्या गुण्य गुणकांचे वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज घेऊन त्या पदावर प्रकाशक स्थळीं लिहावी जसें $अ^२ + २ = अ^२$ $अ^३ \times अ^२ = अ^५$ $अ^३ + ३ = अ^३$

तसेंच एकाच पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूलादिक परस्पर भागायाचें आहे तर त्या भाज्य भाजकांचे वर्गादिप्रकाशकांची वजाबाकी करून त्या पदावर प्रकाशक स्थळीं लिहावी जसें $अ^३ \div अ^२ = अ^१$ $अ^३ - ३ = अ^३$ $अ^३ \div अ^३ = अ^०$ $अ^३ - ३ = अ^३$

उदाहरणें

(४८)

उदाहरणें

अ = हैं एक मूळ आहे
 अं = हा त्या मूळाचा वर्ग होय
 अँ = हा त्या मूळाचा घन होय
 अँ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात
 अँ = हा त्या मूळाचा पंचघात
 इत्यादि

-२अ = हैं एक मूळ आहे
 +४अं = हा त्या मूळाचा वर्ग होय
 -८अँ = हा त्या मूळाचा घन होय
 +१६अँ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात
 -३२अँ = हा त्या मूळाचा पंचघात
 इत्यादि

$-\frac{२अक्ष^२}{१५व} =$ हैं एक मूळ आहे
 $+\frac{४अक्ष^३}{१५व} =$ हा त्या मूळाचा वर्ग होय
 $-\frac{८अक्ष^४}{१५व} =$ हा त्या मूळाचा घन होय
 $+\frac{१६अक्ष^५}{१५व} =$ हा त्या मूळाचा चतुर्घात
 इत्यादि

अ = हैं एक मूळ आहे
 अं = हा त्या मूळाचा वर्ग होय
 अँ = हा त्या मूळाचा घन होय
 अँ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात होय
 अँ = हा त्या मूळाचा पंचघात होय
 इत्यादि

-३अबं = हैं एक मूळ आहे
 +९अबं = हा त्या मूळाचा वर्ग होय
 -२७अबं = हा त्या मूळाचा घन होय
 +८१अबं = हा त्या मूळाचा चतुर्घात
 -२४३अबं = हा त्या मूळाचा पंचघात
 इत्यादि

$\frac{अ}{२व} =$ हैं एक मूळ आहे
 $\frac{अ^२}{४व} =$ हा त्या मूळाचा वर्ग होय
 $\frac{अ^३}{८व} =$ हा त्या मूळाचा घन होय
 $\frac{अ^४}{१६व} =$ हा त्या मूळाचा चतुर्घात
 इत्यादि

(४९)

क्ष-अ= हे एक मूल आहे

क्ष-अ

क्ष^१-अक्ष

-अक्ष+अ^१

क्ष^१-२अक्ष+अ^१= हा त्या मूळाचा वर्ग होय

क्ष-अ

क्ष^१-२अक्ष^१+अ^१क्ष

-अक्ष^१+२अ^१क्ष-अ^१

क्ष^१-३अक्ष^१+३अ^१क्ष-अ^१= हा त्या मूळाचा घन होय

क्ष+अ= हे एक मूल आहे

क्ष+अ

क्ष^१+अक्ष

+अक्ष+अ^१

क्ष^१+२अक्ष+अ^१= हा त्या मूळाचा वर्ग होय

क्ष+अ

क्ष^१+२अक्ष^१+अ^१क्ष

+अक्ष^१+२अ^१क्ष+अ^१

क्ष^१+३अक्ष^१+३अ^१क्ष+अ^१= हा त्या मूळाचा घन होय

हीं दोन उदाहरणे क्ष-अ आणि क्ष+अ या दोन मूळांचे वर्ग आणि घन दाखविताने

दुसरीं

(५०)

दुसरी उदाहरणे

प्रथम ३ अ^३ यांचा घन काय होतो

उत्तर २७ अ^६

दुसरे २ अ^३ब यांचा चतुर्घात काय होतो

तिसरे -४ अ^३बे यांचा घन काय होतो

चवथे - $\frac{अ^३क्ष}{२५}$ यांचा चतुर्घात काय होतो

पांचवे अ-२क्ष यांचा पंचघात काय होतो

साहाये २ अ^३ यांचा षड्घात काय होतो

सर ऐसाक न्युटन यांची द्वियुक्पदांचे वर्गादिक करायाची
रीति*

१ वेळाप्रकाशका वांचून पदे करायाची त्यांचा आरंभ द्वियुक् पदाचे
प्रथम पदापासून होतो आणि त्यास वर्गादिप्रकाशक असावा तो द्वियु-
क्पदाचा इत्थिल्ये वर्गादीचा प्रकाशक आहे तोच होय आणि त्याचे पु-

ढील

* या रीतीचे सामान्यतः हे रूप आहे (न) लणजे कोणतीही संख्या (अ+क्ष)^न अ^न+न
अ^{न-१}क्ष+न. $\frac{अ^{न-१}}{१}$ अ^{न-२}क्ष+न. $\frac{अ^{न-२}}{२}$ अ^{न-३}क्ष इत्यादि

(अ-१)

टील पदांस वर्गादिप्रकाशक असावा तो हाच प्रतिपदी अनुक्रमें एक एक उणाकरून होतो आणि द्वियुक्पदाचे राहिल्ये दुसरें पदास वर्गादि प्रकाशक असावा तो शून्यापासून ० . १ . २ . ३ या अनुक्रमें प्रतिपदीं एक एक वाढवून होतो तो इच्छित्ये वर्गादि प्रकाशका पर्यंत स्रणजे इच्छित्ये वर्गादिकाचें प्रथम पद मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ प्रथम पद होईल तें इच्छित्ये वर्गादिप्रकाशकानें आणि या श्रेढीचें शेवटील पद त्या मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ दुसरें पद होईल तें इच्छित्ये वर्गादिप्रकाशकानें परंतु दुसरीं अथवा मध्यपदे मूळ द्वियुक्पदाचे दोन पदांचे गुणाकार होतील अशा रीतीने किं मूळ द्वियुक्पदाचे पहिल्ये पदास प्रतिपदीं वर्गादि प्रकाशक एक एक उणा आणि दुसरें पदास वर्गादि प्रकाशक प्रतिपदीं एक एक अधिक होत जाईल

वेळा

(अ-१)^१=अ-न.अ^{१-१} १+न.अ^{१-२} अ^{१-२} १+न.अ^{१-३} अ^{१-३} १+न.अ^{१-४} अ^{१-४} इत्यादि

टीप प्रत्येक पवरांमध्ये वेळाप्रकाशकांची बेरीज (२) या सरण्येचे प्रत्येक पवरा बराबर आहे जसें १+१=२ हे मूळ अथवा प्रथमपवर १+२+१=४=२^२ हे वर्गस्थळ अथवा दुसरा पवर १+३+३+१=८=२^३ हा घन अथवा तिसरा पवर या प्रमाणें पुढेही जाणावे

अ+ब	अ ^२ +२अब+ब ^२	अ ^३ +३अ ^२ ब+३अब ^२ +ब ^३
१+१=२	१+२+१=४	१+३+३+१=८
	अ ^४ +४अ ^३ ब+६अ ^२ ब ^२ +४अब ^३ +ब ^४	
	१+४+६+४+१=१६	

पवर स्रणजे घात मूळ स्रणजे एकपवर अथवा एकघात वर्गस्रणजे द्विघात घन स्रणजे त्रिघात याप्रमाणें पुढेही जाणावें

२ वेळा प्रकाशक काढायाची श्रेढीचे प्रथम पदाचा वेळा प्रकाशक १ आहे दुसऱ्ये पदाचा वेळा प्रकाशक तो आहे किं जो इच्छित्ये वर्गादिकाचा प्रकाशक आहे तिसऱ्ये पदाचा वेळा प्रकाशक याप्रमाणे निघतो किं दुसऱ्ये पदाचा वेळा प्रकाशक आणि त्याच दुसऱ्ये पदांतील पहिल्ये अक्षराचा वर्गादि प्रकाशक हे दोन परस्पर गुणून तो गुणाकार दोहोनीं भागावा भागाकार येईल तो त्या तिसऱ्ये पदाचा वेळा प्रकाशक होईल आणि या प्रमाणे पुढेही स्तणजे शेवटीं वेळा प्रकाशक निघाला आहे तो त्याच पदाचे प्रथम अक्षराचे वर्गादि प्रकाशकाने गुणून तो गुणाकार तेच पद कित्यावे असेल तितक्या संख्येनें भागून जो भागाकार येईल तो त्याच पदा पुढील जवळचे पदाचा वेळा प्रकाशक होईल या रीतीनें एका पुढे एक अशा सर्व पदांचा वेळा प्रकाशक निघेल

टीप श्रेढीतील सर्व पदांची संख्या इच्छित्ये वर्गादि प्रकाशक संख्येहून एकाने अधिक होईल आणि मूळ द्वियुक्पदांतील दोनही पदें (+) धन आहेत तर श्रेढीचीं सर्व पदें (+) धन होतील परंतु जर त्या मूळ द्वियुक्पदांत दुसरे पद (-) ऋण आहे तर श्रेढीचीं विषम पदें (+) धन होतील आणि सम पदें (-) ऋण होतील याच कारणास्तव तीं सर्व पदें (+) धन (-) ऋण (+) धन (-) ऋण अशा अनुक्रमे होतील पुनः प्रतिपदीं त्या त्या पदांतील अक्षरांचे वर्गादि प्रकाशकांची बेरीज इच्छित्ये वर्गादिकाचे प्रकाशका बरोबर आहे आणि श्रेढीचे मध्यापासून दोहोंकडील स्थळीं वर्गादि प्रकाशक बराबर आहेत परंतु अक्षरांचा मात्र बदल आहे आणि

(५३)

आणि मध्यापासून दोहोंकडील बराबर स्थळीं वेळा प्रकाशकही बराबर आहेत तसें आदीपासून मध्यपर्यंत वेळा प्रकाशक जितक्या जितक्या अंतरानें वाढत गेला आहे तसा तितक्या तितक्या अंतरानें वेळा प्रकाशक मध्यापासून अंत पर्यंत उणा होत जातो

—

उदाहरणें

प्रथम अ+क्ष याचा पंचघात करायाचा

प्रथम रीतीनें वेळा प्रकाशकावांचून पदे करावीं

अ^० अ^१क्ष अ^२क्ष अ^३क्ष अ^४क्ष अ^५क्ष

आणि दुसरें रीतीनें वेळा प्रकाशक काढावे

१	५	$\frac{५ \times ४}{२}$	$\frac{१० \times ३}{३}$	$\frac{१० \times २}{४}$	$\frac{५ \times १}{५}$
१	५	१०	१०	५	१

याज करितां मूळद्वियुगणाचा पंचघात हें सर्व जुळून आहे

अ^०+५ अ^१क्ष+१० अ^२क्ष+१० अ^३क्ष+५ अ^४क्ष+अ^५

परंतु हें उत्तम आहे किं वेळा प्रकाशक आणि वर्गादि प्रकाशक हे तपशीलावांचून जुळून सर्व पदे एके ओळींत लिहावीं जसें दुसरें उदाहरण पुढें लिहितो

दुसरें अ-क्ष याचा षड्घात करायाचा

अ^०-६ अ^१क्ष+१५ अ^२क्ष-२० अ^३क्ष+१५ अ^४क्ष-६ अ^५क्ष+अ^६

तिसरें अ-क्ष याचा चतुर्घात करायाचा

अ^०-४ अ^१क्ष+६ अ^२क्ष-४ अ^३क्ष+अ^४

आणि

आणि या रीतीने कोणतेही वर्गादिक सुरवातेने एके ओळीत लिहिता येईल

बीज वर्गादि मूळ

बीज वर्गादि मूळ स्तणजे वर्गादिकाची उलट सांगीतल्ये पदापासून त्याचे वर्गादि मूळ काढायाचे ते पद एकाकी अथवा संयुक्त असेल

प्रथम प्रकार

एकाकी पदाचे मूळ काढायाचा

अक गणित रीतीने वेळा प्रकाशकाचे मूळ काढावे आणि अक्षर चिन्हाचा वर्गादि प्रकाशक इच्छित्ये वर्गादि मूळ प्रकाशकाने भागाचा स्तणजे तो भागाकार अक्षरचिन्हाचे मूळ होईल नंतर हें मूळ पूर्व वेळा प्रकाशक मूळाशी जोडिले असता इच्छिते वर्गादि मूळ होईल*

उदाहरण

* धन (+) पदाचे कोणतेही सम मूळ (+) धन अथवा (-) कून असेल स्तणजे जसे + अ काचे वर्गमूळ + अ अथवा - अ असेल कारण $+अ \times +अ = +अ$ आणि $-अ \times -अ = +अ$ आहे परंतु कोणत्याही पदाचे विषममूळ त्या पदाचे चिन्हाप्रमाणे आहे जसे + अ याचे धनमूळ + अ आहे आणि - अ याचे धनमूळ - अ आहे कारण $+अ \times +अ = +अ$ आणि $-अ \times -अ = +अ$ आहे कोणत्याही पदाचे सममूळ कून होत नाही कारण $+अ \times +अ$ अथवा $-अ \times -अ$ हे दोन्ही - अ होण्यास परम अशक्य

कोणत्याही गुणाकाराचे मूळ त्या गुण्य गुणाकाचे वेगळाल्ये मूळांचे गुणाकाराबरोबर आहे आणि अपूर्ण बीजाचे मूळाची इच्छा असेल तर त्या अंश छेदाची वेगळाली मूळे काढावी स्तणजे ती मूळे त्या अपूर्ण बीजाचे इच्छिते मूळ होईल

(५५)

उदाहरणें

प्रथम ४ अं यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर २ अ

दुसरे ८ अं यांचें घनमूळ काढ

उत्तर २ अ

तिसरे $\frac{५अब^३}{९क}$ यांचें वर्गमूळ काढ

$$\sqrt{\frac{५अब^३}{९क}} = \frac{अब}{३क} \sqrt{५} \text{ हे उत्तर}$$

चवथें $\frac{१६अब^३}{२७क}$ यांचें घनमूळ काढ

उत्तर - $\frac{२अब}{३क} \sqrt[३]{२अ}$

पाचवें २ अब^३ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर अब^३/२

साहावें - ६४ अब^३ यांचें घनमूळ काढ

उत्तर - ४ अब^३

सातवें $\frac{८अब^३}{९क}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $\frac{२अब}{३क} \sqrt{\frac{२}{९क}}$

आठवें ८१ अब^३ यांचें चतुर्थातमूळ काढ

उत्तर ३ अब^३/४

नववें - १२ अब^३ यांचें पचघातमूळ काढ

उत्तर - २ अब^३/५

दुसरा

(५६)

दुसरा प्रकार

संयुक्त पदाचें वर्गमूळ काढायाचा

याची रीति अंकगणिता प्रमाणें आहे स्मरणजे

१ जा पदाचें घातादिक अधिक असेल तें पद प्रथम लिहून पुढें अनुक्रमें उतरतीं अशा रीतीनें सर्व पदे लिहावीं नंतर प्रथम पदाचें मूळ भागाकार स्थळीं लिहावें

२ या मूळाचा वर्ग प्रथमपदारवालीं लिहून त्यांतून वजा करावा नंतर नव्ये भाज्याकरितां बाकी जवळ वरचीं दुसरीं दोन पदे घ्यावीं आणि नव्ये भाजकाकरितां मूळाची दुपट करून भाजकस्थळीं लिहावी

३ तो भाज्य भाजकानें भागावा आणि जें येईल तें भागाकार स्थळीं लिहावें आणि भाजकासही जोडावें

४ आतां वाढविला भाजक भागाकार स्थळीं जें आतां नवें लिहिलें त्याणें गुणून गुणाकार भाज्यारवालीं लिहावा आणि त्यांतून वजा करावा याप्रमाणें अंक गणित रीतीनें करित जावें

उदाहरणें

प्रथम अ-४अब+६अबे-४अबे+ब यांचें वर्गमूळ काढ

अ-४अब+६अबे-४अबे+ब (अ-२अब+ब) हें वर्गमूळ हें उत्तर

$$\begin{array}{r} \text{अ} \\ २\text{अ}-२\text{अब} \\ \hline -४\text{अब}+६\text{अबे} \\ \hline -४\text{अबे}+४\text{अबे} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} २\text{अ}-४\text{अब}+ब) * + २\text{अबे}-४\text{अबे}+ब \\ \hline + २\text{अबे}-४\text{अबे}+ब \\ \hline * * * \end{array}$$

उत्तरें

(५७)

दुसरें अ+४ अवे+१० अवे+१२ अवे+९ वें यांचें वर्गमूल

काढ

अ+४ अवे+१० अवे+१२ अवे+९ वें (अ+२अव+३ वें वर्गमूल

अ

हें उत्तर

(अ+२अव) +४ अवे+१० अवे
+४ अवे+४ अवे

(अ+४अव+३ वें) * +६ अवे+१२ अवे+९ वें
+६ अवे+१२ अवे+९ वें
* * *

तिसरें अ+४ अ+६ अ+४अ+१ यांचें वर्गमूल काढ

उत्तर अ+२अ+१

चवथें अ-२ अ+२ अ-अ+३ यांचें वर्गमूल काढ

उत्तर अ-अ+३

पांचवें अ-अव यांचें वर्गमूल काढ

उत्तर अ- $\frac{१}{२}$ - $\frac{१}{२}$ अ- $\frac{१}{२}$ अ इत्यादि

तिसरा प्रकार

कोणत्याही वर्गादीचें मूल काढायाचा

याची रीति अंकगणिताप्रमाणेंच आहे. सगळे प्रथम पदाचें सांगितलें मूल काढून तें भागाकार स्थळीं लिहावें आणि त्या मूळाचें वर्गादिक करून त्या प्रथम पदांतून वजा करावें. नंतर नव्ये भाज्या करितां वरचें दुसरें पद खालीं घ्यावें आणि नव्ये भाजकाकरितां तें काढिलें

ठिलें

(५८)

टिलें मूळ सांगीतल्ये वर्गादि घातांत एक घात कमी पर्यंत वाढवून त्यास सांगीतल्ये वर्गादि प्रकाशकानें गुणून भाजक स्थळीं लिहावें आणि या नव्या भाजकानें तो नवा भाज्य भागितां जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें नंतर भागाकार स्थळींचें तें सर्व मूळ सांगीतला वर्गादि घात पर्यंत वाढवून सांगीतल्ये सर्व वर्गादींतून वजा करावें नंतर बाकीचें प्रथम पद प्रथम भाजकानें भागितां जें येईल तें भागाकार स्थळीं लिहावें आणि तें भागाकारस्थळींचें सगळें मूळ सांगीतल्ये वर्गादि घात पर्यंत वाढवून सांगीतल्ये वर्गादींतून वजा करावें या प्रमाणें शेवट पर्यंत करावें सगळे इच्छित वर्गादि मूळ मिळेल*

उदाहरणें

प्रथम अ-२ अ-ब+३ अ-ब-२ अ-ब+ब यांचें वर्गमूळ का-

ढ

* जेव्हां सांगीतला घात फार मोठा आहे तेव्हां या रीतीने तपशील करण्या मुळे फार अम पडतो असे कोणाचे मनांत येईल तर कोणे समयी संयुक्त पदांचें मूळ स्वल्पांत निघण्याची रीति ही आहे किं त्यांतील कित्येक सोडून पदे घेउन त्यांची सांगीतलीं मूळें काढावी आणि तीं मूळांचीं पदे सुमारानें (+) धन (-) रूपानिन्हांनीं जोडून लिहावीं नंतर हें मूळ सांगीतल्ये घाता पर्यंत वाढवावें नंतर तें जर सांगीतल्ये घाता बराबर जालें तर हेंच मूळ खरें आहे परंतु जर वाढविल्या घाताचीं सुमारानें पूर्ति केलेलीं चिन्हें सांगीतल्ये घाता बराबर नाहींत तर तीं पुनः तपासून तें मूळ आणि वाढविला घात या दोनही ठिकाणीं सांगीतल्ये घाता बराबर होतील अशी करावी

जसे पांचवें उदाहरणांत ३अ-२ब हें मूळ प्रथम आणि शेवट या दोन पदांचे मूळांचे वजाबाकी बराबर आहे आणि तिसरें उदाहरणांत अ-ब+क्ष हें संयुक्तमूळ प्रथम पदचें आणि शेवट या तीन पदांचे मूळांची बेरीज आहे आणि साहाय्ये उदाहरणांत संयुक्त मूळ प्रथम आणि शेवट या दोन पदां पासून निघते

(५९)

अ-२अब+३अबे-२अबे+बे(अ-अब+बे)हं वर्गमूल हं उत्तर

$$\begin{array}{r} \text{अ} \\ २\text{अ} \end{array}) - २\text{अब}$$

$$\text{अ-२अब+अबे} = (\text{अ-अब})$$

$$\begin{array}{r} २\text{अ} \\ २\text{अ} \end{array}) + २\text{अबे}$$

$$\text{अ-२अब+३अबे-२अबे+बे} = (\text{अ-अब+बे})$$

दुसरे अ-६अ+२१अ-४४अ+६३अ-५४अ+२७ यांचे

घनमूल काढ

अ-६अ+२१अ-४४अ+६३अ-५४अ+२७(अ-२अ+३ घनमूल
हं उत्तर

$$\begin{array}{r} \text{अ} \\ ३\text{अ} \end{array}) - ६\text{अ}$$

$$\text{अ-६अ+१२अ-८अ} = (\text{अ-२अ})$$

$$\begin{array}{r} ३\text{अ} \\ ३\text{अ} \end{array}) + ९\text{अ}$$

$$\begin{array}{r} \text{अ-६अ+२१अ-४४अ+६३अ-५४अ+२७} = (\text{अ-२अ+३}) \\ * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

तिसरे अ-२अब+२अक्ष+बे-२बक्ष+क्ष यांचे वर्गमूल काढ

उत्तर अ-ब+क्ष

चवथे अ-३अ+९अ-१३अ+९अ-१२अ+८ यांचे घन-

मूल काढ

उत्तर अ-अ+२

पांचवे ८१अ-२१६अबे+२१६अबे-९६अबे+९६बे यांचे

चे चतुर्घात मूळ काढ

उत्तर ३अ-२४

साहाचें अ-१० अ+४० अ-८० अ+८० अ-३२ यांचें पंच घा-
त मूळ काढ

उत्तर अ-२४

सातवें १-क्ष^२ याचें वर्गमूळ काढ

उत्तर

आठवें १-क्ष^२ याचें घनमूळ काढ

उत्तर

करणी

करणी स्त्रणजे जाचें मूळ बराबर पूर्ण येत नाहीं तें पद आणि
या करणीस अपूर्ण बीज वेळा प्रकाशकानें अथवा मूळ चिन्हांतें युक्त
लिहितात असें ३^२ अथवा $\sqrt{३}$ हीं दोनही ३ या संख्येचें वर्गमूळ
दारववितात आणि २^३ अथवा $\sqrt[३]{२}$ अथवा $\sqrt[३]{४}$ हीं २ या संख्ये-
चें वर्गाचें घनमूळ दारववितात स्त्रणजे २ हें पद कोणत्या घाता पर्यंत वा-
ढवावें हें पदाचें प्रकाशकांतील अंश दारववितात आणि वाढविल्या
पदाचे कोणत्या घाताचें मूळ काढावें तें छेद दारववितात

प्रथम

(६१)

प्रथम प्रकार

अखंड पदास करणीचें रूप द्यावयाचा

सांगीतल्ये पदास करणीचा प्रकाशक असेल तितका घातपर्यंत वाढवावे नंतर या नव्ये वाढविल्ये पदास सांगीतल्ये करणीचे मूळ चिन्हानें युक्त करावे

उदाहरणे

प्रथम ४ यांस वर्गमूळाचें रूप दे

$४^२ = ४ \times ४ = १६$ तर $\sqrt{१६}$ अथवा $१६^{\frac{१}{२}}$ हें उत्तर

दुसरे ३ अँ यास घनमूळाचें रूप दे

आतां $(३अँ)^३ = ३अँ \times ३अँ \times ३अँ = २७अँ$ तर $\sqrt[३]{२७अँ}$ अथवा $(२७अँ)^{\frac{१}{३}}$ हें उत्तर

तिसरे ६ यांस घनमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[३]{२१६}$ अथवा $(२१६)^{\frac{१}{३}}$

चवथें ३ अब यास वर्गमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt{९}$ अब अथवा $(९अँब)^{\frac{१}{२}}$

पांचवें २ यांस चतुर्घातमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[४]{१६}$ अथवा $(१६)^{\frac{१}{४}}$

साहावे ७ अँ यास पंचघातमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[५]{७अँ}$ अथवा $(७अँ)^{\frac{१}{५}}$

सातवें

(६२)

सातवें अ+क्ष यास वर्गमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt{अ+२अक्ष+क्ष}$ अथवा $(अ+२अक्ष+क्ष)^{\frac{१}{२}}$

आठवें अ-क्ष यास घनमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[३]{अ-३अक्ष+३अक्ष-क्ष}$ अथवा $(अ-३अक्ष+३अक्ष-क्ष)^{\frac{१}{३}}$

दुसरा प्रकार

पदांस सममूल प्रकाशक रूप द्यावयाचा

१ सांगीतल्ये पदांचे मूलप्रकाशकांस समछेद करावें नंतर तीं प्रत्येक पदे वेगळाल्ये अंशस्थळींचे संख्ये इतके घातपर्यंत वाढवावीं आणि त्या समछेदांचे अंशस्थळीं १ हा अंकलिहावा म्हणजे तीं पदे सममूल प्रकाशक जालीं

२ जर सांगीतलें सममूल प्रकाशक रूप द्यावयाचें आहे तर पदाच्या मूलप्रकाशक सांगीतल्ये प्रकाशकानें भागावा म्हणजे ते वेगळाले भागाकार त्या त्या पदांचे नवे मूल प्रकाशक होतील नंतर त्या त्या पदांस तेते नवे प्रकाशक लिहून त्यांजवर सांगीतला प्रकाशक लिहावा म्हणजे इष्टिलें बराबर पद निघेल

उदाहरणे

प्रथम ३ आणि ५ यांस सममूल प्रकाशक रूप दे
आतां

(६३)

• आतां ३ आणि ३ = ३ आणि ३
याजकरितां ३ आणि ३ = (३) आणि (३)

ह्मणजे २४३ आणि २५ सममूलप्रकाशक आले हें उत्तर

दुसरे अ आणि ब यांस ३ हा सममूलप्रकाशक कर
आतां $३ \div ३ = ३ \times ३ = ३$ हा प्रथम पदाचा मूलप्रकाशक
आणि $३ \div ३ = ३ \times ३ = ३$ हा दुसरे पदाचा मूलप्रकाशक
याजकरितां (अ) आणि (ब) अथवा $\sqrt{३}$ आणि $\sqrt{३}$ हीं इच्छित
पदे पूर्व पदांचे बराबर किमतीचीं आहेत

तिसरे ४ आणि ५ यांस ३ हा सममूलप्रकाशक कर
उत्तर (२५) आणि (२५)

चवथे अ आणि क्ष यांस ३ हा सममूलप्रकाशक कर
उत्तर (अ) आणि (क्ष)

पांचवे अ आणि क्ष यांस सममूलप्रकाशक रूप दे
उत्तर $\sqrt{३}$ आणि $\sqrt{क्ष}$

साहावे (अ+क्ष) आणि (अ-क्ष) यांस सममूलप्रका-
शक रूप दे

सातवे (अ+ब) आणि (अ-ब) यांस सममूलप्रका-
शक रूप दे

तिसरा

(६४)

तिसरा प्रकार

करणीस अतिसरळ रूप घावयाचा

रीति

सांगीतली संख्या अथवा पद याचे गुण्य गुणक रूपानें दोन अवयव करावे असे किं जांतील एक अवयव त्या संख्येचे आंत सांगीतल्ये मूळाचा मोठा घात होईल नंतर या मोठ्या घाताचें सांगीतलें मूळ काढून तें राहित्ये दुसरे अवयवाचे डाव्ये कडे लिहावें आणि या दोहोंचे मध्ये सांगीतल्ये मूळाचें चिन्ह करावें *

उदाहरणें

प्रथम $\sqrt{80}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

आतां $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ हें उत्तर

दुसरे $\sqrt[3]{1000}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

आतां $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{27 \times 8} = 3\sqrt[3]{8}$ हें उत्तर

प्रथम टीप जेव्हां कोणतीही संख्या अथवा पद करणीस मागे जोडिलें आहे तेव्हां तें पद त्या गुण्य गुणकरूप दोन अवयवांत जो पूर्ण घात असेल त्याचे मूळानीं गुणून तो गुणाकार पूर्वरीतीनें त्या दुसरे अवयवाशीं जोडून लिहावा

उदाहरणें

* जेव्हां सांगीतल्ये करणीत वर सांगीतल्ये गुण्य गुणकरूप दोन अवयवांतील एकही अवयव सांगीतल्ये मूळाचा बरोबर मोठा घात होत नाही तेव्हां ती करणी सरळ रूपच आहे जसे $\sqrt{12}$ यास यादून दुसरे सरळरूप होत नाही कारण गुण्य गुणकरूप दोन अवयव एक ५ आणि दुसरा ३ या दोहोंतून एकही इच्छित्ये मूळाचा पूर्ण घात सणजे एथे वर्ग होत नाही

(६५)

उदाहरणें

प्रथम $२\sqrt{३२}$ यांस अतिसरळ रूप दे

आतां $२\sqrt{३२} = २\sqrt{६४ \times २} = २ \times ४\sqrt{२} = ८\sqrt{२}$ हें उत्तर

दुसरें $५३\sqrt{२४}$ यांस अतिसरळ रूप दे

आतां $५३\sqrt{२४} = ५३\sqrt{८ \times ३} = ५ \times २३\sqrt{३} = १०३\sqrt{३}$ हें उत्तर

दुसरी टीप अपूर्ण करणीसही अतिसरळ रूप देतां येतें
या पुढील रीती करून

रीति

अंश आणि छेद हे कोणत्याही संख्येनें अथवा पदानें गुणावे
असे किं गुणिलेले छेद सांगीतल्ये मूळाचा पूर्ण घात होवील नंतर त्या
घाताचें सांगीतलें मूळ काढून त्याजवर अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा
आणि त्यास करणीचा राहिला दुसरा अवयव जोडून मध्ये पूर्व प्रमाणें
मूळ बिंदू करावें*

उदाहरणें

* करणीस अतिसरळ रूप दाखवाचा उपयोग असा आहे किं उत्तर दशांशांत सरळ
निघतें हें या प्रथम उदाहरणाचा विचार केला असतां कळेल पाहा यांत दिसतें कि $\sqrt{३} = १.७३२०५$
 $\sqrt{१४}$ या उदाहरणांत १४ चें वर्गमूळ काढायाचें अथवा वर्गमूळ कोणता तूत तयार घ्यावयाचें
आणि त्या मूळास ७ याणी भागायाचें इतकें नांव आहे आणि सरळ रूप न दिलें तर छेदाचीं अं-
श भागून भागाकाराचें मूळ काढावें लागतें अथवा अंश छेदाचीं वेगळालीं मूळे काढून अं-
शाचें मूळ छेदाचें मूळानें भागावें लागतें आणि या दोनही रीतींही मूळ काढण्यास अ-
तिसरळ रूप रीती पेक्षा या उदाहरणी बहुत श्रम पडतात आणि दुसरे उदाहरणांत
तर अतिसरळ रूप न दिल्यास बहुतच श्रम पडतात

(६६)

उदाहरणें

प्रथम $\sqrt{3}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

आतां $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3 \times 3}{3 \times 3}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = \frac{3}{3} = 1$ हे उत्तर

दुसरें $3\sqrt{3}$ यांस अतिसरळ रूप दे

आतां $3\sqrt{3} = 3\sqrt{\frac{3 \times 3}{3 \times 3}} = 3\sqrt{\frac{9}{9}} = 3 \times \frac{3}{3} = 3 \times 1 = 3$ हे उत्तर

तिसरें $\sqrt{32}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $4\sqrt{2}$

चवथें $\sqrt{320}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $8\sqrt{5}$

पांचवें $\sqrt{75}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $5\sqrt{3}$

साहावें $\sqrt{125}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $5\sqrt{5}$

सातवें $\sqrt{75}$ अंब यांस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $5\sqrt{3}$

आठवें $\sqrt{100}$ यांस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $10\sqrt{1}$

नववें $\sqrt{121}$ यांस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $11\sqrt{1}$

दाहावें

(६७)

दाहावें $\sqrt{\frac{४४}{३२}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{३२}{३२}\sqrt{३३}$

अकरावें $\sqrt{\frac{१२५}{३२}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{३२}{३२}\sqrt{१०}$

बारावें $\frac{४}{३}\sqrt{\frac{अ^३}{ब}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{अक}{बड}\sqrt{ब}$

तेरावें $\frac{३}{२}\sqrt{\frac{३}{२}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{३२}{३२}\sqrt{१४}$

चौदावें $\frac{३}{२}\sqrt{\frac{२६}{२६}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{३२}{३२}\sqrt{१८}$

पंधरावें $\sqrt{९८}$ अक्ष यास अतिसरळ रूप दे

सोळावें $\sqrt{क्ष-अक्ष}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

चवथा प्रकार

करणी पदांची मेळवणी करायाचा

रीति

१ अपूर्ण पदें असतील तीं समछेद करावीं आणि पूर्व प्रकाराप्रमाणें सर्व पदांस अतिसरळ रूप द्यावें

जा

(६८)

२ जा पदाचा मूळ प्रकाशक विषय आहे त्यास दुसरें प्रकारा प्रमाणें बरोबर किमतीचें सम मूळ प्रकाशक पदाचें रूप घावें

३ आतां जर सर्व पदांत करणी अवयव एकरूपच असेल तर त्या पदांचे अखंड अवयवांची बेरीज घेऊन तीस ती करणी जोडून लिहावी हीच त्यांची भिळवणी परंतु सर्व पदांत करणी अवयव एकरूप नसेल तर तीं सर्व पदे (+) धन (-) ऋण चिन्हे जोडून लिहावीं हीच त्यांची भिळवणी

उदाहरणे

प्रथम $\sqrt{१८}$ आणि $\sqrt{३२}$ यांची बेरीज काय होत्ये

$$\text{आतां } \sqrt{१८} = \sqrt{९ \times २} = ३\sqrt{२}$$

$$\text{आणि } \sqrt{३२} = \sqrt{१६ \times २} = ४\sqrt{२}$$

तर $७\sqrt{२}$ हें उत्तर

दुसरें $\sqrt[३]{३७५}$ आणि $\sqrt[३]{१९२}$ यांची बेरीज काय होत्ये

$$\text{आतां } \sqrt[३]{३७५} = \sqrt[३]{१२५ \times ३} = ५\sqrt[३]{३}$$

$$\text{आणि } \sqrt[३]{१९२} = \sqrt[३]{६४ \times ३} = ४\sqrt[३]{३}$$

$९\sqrt[३]{३}$ हें उत्तर

तिसरें $\sqrt{२७}$ आणि $\sqrt{४८}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $७\sqrt{३}$

चवथें $\sqrt{५०}$ आणि $\sqrt{७२}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $११\sqrt{२}$

पांचवें

(६९)

पांचवें $\sqrt{३}$ आणि $\sqrt{३}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $४\sqrt{३}$ अथवा $\frac{४}{३}\sqrt{१५}$

साहावें $\sqrt{५६}$ आणि $\sqrt{१८९}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $५\sqrt{७}$

सातवें $\sqrt{५००}$ आणि $\sqrt{१०८}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $८\sqrt{४}$

आठवें $\sqrt{४}$ आणि $\sqrt{३}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $\frac{३}{२}\sqrt{२}$

नववें $४\sqrt{१४७}$ आणि $३\sqrt{७५}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $४३\sqrt{३}$

दाहावें $३\sqrt{३}$ आणि $२\sqrt{३}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $\frac{५}{३}\sqrt{१०}$

अकरावें $३\sqrt{अब}$ आणि $५\sqrt{१६}$ अब यांची बेरीज काय

होत्ये

बारावें $\frac{३}{२}\sqrt{अब}$ आणि $\frac{३}{२}\sqrt{४}$ बक्ष यांची बेरीज काय

होत्ये

(७०)

पांचवा प्रकार

करणी पदांची वजा बाकी करायाचा

रीति

पूर्व प्रकाराप्रमाणे दोनही पदे सिद्ध करावीं नंतर करणी एक रूपच असेल तर अखंड पदांची वजा बाकी करावी आणि राहित्यदा कीस ती साधारण करणी जोडावी म्हणजे वजा बाकी जाली त्या पदांची करणी एकरूप नसेल तर तीं पदे (-) ऋण चिन्ह जोडून लिहावीं म्हणजे हीच वजा बाकी जाली

उदाहरणे

प्रथम $\sqrt{320}$ आणि $\sqrt{50}$ यांची वजा बाकी कर

$$\text{आतां } \sqrt{320} = \sqrt{64 \times 5} = 8\sqrt{5}$$

$$\bullet \text{ आणि } \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$8\sqrt{5}$ बाकी हें उत्तर

दुसरे $\sqrt{128}$ आणि $\sqrt{48}$ यांची वजा बाकी कर

$$\text{आतां } \sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{आणि } \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$8\sqrt{2}$ हें उत्तर

तिसरे $\sqrt{20}$ आणि $\sqrt{45}$ यांची वजा बाकी कर

$$\text{आतां } \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{आणि } \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$\sqrt{5}$ बाकी हें उत्तर

चवथे

(७२)

चवथें $\frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{३}}$ आणि $\frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{४}}$ यांची वजाबाकी कर

आतां $\frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{३}} = \frac{३}{४} \sqrt{\frac{६}{६}} = \frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{३}} \sqrt{\frac{६}{६}} = \frac{३}{४} \sqrt{\frac{६}{६}}$

आणि $\frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{४}} = \frac{३}{४} \sqrt{\frac{६}{१६}} = \frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{४}} \sqrt{\frac{६}{४}} = \frac{३}{४} \sqrt{\frac{६}{४}}$

$\frac{३}{४} \sqrt{\frac{६}{४}}$ याकी हे उत्तर

पांचवें $\sqrt{७५}$ आणि $\sqrt{४८}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\sqrt{३}$

साहावें $\sqrt{२५६}$ आणि $\sqrt{३२}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $२\sqrt{४}$

सातवें $\sqrt{\frac{३}{४}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{४}}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{४}}$

आठवें $\sqrt{\frac{३}{४}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{४}}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{४}}$

नववें $\sqrt{\frac{३}{४}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{४}}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\frac{३}{४} \sqrt{\frac{३}{४}}$

दाहावें $\sqrt{२४}$ अंबे आणि $\sqrt{५४}$ बें यांची वजाबाकी कर

उत्तर $(३बे-२अब) \sqrt{६}$

सादावा

(७२)

साहावा प्रकार
करणी पदे परस्पर गुणायाचा
रीति

जेव्हां सर्व पदांत करणी एक जातीची आहे तेव्हां त्या पदांचे अ-
खंड अवयवांचा गुणाकार करावा तसाच खंड अवयवांचाही गुणा-
कार करावा नंतर ते दोनही गुणाकार जोडून त्यांचे मध्ये साधारण
करणीचिन्ह लिहावे ह्मणजे हा इच्छित गुणाकार होईल या गुणाकारा-
स तिसर्ये प्रकारा प्रमाणे अतिसरळ रूप देता येईल

परंतु जर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सम मू-
ळ प्रकाशक रूप देऊन तीं पदे वर सांगितल्या प्रमाणे गुणावी

४७

या समयीं पूर्वें सांगितल्ये रीतीचें स्मरण करावे जे सरूप
पदांस वर्गादि प्रकाशक अथवा वर्गादि मूळ प्रकाशक विरूप आहे तर
त्यांचा गुणाकार प्रकाशकांची बेरीज करून ती त्या साधारण पदास
रीती प्रमाणे जोडावी ह्मणजे गुणाकार जाहाला

उदाहरणे

प्रथम $३\sqrt{८}$ आणि $२\sqrt{६}$ यांचा गुणाकार काय होतो

आतां $३\sqrt{८}$ हे गुण्य

आणि $२\sqrt{६}$ हे गुणक

$$\overline{६\sqrt{४८}} = ६\sqrt{१६ \times ३} = २४\sqrt{३} \text{ गुणाकार हे उत्तर}$$

दुसरें

(७३)

दुसरें $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ आणि $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

आतां $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{12} \text{ गुणाकार हें उत्तर}$$

तिसरें $2^{\frac{3}{2}}$ आणि $3^{\frac{3}{2}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

$$2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \text{ हा प्रथम पदाचा}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} \text{ हा दुसरें पदाचा}$$

$$\text{आतां } 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{9}{4}}$$

$$3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{9}{4}}$$

$$2^{\frac{9}{4}} \text{ हा गुणाकार हें उत्तर}$$

चवथें $4\sqrt{2}$ आणि $3\sqrt{2}$ यांचा गुणाकार काय होतो

$$\text{आतां } 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ हें उत्तर}$$

पांचवें $3\sqrt{10}$ आणि $2\sqrt{10}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर २४

साहावें $\frac{3}{2}\sqrt{8}$ आणि $\frac{3}{2}\sqrt{12}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर $\frac{3}{2}\sqrt{6}$

सानवें $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ आणि $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर $\frac{3}{2}\sqrt{12}$

आठवें

(७४)

आठवें २४१४ आणि २४४ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर २४७

नववें २अ^३ आणि अ^३ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर २अ^३

दाहावें (अ+ब)^३ आणि (अ-ब)^३ यांचा गुणाकार काय होतो

अकरावें २क्ष+४व आणि २क्ष-४व यांचा गुणाकार काय होतो

बारावें (अ+२४व)^३ आणि (अ-२४व)^३ यांचा गुणाकार काय होतो

तेरावें २क्ष^३ आणि ४क्ष^३ यांचा गुणाकार काय होतो

चौदावें ४क्ष^३ आणि २क्ष^३ यांचा गुणाकार काय होतो

सातवा प्रकार

एक करणी पदास दुसऱ्ये करणी पदानें भागायाचा

रीति

जेव्हां करणी एक जातीची आहे तेव्हां अखंड पदांचा भागाकार करावा तसाच खंड पदांचाही भागाकार करावा आणि त्या दोन भागाकारां मध्ये साधारण करणी चिन्ह लिहावे म्हणजे भागाकार जाहाला

अर

(७५)

जुर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सममूळ प्रकाशकरूप देडुन वर प्रमाणें भागाकार करावा

या समयीं पूर्वी सांगितल्ये रीतीचें स्मरण असावें जे सरूप पदांस वर्गादि प्रकाशक अथवा वर्गमूळादि प्रकाशक भिन्नजाति आहे त तर त्यांचा भागाकार प्रकाशकांचे वजा बाकी करून होतो तो असा किं प्रकाशकांची वजा बाकी करून ती साधारण पदास रीतीप्रमाणें जोडावी म्हणजे भागाकार जाला

उदाहरणें .

प्रथम $८\sqrt{१०८}$ यांस $२\sqrt{६}$ याणीं भाग

आतां $\frac{८\sqrt{१०८}}{२\sqrt{६}} = ४\sqrt{१८} = ४\sqrt{९ \times २} = १२\sqrt{२}$ भागाकार हें उत्तर

तर

दुसरे $८\sqrt{५१२}$ यांस $४\sqrt{२}$ याणीं भाग

आतां $\frac{८\sqrt{५१२}}{४\sqrt{२}} = २\sqrt{२५६} = २\sqrt{६४ \times ४} = ८\sqrt{४}$ हें उत्तर

तिसरे $\frac{३}{२}\sqrt{५}$ यांस $\frac{३}{२}\sqrt{२}$ याणीं भाग

आतां $\frac{\frac{३}{२}\sqrt{५}}{\frac{३}{२}\sqrt{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{५}{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{१०}{४}} = \frac{३}{२}\sqrt{१०}$ हें उत्तर

चवथें $\sqrt{७}$ यांस $\sqrt{७}$ याणीं भाग

आतां $\frac{\sqrt{७}}{\sqrt{७}} = \frac{७}{७} = \frac{७}{७} = १ - १ = ०$ हें उत्तर

पांचवें $४\sqrt{५०}$ यांस $२\sqrt{५}$ याणीं भाग

उत्तर $२\sqrt{१०}$

साहायें

(७६)

साहायें ६४१०० यांस ३४५ याणी भाग

उत्तर २४२०

सातवें ६४१०० यांस ३४५ याणी भाग

उत्तर २४२०

आठवें ६४१०० यांस ३४५ याणी भाग

उत्तर २४२०

नववें ६४१०० यांस अथवा ६४१ यांस ३४५ याणी भाग

उत्तर ६४१

दाहायें ६४१ यांस ३४५ याणी भाग

अकरावें ६४१ यांस ३४५ याणी भाग

टीप करणीचा भागाकार भाज्यभाजकांचे मूळप्रकाशक चिन्हांचे वजाबाकी करून होतो यावरून निश्चय कळते कि कोणत्या ही अपूर्णाकाचे अथवा अपूर्ण बीजाचे छेद अंशस्थळीं घेता येतील अथवा अंश छेदस्थळीं घेता येतील असे कि प्रकाशक चिन्ह धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन असे बदल करून पुनः $\frac{अ^म}{अ^म} = १$ अथवा $अ^म - म = अ^०$ या पासून निघते कि अं हे अक्षर चिन्ह कोणत्याही एकपदाबराबर आहे जें पद १ या संख्येचे बराबर आहे याजकरिता जास्थळीं अं अशा रीतीचे अक्षर

क्षर

क्षर चिन्ह येते तेथे १ हा अंक लिहिता येईल*

उदाहरणे

प्रथम जसे $\frac{१}{२} = \frac{१}{२}$ अथवा $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२} = \frac{१}{२}$ अथवा $\frac{१}{२}$

दुसरे $\frac{१}{२} = \frac{१}{२}$ अथवा $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२} = \frac{१}{२} = \frac{१}{२}$

तिसरे $\frac{१}{२}$ यास प्रकाशक चिन्ह करण करून लिहि

चवथे $\frac{१}{२}$ यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि

पांचवे $\frac{१}{२+१}$ यास प्रकाशक चिन्ह करण करून लिहि

साहावे $\frac{१}{२} (१-१)$ यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि

* याजवर याहून अधिक विचार केला पाहिजे

१ कोणत्याही पदास शून्य मिळविले अथवा त्यातून वजा केले तर ते पद अधिक किंवा उणे होत नाही खणजे

$१+०=१$ आणि $१-०=१$

२ जर कोणत्याही पदाने शून्य गुणिले किंवा भागिले तर गुणाकार किंवा भागाकार शून्य होईल कारण किती वेळा शून्य घेतले तर शून्यच होईल शून्याचे किती भाग घेतले तरी शून्यच होईल खणजे ०×१ अथवा $१ \times ०=०$ आणि $\frac{०}{१}=०$

३ यातूनही निघते कि शून्याने भागिले शून्य त्याच्या भागाकार काही एक सांत पद आहे कारण

$० \times १=०$ अथवा $०=० \times १$ याजकरिता $\frac{०}{१}=०$

४ याहूनही अधिक जर कोणत्याही सांत पद शून्याने भागिले तर भागाकार अनंत होईल या पुढील उदाहरणांत पाह

अ लाहान $\frac{१}{०}$ किंमत सर्वकाळ बरोबर असेल तर साफ दिसते कि जितका अ लाहान होत जाईल तितका क सोदा होईल याजकरिता जर अ अनंत लाहान आहे तर क अनंत सोदा होईल आणि जेव्हा अ शून्य आहे तेव्हा क अनंत होईल खणजे

$\frac{१}{०}$ अथवा $\frac{१}{०}=०$ अनंत आहे

हा गुणविचार या विद्येत शेवटी सोपे सोपे कामांत बहुत उपयोगी आहे याजकरिता पक्षे पक्षे स्मरणांत असावा

आठवा

(७८)

आठवा प्रकार

करणी पदांस वर्गघनादिकं करून वाढवायाचा

रीति

जेव्हा करणीपद एकाकी आहे वर्गकरणे आहे तर त्या करणी पदा चे प्रकाशक चिन्ह दोहोनी गुणावे आणि घन करणे आहे तर तिहोनी गुणावे इत्यादिचतुर्घातादिकां हे करणीचे खंड अवयवाचे इच्छिले वर्गघनादिक होईल नंतर त्या करणी पदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचे इच्छिले वर्गघनादिक करून त्यास जोडावे म्हणजे करणीचे एकाकी पदा चे इच्छिले वर्गघनादिक होईल अर करणी संयुक्त पद आहे तर इच्छिले वर्गघनादिक करायाकरिता इच्छिले वर्गघनादिक होई पर्यंत वर्गघनादि रीतीने ते करणी संयुक्तपद पुनः पुनः गुणावे*

उदाहरणे

प्रथम $\frac{2}{3} \sqrt{3}$ याचा वर्ग काय होतो

आता $(\frac{2}{3} \sqrt{3})^2 = \frac{4}{9} \times 3 = \frac{4}{3}$ अथवा $\frac{4}{3} \sqrt{3}$ हे उत्तर

दुसरे $\frac{2}{3} \sqrt{3}$ याचा घन काय होतो

आता $(\frac{2}{3} \sqrt{3})^3 = \frac{8}{27} \times 3\sqrt{3} = \frac{8}{9} \times \sqrt{3} = \frac{8}{9} \sqrt{3}$
 $\sqrt{3} \times 3 = \frac{8}{9} \sqrt{3} = \frac{8}{9} \sqrt{3}$ हे उत्तर

* जेव्हा कोणतेही पद वर्गमूळचिन्हाचे युक्त आहे आणि त्याचा वर्ग करणे आहे तर ते वर्गमूळचिन्ह पुसून टाकावे म्हणजे वर्ग आला जसे

$(\sqrt{a})^2$ अथवा $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ आणि $(\sqrt{a+b})^2$ अथवा $\sqrt{a+b} \times \sqrt{a+b} = a+b$

तिसरे

(७९)

तिसरें $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ याचा घन काय होतो

आतां $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$ नंतर $\frac{3}{2}^3 = \frac{27}{8} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8} \times \frac{8}{8}} =$

$\frac{3}{2}\sqrt{6}$

तेव्हां $(\frac{3}{2}\sqrt{6})^3 = \frac{27}{8} \times 6\sqrt{6} = \frac{27}{4}\sqrt{6} = \frac{27}{4}\sqrt{6}$ हें उत्तर

चवथें $2\sqrt{2}$ याचा वर्ग काय होतो

उत्तर $8\sqrt{2}$

पांचवें $\frac{3}{2}$ याचा घन काय होतो

उत्तर $\frac{27}{8}$

साहाबें $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ याचा घन काय होतो

उत्तर $\frac{27}{4}\sqrt{3}$

सातवें $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ याचा चतुर्घात काय होतो

उत्तर $\frac{81}{4}$

आठवें $\frac{3}{2}$ याचा म घात काय होतो

नववें $2+\sqrt{3}$ याचा वर्ग काय होतो

दाहाबें $3+2\sqrt{3}$ याचा वर्ग काय होतो

अकरावें $\sqrt{13}+3\sqrt{5}$ याचा घन काय होतो

नववा

नववा प्रकार .

करणीपदाचें वर्गघनादिमूळ काढायाचा

जेव्हां करणीपद एकाकी आहे आणि त्याचें वर्गमूळ काढणें तर त्या करणीपदाचें प्रकाशक चिन्ह ३ याणें गुणाचें आणि घनमूळ काढणें तर ३ याणें गुणाचें इत्यादि चतुर्घातादि मूळां हें करणीचे खंड अवयवाचें इच्छिलें वर्गादिमूळ होईल नंतर त्या करणीपदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इच्छिलें वर्गादिमूळ काढून त्या करणीपदांतील त्या खंड अवयवाचे वर्गादिमूळास जोडाचें सणजे करणीचे एकाकी पदाचें इच्छिलें वर्गादिमूळ होईल जर करणी संयुक्तपद आहे तर पूर्वी सांगितल्या रीतीप्रमाणें त्याचें वर्गादिमूळ काढाचें*

उदाहरणें

प्रथम १४३ याचें वर्गमूळ काढ

आतां $(१४३)^{\frac{१}{२}} = १२ \times ३^{\frac{१}{२}} = १२ \times ३ = ३६$ हें उत्तर

दुसरें $३\sqrt{२}$ याचें घनमूळ काढ

आतां $(३\sqrt{२})^{\frac{१}{३}} = (३)^{\frac{१}{३}} \times २^{\frac{१}{३}} = ३ \times २ = ६\sqrt{२}$ हें उत्तर

* कोणतेही पद अ याचे म पाताचें न मूळ अथवा कोणतेही पद अ याचे न मूळाचा म पात = अ

आणि कोणतेही पद अ याचे म मूळाचें न मूळ अथवा कोणतेही पद अ याचे न मूळाचें म मूळ = अ

या पासून कळतें किं अ पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे चतुर्घात मूळा बराबर आहे आणि अ पदाचे वर्गमूळाचें घनमूळ अथवा अ पदाचे घनमूळाचे वर्गमूळ अ पदाचे षड्घात मूळा बराबर आहे आणि या प्रमाणें पुढेही कोणत्याही पदाचे मूळाचें मूळ काढणें असेल तर या प्रमाणें कराचें

तिसरें

(८१)

तिसरें ६ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर ६४६

चवथें ३६६ यांचें घनमूळ काढ

उत्तर ३६४

पांचवें १६४ यांचें चतुर्घातमूळ काढ

उत्तर २४४

साहायें ६६ यांचें ममूळ काढ

सातवें ६६४४४४४४ यांचें वर्गमूळ काढ

आठवें ६६४४४४४४ यांचें घनमूळ काढ

दाहावा प्रकार

द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास सामान्य करणीरूप या-
वयाचा

रीति

सांगीतलें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद यास त्यांतील करणी-
चे घाता पर्यंत वाढवावें नंतर त्या घाताचें मूळचिन्ह त्या द्वियुक्पदा-

स

(८२)

स अथवा धनर्ण पदास जोड़ून लिहावें स्त्रणजे त्या पदास सामान्य करणी रूप जालें

उदाहरणें

प्रथम $२+\sqrt{३}$ यास सामान्य करणीरूप दे
आतां $(२+\sqrt{३})^२=४+३+४\sqrt{३}=७+४\sqrt{३}$ याजकरितां $२+\sqrt{३}=\sqrt{७+४\sqrt{३}}$ हें उत्तर

दुसरें $\sqrt{२}+\sqrt{३}$ यास सामान्य करणीरूप दे
आतां $(\sqrt{२}+\sqrt{३})^२=२+३+२\sqrt{६}=५+२\sqrt{६}$ याजकरितां $\sqrt{२}+\sqrt{३}=\sqrt{५+२\sqrt{६}}$ हें उत्तर

तिसरें $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४}$ यास सामान्य करणीरूप दे
आतां $(\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})^३=६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}$ याजकरितां $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४}=\sqrt[३]{६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}}$ अथवा $\sqrt[३]{६(१+\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})}$ हें उत्तर

चवथें $३-\sqrt{५}$ यास सामान्य करणीरूप दे

पांचवें $\sqrt{२}-२\sqrt{६}$ यास सामान्य करणीरूप दे

साहाबें $४-\sqrt{७}$ यास सामान्य करणीरूप दे

सातवें $२/\sqrt{३}-३\sqrt{९}$ यास सामान्य करणीरूप दे

अकरावा

(८३)

अकरावा प्रकार

द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें वर्गमूळ काढायाचा
रीति

या खालचे दोन सारणी कोष्ठकांत अक्षरस्थळीं सांगितल्ये
करणीचे दोन अवयव लिहावे ह्मणजे सांगितल्ये द्वियुक्पदाचें
अथवा धनर्णपदाचें इछिलें मूळ होईल

$$\sqrt{अ + \sqrt{ब}} = \sqrt{\frac{३}{२} अ + \frac{३}{२} \sqrt{अ^२ - ब}} + \sqrt{\frac{३}{२} अ - \frac{३}{२} \sqrt{अ^२ - ब}}$$

$$\sqrt{अ - \sqrt{ब}} = \sqrt{\frac{३}{२} अ + \frac{३}{२} \sqrt{अ^२ - ब}} - \sqrt{\frac{३}{२} अ - \frac{३}{२} \sqrt{अ^२ - ब}}$$

पाहायाचें आहे जर या दोन सारणी कोष्ठकांत अ आणि
 $\sqrt{अ - ब}$ अखंड पदें असतील तर मूळ पदें दोनही करणी असतील
अथवा एक पद अखंड आणि दुसरें पद करणी असें असेल ह्मणोन
दोन प्रकारचीं मात्र उदाहरणें या रीतीचा उपयोगी आहेत

उदाहरणें

प्रथम $११ + \sqrt{७२}$ अथवा $११ + ६\sqrt{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ

आतां $\sqrt{\frac{३}{२} अ + \frac{३}{२} \sqrt{अ^२ - ब}} = \sqrt{\frac{३}{२} + \frac{३}{२} \sqrt{१२१ - ७२}} = \sqrt{\frac{३}{२} + \frac{३}{२}} = \sqrt{\frac{६}{२}} = \sqrt{३} = १.७३२$

आतां $\sqrt{\frac{३}{२} अ - \frac{३}{२} \sqrt{अ^२ - ब}} = \sqrt{\frac{३}{२} - \frac{३}{२} \sqrt{१२१ - ७२}} = \sqrt{\frac{३}{२} - \frac{३}{२}} = \sqrt{\frac{०}{२}} = ०$

याजकरितां $\sqrt{१२ + ६\sqrt{२}} = ३ + \sqrt{२}$ हें उत्तर

दुसरें $३ - २\sqrt{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ

आतां

(८४)

आतां $\sqrt{\frac{1}{2}अ + \frac{1}{2}\sqrt{अ^2 - ब}} - \sqrt{\frac{1}{2}अ - \frac{1}{2}\sqrt{अ^2 - ब}}$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{९ - ८}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{१} = १$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{९ - ८}} = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = -०$$

याजकरिता $\sqrt{३ - २\sqrt{२}} = \sqrt{२} - १$ हे उत्तर

तिसरें $६ \pm २\sqrt{५}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $\sqrt{५} \pm १$

चवथें $२३ \pm ८\sqrt{७}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $४ \pm \sqrt{७}$

पांचवें $४ \pm २\sqrt{३}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $१ \pm \sqrt{३}$

साहाबें $६ - २\sqrt{५}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $\sqrt{५} - १$

बारावा प्रकार

एक किंवा अधिक गुणक काढावाचा

तो गुणक असा किंवा जाणें करणी द्वियुक्पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाउन तें अखंड होईल

रिति

१ जेव्हां करणीचे एक पदाचा किंवा दोनही पदांचे मूळप्रकाशक सम आहेत तेव्हां सांगीतल्ये द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्ण पदाचें

एक

एक चिन्ह बदल करावें ह्मणजे तोच गुणक जाला नंतर त्या गुणका-
नें तें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद गुणावें या प्रमाणें गुणाकारांतही
एकचिन्ह बदल करून पुनः पुनः गुणावें गुणाकारास करणी रूप सु-
टपर्यंत

१ या रीतीनें त्रियुक्पदादि करणीसही करणीरूप सुटोन अखंड
रूप देतां येईल असें किं त्रियुक्पदादि करणीसही एकचिन्ह बदल
करावें चतुर्युक्पद करणीस दोन चिन्हें बदल करावी पंचयुक्पद कर-
णीस तीन चिन्हें बदल करावीं इत्यादि षड्युक्पदादिकींही

२ जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळ प्रकाशक विषम आहे तेव्हां री-
ति यादून अधिक कठीण आहे परंतु दोन वर्गमूळांची बेरीज किंवा
वजा बाकी करायास इच्छिला गुणक त्रियुक्पद करणी होईल हें त्रि-
युक्पद या रीतीनें उत्पन्न होतें किं जीं दोन पदे आहेत त्यांचे वर्ग दोन
पदे आणि त्याच पदांचा गुणाकार धन असल्यास ऋण आणि ऋ-
ण असल्यास धन करावा तो तिसरें मध्यपद होतें

उदाहरणें

प्रथम $५ + \sqrt{३}$ यांचा एक गुणक काढायाचा जा-
णें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद
होईल

सांगीतली

(८६)

सांगीतली करणी $५ + \sqrt{३}$

गुणक $५ - \sqrt{३}$

$$\underline{२५ + ५\sqrt{३}}$$

$$- ५\sqrt{३} - ३$$

$$\underline{२५ - ३ = २२} \text{ हैं उत्तर}$$

दुसरें $\sqrt{५} + \sqrt{३}$ याचा एक गुणक काढायाचा जाणें हे पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद होईल

सांगीतली करणी $\sqrt{५} + \sqrt{३}$

गुणक $\sqrt{५} - \sqrt{३}$

$$\underline{५ + \sqrt{५}\sqrt{३}}$$

$$- \sqrt{५}\sqrt{३} - ३$$

$$\underline{५ - ३ = २} \text{ हैं उत्तर}$$

तिसरें $\sqrt{५} + \sqrt{७}$ याचा एक गुणक काढायाचा जाणें हे पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद होईल

सांगीतली करणी $\sqrt{५} + \sqrt{७}$

गुणक $\sqrt{५} - \sqrt{७}$

$$\underline{\sqrt{५} + \sqrt{१५}}$$

$$- \sqrt{१५} - \sqrt{७}$$

$$\underline{\sqrt{५} - \sqrt{७}}$$

पुनः गुणक $\sqrt{५} + \sqrt{७}$

$$\underline{५ - \sqrt{१५}}$$

$$+ \sqrt{१५} - ७$$

$$\underline{५ - ७ = -२} \text{ हैं उत्तर}$$

चवथें $\sqrt{७} + \sqrt{३}$ याचा गुणक काढायाचा जाणें हे पद गुणिलें

(८७)

गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद होईल

सांगीतली करणी $\sqrt{७} + \sqrt{३}$

गुणक $\frac{\sqrt{७} - \sqrt{७ \times ३} + \sqrt{३}}$

$७ + \sqrt{७ \times ३}$

$-\sqrt{७ \times ३} - \sqrt{७ \times ३}$

$+ \sqrt{७ \times ३} + ३$

गुणाकार $७ + ३ = १०$ हें उत्तर

पांचवें $\sqrt{५} - \sqrt{३}$ याचा गुणक काढायाचा जाणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद होईल

साहाबें $\sqrt{अ} + \sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाचा जाणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद होईल

सातवें $अ + \sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाचा जाणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद होईल

आठवें $१ + \sqrt{२अ}$ याचा गुणक काढायाचा जाणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाडुन तें अखंड पद होईल

नववें $\sqrt{३} - \sqrt{२अ}$ याचा गुणक काढायाचा जाणें हें पद गुणिलें

गुणिलें असतां त्यांचें करणी रूप जाउन तें अखंड पद होईल.

तेरावा प्रकार

जा अपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी किंवा संयुक्त करणी आहेत त्यां-
स बदल अखंड रूप देण्याचा

रीति

१ जेव्हां कोणतेही एकाकी अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{b}{a}$ ते-
व्हां त्याचे अंश आणि छेद त्याचे अंशानी स्मरणजे एथें \sqrt{a} याणीं गुणा-
वे स्मरणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{b\sqrt{a}}{a}$

अथवा जेव्हां तें अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{b}{\sqrt{a}}$ तेव्हां त्या-
चे अंश आणि छेद \sqrt{a} याणीं गुणावे स्मरणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें
होईल $\frac{b\sqrt{a}}{a}$

आणि जेव्हां या सामान्य पद्धतीचें रूप आहे $\frac{b}{\sqrt{a}}$ तेव्हां त्या-
चे अंश आणि छेद \sqrt{a}^{n-1} याणीं गुणावे स्मरणजे त्याचें रूप या प-
द्धतीचें होईल $\frac{b\sqrt{a}^{n-1}}{a}$

२ जेव्हां अपूर्ण बीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत तेव्हां पूर्व १२
प्रकारा प्रमाणें गुणक काढावा असा किं जाणें ते छेद गुणिले अस-
तां त्यांचें करणी रूप जाउन अखंड रूप होतील नंतर अंश आणि
छेद त्या गुणकांनीं गुणिले असतां अपूर्ण बीजास इच्छिलें अखंड
छेद रूप होईल

उदाहरणें

(८९)

उदाहरणें

प्रथम $\frac{3}{5}$ आणि $\frac{3}{525}$ या दोन अपूर्ण बीजांस अखंड छेद रूप दे

आतां $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$ हे एक उदाहरणाचें उत्तर

आणि $\frac{3}{525} = \frac{3}{525} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{525} = \frac{1}{175}$ हे दुसरे उदाहरणाचें उत्तर

दुसरें $\frac{3}{12-12}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

आतां $\frac{3}{12-12} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{12-12} = \frac{3}{12-12} = \frac{1}{4-4} = \frac{1}{0}$ हे उत्तर

तिसरें $\frac{1}{2-12}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

आतां $\frac{1}{2-12} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2-12} = \frac{1}{-10} = -\frac{1}{10}$ अथवा $\frac{1}{10} \div 2$ हे उत्तर

चवथें $\frac{1}{12+12}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

पांचवें $\frac{1}{12+12}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

सातवें $\frac{1}{12+12}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

सातवें $\frac{1}{12+12}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

आठवें

(९०)

आठवें $\frac{3}{4}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

नववें $\frac{5}{4}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

गणितप्रमाण आणि श्रेढी

गणितप्रमाण , एक जातीचे दोन पदांचे वजाबाकीवरून त्यांचे संबंधि आहे . या वजाबाकीस गणितप्रमाणांत उत्तर स्मणतात .

चार पदं गणितप्रमाणांत आहेत असें स्मणतात . जेव्हां प्रथम आणि दुसरें यांचें उत्तर तिसरें आणि चवथें यांचे उत्तराबरोबर आहे .

जसें ३ , ७ , १२ , १६ आणि अ , अ + ब , क , क + ब परस्पर गणितप्रमाणांत आहेत

गणितश्रेढी तीच होय , जी कित्येक पदांची श्रेणी एकच उत्तरानें चढती किंवा उतरती आहे .

जसें १ , ३ , ५ , ७ , ९ , ११ इत्यादि , आणि अ , अ + ब , अ + २ब , अ + ३ब , अ + ४ब , अ + ५ब इत्यादि , या श्रेणी गणितप्रमाणांत आहेत , जात प्रथमेचें उत्तर २ आणि दुसरीचें उत्तर ५ आहे .

गणितप्रमाण आणि श्रेढी यांचे परम उपयोगी अवयव पु
र्व

(९२)

आणि गळ २१ तीचें सर्वधन काय होईल .

प्रथम , $१+२ \times २० = १+४० = ४१$ हें अतिहोटे पद आहे .

तेव्हां $\frac{१+४१}{२} \times २० = २१ \times २० = ४२०$ हें इच्छिलें सर्वधन .

दुसरें , एक उत्तरती श्रेणी आहे , जीचें प्रथम पद १९९ उ-

त्तर ३ आणि गळ ६७ आहे तीचें सर्वधन काय होईल .

प्रथम , $१९९-३ \times ६६ = १९९-१९८ = १$ हें अतिलाहान पद .

तेव्हां $\frac{१+१९९}{२} \times ६७ = १०० \times ६७ = ६७००$ हें इच्छिलें सर्वधन .

तिसरें , १ , २ , ३ , ४ , ५ , ६ इत्यादि मूळसंख्यांची श्रेणी गळ १०० पर्यंत आहे तीचें सर्वधन काय होईल .

उत्तर ५०५०

चवथें * १ , ३ , ५ , ७ , ९ इत्यादि विषम संख्यांची श्रेणी गळ ९९ पर्यंत आहे तीचें सर्वधन काय होईल .

उत्तर ९८०१

पांचवें

* १ , ३ , ५ , ७ , ९ इत्यादि विषम अकाचे गणित श्रेणीचें न गळ पर्यंत सर्वधन त्या गळाचें (न) वर्गाबरोबर आहे . असें

उत्तर १ , ३ , ५ , ७ , ९ इत्यादि पदे असतील .

तेव्हां १ , २ , ३ , ४ , ५ हीं प्रथम, दुसरे, तिसरे, चवथे, पांचवे इत्यादि पदांची सर्वधने होतील .

याप्रमाणें

$०+१=१$ अथवा १ हें प्रथम पदाचें सर्वधन .

$१+३=४$ हें दोन पदांचें सर्वधन .

$४+५=९$ हें तीन पदांचें सर्वधन .

$९+७=१६$ हें चार पदांचें सर्वधन .

$१६+९=२५$ हें पांच पदांचें सर्वधन आहे , इत्यादि

सुणोन बरथा प्रथम सिद्धांत किंवा समीकरण याणें $१+२+(१-१)=१+२+२+२-१$

सुणजे

(९३)

अंचवे इताल्या सुलकांत बेनीत्या या नामें एक शहर आहे तेथे सूर्योदयापासून दुसरा सूर्योदय पर्यंत प्रथम १ दुसरे वेळे २ तिसरे वेळे ३ अशारीतीनें चोविसाव्ये वेळे २४ पर्यंत घडाळ्यांत अवर वाजतात तेव्हां एकदिवसांत अवरांचे टोले किती वाजनात अवर सगजे १ तास अथवा घटका २३

उत्तर ३०० टोले

साहावे २, ४, ६, ८, १०, १२, इत्यादि या सम पद श्रेणींत ३६५ वें पद काय आहे

उत्तर ७३०

सानवे गणितश्रेणींतील एक उतरती श्रेणी आहे जीचें प्रथम पद १० उत्तर ३ आणि गळ २१ तीचें सर्वधन किती होईल

उत्तर १४०

आठवे एक सरळ रेघेंत एक एक यादींचे अंतरानें १०० खडे ठेविले आहेत आणि प्रथम खड्यापासून एक यादींचे अंतरानें पांढी ठेविली आहे आणि एक मनुष्यास आज्ञा जाली किं त्याणें एक एक खेपेस त्या खड्यांतील एक एक खडा त्या पांढींत टाकावा तेव्हां सर्व खडे त्या पांढींत येतपर्यंत त्या मनुष्यास किती चालावे लागेल

उत्तर ५०० यादी

सणवे हे लोखे पद आहे तेव्हां गळ न आहे ; या लोखे पदाशीं प्रथम पद १ भिन्न दोन शेंकट पदांची बेरीज २ न ही होईल ; अथवा त्या बेरीजेचें अर्ध न होईल ; तेव्हां वरचे विसरें समीकरणानें स सर्वधन = न. न = न. यावरून स्पष्ट होतें किं सर्वदा दोन शेंकटांचे बेरीजेचें अर्ध आणि गळ एकच आहे ; आणि सर्वधन आणि त्या गळाचा वर्ग (न) एकच आहे .

गणित

(९४)

गणितश्रेढीचें व्यवहारी संगतीकरण

उदाहरणे

प्रथम, एक पळटण त्रिकोणाकृति उभें आहे; त्याचे प्रथम ओळींत १ मनुष्य, दुसरींत ३ तिसरींत ५ अशारीतीनें चढत्या तीस ओळी आहेत, तर त्या त्रिकोणाकृति पळटणांतील सर्व मनुष्ये किती होतील.

उत्तर १०० मनुष्ये

दुसरे, फौजेतील एक टोळीस सकार आज्ञा जाली किं त्याणीं पुढें सांगतो अशा मजला करून १२ दिवसांत एक असुक गावीं पोचावें, त्यांत प्रथमदिवशीं ६ मैल दुसरेंदिवशीं १० ३/४ मैल इत्यादि प्रत्य- हीं ४ ३/४ मैल अधिक या प्रमाणें, तेव्हां त्यांस शेवटचे दिवशीं किती मैल चालावें लागेल आणि सर्व मजला मिळून किती मैल होतील.

उत्तर ५५ ३/४ मैल शेवटील मजल

आणि ३६८ मैल सर्वमिळून.

तिसरे, एक किल्यास वेढा देउन फौज बसली होती त्यां- तील इंजनेरांचे एक ब्रिगेडाभें तो किल्ला घेण्यास आरंभ केला, प्रथम रात्रौ त्याणें १५ यार्ड साप खणिला दुसरें रात्री १३ यार्ड, इत्यादि

* ब्रिगेड सणजे जमात, इंजनेरांचे एक ब्रिगेडांत आठ मनुष्ये असतात. जांवा दो- न दोव्या करितात, जेव्हां एक टोळी हातानीं काम करून साप बाढविले तेव्हां दुसरे टोळी त्यांस सामान पुरविले; आणि जेव्हां प्रथम टोळी थकली तेव्हां तृतीये बंदला. दुसरी टोळी काम करिले ते अशारीतीनें किं ते सर्वे आपआपल्ये पाळी प्रमाणें सापाचे शिरावर काम करि- तात. साप सणजे रवाडा, जांची रुंदी ३ फुट आणि ओंडी ४ फुट. या शिवाय याकामांत दुसरे त्याडे करितात, जांची रुंदी १० फुट पासून १५ फुट पर्यंत असले त्यांस मेष सणतात.

प्रति

प्रतिरात्रीस २ यार्ड उणे, आणि शेवटील रात्रीस ३ यार्ड मात्र खणिला, तेव्हां किती रात्री काम केले आणि सर्व मिळोन साप किती यार्ड खणिला तें सांग.

उत्तर { ७ रात्री काम केले
६३ यार्ड साप खणिला

चौथें. कित्येक गेंबीयन साहा ओळींत एकावर एक असे उभे करायास दिले, ते असे किं प्रतिओळीचे गेंबीयनांचे संख्येचें उत्तर बरोबर, आणि खालचे ओळींत ९ गेंबीयन आणि वरचे ओळींत ४ तेव्हां साहा ओळी मिळून गेंबीयन किती आणि प्रतिओळीचे गेंबीयन संख्येंत अंतर किती तें सांग.

उत्तर { १ गेंबीयन प्रतिओळीचें अंतर -
३९ गेंबीयन साहा ओळी मिळोन.

पांचवें. दोन फौजांचा टोळ्या १११ मैलांचे अंतरानें होत्या, नंतर जें एक चांगलें स्थळ दोहों टोळ्यांपासून बसबरे अंतरानें होतें, तेथे जाडून राहावें ऐसें दोहोंचे चिन्हीं येडून निघाल्या, परंतु वेगळाल्ये समयांत; प्रथम टोळी प्रत्यहीं पूर्व दिवसापेक्षां ३ तीन मैल मजल अधिक करित होती; आणि दुसरी टोळी ६ साहा मैल अधिक; दोन टोळ्या

* गेंबीयन लष्णीज कणग्यासारखी शिलिंदररूपाची वेद अथवा पिंवी इत्यादिकांनीं केलेली टोपली आहे, जींचीं दोनही तोंडे उघडीं असतात; त्यांत जीचा व्यास २ फुट आणि उंची ३ फुट त्या टोपलीच्या घेयाचे बाजूवर ठेवून त्यांत माती भरितात; आणि जीचा व्यास आणि उंची वाढून अधिक आहे त्या मोरचे इत्यादिकांमांत उपयोगी आहेत; तसें जीचा व्यास आणि उंची वाढून उणी आहे त्या लाहान कामांत उपयोगी आहेत परंतु बाजातीचा वेपल्या बहुत उपयोगी आहेत.

त्या

(९६)

त्या चांगल्ये स्थळीं एकदांच येडुन पावल्याः स्मरणजे प्रथमदोळी कुच केल्ये दिवसा पासून पांचव्ये दिवशीं, आणि दुसरी दोळी कुच केल्ये दिवसा पासून चवथ्ये दिवशीं तेव्हां प्रतिदोळीनें प्रतिदिवशीं किती मैल मजल केली तें सांग.

उत्तर	{ प्रथम दोळीची श्रेढी	२८, ६८, ११८, १५८, २०८
	{ दुसरी दोळीची श्रेढी	४८, १०८, १६८, २२८

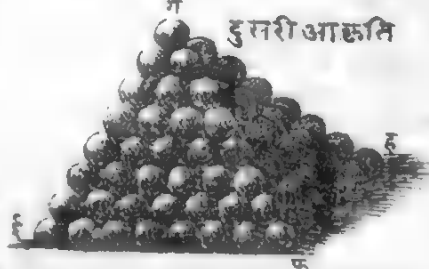
सम आकृतींत ठेविलेल्ये गोळ्यांचे राशीचें गणित.

तोफेचे गोळ्यांचा राशी बद्धतकरून तीन रीतींहीं करितात, त्यां स पायांचे आकृतीं वरून वेगळाळीं नांमें होतात, पाया त्रिकोण असल्यास त्रिकोण राशि स्मरतात; पाया चौरस असल्यास चौरस राशि; आणि पाया काटकोन चौकोन असल्यास काटकोन चौकोन राशि.

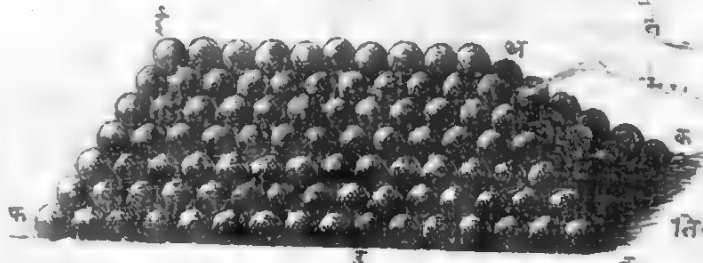
प्रथम आकृति



दुसरी आकृति



अबकड प्रथम आकृति त्रिकोणराशि आहे.
ईफगह दुसरी आकृति चौरसराशि आहे.



तिसरी आकृति

अबकड ईफ तिसरी आकृति काटकोन चौकोनराशि आहे.

गोळ्यांचे त्रिकोणाकृती थर एकावर एक रचिल्यापासून त्रिकोण राशि उत्पन्न होत्ये . अशा रीतीने किं प्रतिथराची एकेक बाजू आरंभा पासून एकेक गोळ्याने उणी होत जात्ये . अशी किं शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो .

गोळ्यांचे चौरस थर एकावर एक रचिल्यापासून चौरस राशि उत्पन्न होत्ये , अशा रीतीने किं प्रतिथराचे एकेक बाजूस आरंभापासून एकेक गोळा उणा होत जातो , असा किं शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो .

त्रिकोण आणि चौरस राशींमध्ये , बाजू किंवा मुखें समबाजू त्रिकोण आहेत ; आणि त्या बाजूंतील गोळे गणित श्रेढी आहेत , जीचें प्रथम पद १ शेवटील पद आणि गळ पायाचे थरांतील गोळ्यांचे संख्ये बरोबर , कारण थरांची संख्या अथवा आकृतीचे कोणत्याही एक कोनावरील गोळ्यांची संख्या सर्वदा पायाचे एक बाजूंतील गोळ्यांचे संख्ये बरोबर आहे ; त्रिकोण अथवा चौरस राशीचा बाजू किंवा मुखें यांम गणित त्रिकोण स्रणतात . आणि त्या गणित त्रिकोणांतील गोळ्यांचे संख्ये त्रिकोण संख्या स्रणतात . अबक प्रथम आकृतींतील आणि इ फ ग ह सुखे आकृतींतील गणित त्रिकोण आहेत .

काटकोन चौकोन राशि कल्पनेकरून या प्रमाणें उत्पन्न होत्ये , स्रणजे अबकड चौकोन राशीवर अड मुख किंवा बाजूवर तितके गणित त्रिकोण ठेविले . जितके पायाचे बड बाजूचे बाहेर त्याच बाजूत गोळे

ले आहेत, ते सर्व त्या सुरवाचे बरोबर आहेत ! आणि त्या गणित त्रिकोणांची संख्या सर्वदा याचे बरोबर आहे, जे वर्गचे ओळीचे गोळ्यांत एक उणा. अथवा पायाचे लाहान आणि सोद्ये बाजूचे वजा बाकी बरोबर आहे.

साहावं. अबकड प्रथम आकृती स्तणजे त्रिकोणराशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे.

पृथक्करण, सांगितल्ये राशींत गोळ्यांचे समपातळी थर आठ आहेत, आणि ते प्रत्येकीं समबाजू त्रिकोण आहेत; स्तणोन या प्रत्येकांतील गोळे गणितश्रेढी आहेत, जांचे प्रथमपद शेवटीलपद आणि गळ हीं कळलीं आहेत; यापासून निघते किं या आठ थरांची अथवा आठश्रेढींची बेरीज या त्रिकोणराशींतील सर्व गोळ्यांची संख्या आहे; तेव्हां

त्रिकोणराशींतील प्रथम अथवा

रयालचे त्रिकोण थरांतील गोळ्यांची संख्या $= (८+१) \times ४ = ३६$

दसरा $= (७+१) \times ३ = २४$

तिसरा $= (६+१) \times २ = १४$

चौथा $= (५+१) \times २ = १२$

पांचवा $= (४+१) \times २ = १०$

साहावा $= (३+१) \times १ = ४$

सातवा $= (२+१) \times १ = ३$

आठवा $= (१+१) \times १ = २$

बेरीज १२० गो-

ळे सांगितल्ये राशींतील.

सातवे

सातवे , ईफगह दुसरी आकृति , या चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या काढ , जीचे ईफ ग्वालचे थराचे ओळींत आठ गोळे आहेत .

पृथक्करण

ग्वालचे ओळींत गोळे ८ आहेत आणि तीचे वरचींत ७ च आहेत , स्तणोन त्या ओळी या श्रेढींत आहेत ८, ७, ६, ५, ४, ३, २, १ यांत प्रत्येक पद त्या त्या चौरस थराचे वर्गमूळ आहे , जा थरापासून चौरस राशि उत्पन्न जाली , यापासून निघतें किं या मूळपदांचे वर्गांची बेरीज इच्छिली गोळ्यांची संख्या आहे , स्तणजे वर्गांची बेरीज $८^२ + ७^२ + ६^२ + ५^२ + ४^२ + ३^२ + २^२ + १^२ = २०४$ आहेत , हे सांगीतल्ये राशींतील इच्छिले गोळे जाले .

आठवें , अबकड ईफ तिसरी आकृति , या काढकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या काढ . जीत बफ = १६ आणि बक = ७

पृथक्करण , इच्छिली काढकोन चौकोन राशि , अबकड चौरस राशि , जीचे ग्वालचे थराचे एके ओळींत ७ गोळे आहेत , आणि याशिवाय रूगणित त्रिकोण जांचे आदि अंत आणि गळ कळले आहेत त्या जी मिळोन जाला आहे . याजकरितां जर चौरस राशीचे गोळ्यांची संख्या =

१४०

त्यांत श्रेढींची बेरीज मिळाली =

२५२

सर्व मिळोन काढकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या = ३९२ गोळे

प्रथम

(१००)

प्रथम टीप

या पुढील कोष्टकांतील त्रिकोणराशि आणि चौकोनराशि आणि ग्वीही प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच काढिता येईल : अ कोष्टक ग्वान्च थरांचे एक ओळीचे गोळ्यांची संख्या १ यापासून ४० पर्यंत दाखवितो . व कोष्टक त्रिकोणसंख्या अथवा प्रत्येक थरांतील संख्या . क कोष्टक त्रिकोणसंख्यांची बेरीज दाखवितो . दणजे त्रिकोणराशींतील संख्यांची बेरीज . जा संख्यांस बद्धतेक शंकुसंख्या स्मरणतात : इ कोष्टक अ कोष्टकांतील संख्यांचे वर्ग दाखवितो . तणजे प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या ; आणि ई कोष्टक या चौरस थरांची बेरीज अथवा चौरसराशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो .

(१०२)

स्रणोन जर त्रिकोण राशींतील खालचे थराचे एके ओळींत १२ गोळे असतील, तर सर्व राशींतील गोळे १३२० होतील. आणि तसेच चौ रस राशींतील गोळे २४७० होतील; या रीतीनेंही चौरस किंवा त्रिकोण राशींचा संख्या सांगितल्या असतां स्वल्पानें खालचे थराचे ओळींची संख्या कळेल.

पूर्व कोष्टकांपासून काढकोनचौकोन राशींचीही संख्या थोडक्यानें कळेल. जांत लाहान बाजूंत ४० पेक्षां अधिक गोळे नसतील, तसें लाहान आणि स्रोटी या बाजूंची वजाबाकी ४० पेक्षां अधिक नसेल. जसें एक काढकोनचौकोन राशीचे लाहान बाजूंत १५ आणि स्रोटे बाजूंत ३५ गोळे असतील, आरंभी चौकोन राशींची स्रणजे कल्पनेनें जी पासून काढकोन चौकोन राशि जाली आहे तीची संख्या कोष्टकांतून काढावी; स्रणजे एक चौरस राशीची संख्या काढावी, जीचे खालचे थराचे एके ओळींत १५ गोळे आहेत. स्रणजेही कोष्टकांत १२४० आहे. नंतर गणित त्रिकोणाचे खालचे ओळींत संख्या १५ आहे त्याचे समोरची त्रिकोण संख्या १२० यांस २० नीं गुणावी, कारण चौरसाचे बाहेर २० त्रिकोण आहेत, नंतर यांस चौरस राशीची संख्या मिळवावी, स्रणजे $१२० \times २० + १२४० = २४०० + १२४० = ३६४०$ ही सांगितल्या काढकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची इच्छिली संख्या जाली.

दुसरी टीप

पुढील बीजाचे सारणीकोष्टक कोणत्याही राशींतील गोळ्यांची संख्या

(१०३)

संख्या स्वल्प धुमानें आणि त्वरेनें काढायास कामांत येतात.

त्रिकोणराशीचें गणित करायास }
$$\frac{(n+2) \times (n+1) \times n}{\times 6}$$

हा सारणी कोष्टक आहे.

चौरसराशीचें गणित करायास }
$$\frac{(n+1) \times (2n+1) \times n}{\times 6}$$

हा सारणी कोष्टक आहे.

या प्रत्येकांत न अक्षर खालचे थराचे एक ओळीची संख्या दाखवितें. स्तंभजे जीचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत त्या त्रिकोणराशीमध्ये सगळी संख्या हीच होईल $\frac{(30+2) \times (30+1) \times 30}{6} = 8९६०$ गोळे.

चौरसराशीमध्ये जीचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत तींची संख्या हीच होईल $\frac{(30+1) \times (60+1) \times 30}{6} = ९४५५$ गोळे.

काटकोन चौकोन राशीचा सारणी कोष्टक हा आहे.

$\frac{(n+1+n) \times (n+1) \times n}{6}$ जांत न अक्षर थरांची संख्या दाखवितें,

आणि न अक्षर वरचे थराची एकोन संख्या दाखवितें. जसें.

एक काटकोन चौकोन राशीमध्ये ३० थर आहेत आणि वरचे थरांत ३१ गोळे आहेत $\frac{(30+1+30) \times (30+1) \times 30}{6} = २७४५५$ गोळे

तिसरी शीप

एक उपयोगी रीति, सुगम आहे, जीणें तीन प्रकारचा पुर्या राशि, स्तंभजे, त्रिकोणराशि चौरसराशि आणि काटकोन चौकोनराशि, यांतील गोळ्यांची संख्या निघत्ये, स्तंभजे आरंभी तिसर्ये

(१०४)

ये आकृतीवर लक्ष्य ठेवून कर, तेव्हा

$(बड + अ + क) \times ३$ बडक = त्रिकोणराशींतील गोळ्यांची संख्या.

$(ईफ + ईफ + ग) \times ३$ गफह = चौरसराशींतील गोळ्यांची संख्या.

$(बफ + बफ + अई) \times ३$ अबक = काटकोनचौकोनराशींतील

गोळ्यांची संख्या.

यांदून एकसामान्यरिति निघत्ये, याचाचें बाजूचे एक ओळींत जी गोळ्यांची संख्या आहे ती, आणि तीशीं समांतर दुसऱ्येकडील बाजूचे ओळींतील संख्या (ती एक किंवा अनेक असतील ते) आणि पायाशीं समांतर राशिद्वारे ओळींतील संख्या, अशा या तीन संख्या एकत्र मिळवून ती बेरीज राशीचे तिकेस बाजूंतील गोळ्यांचे संख्येचे एक तृतीयांशानें गुणावी, तो गुणाकार राशींतील इच्छिली संख्या होईल.

भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी

भूमितिप्रमाण म्हणजे एक पद दुसऱ्ये पदाचा काय भाग आहे अथवा काय गुणक आहे, अथवा एक पद दुसऱ्ये पदांत किती वेळ आतें असा विचार कर्तो पदसंबंधि आहे. — परस्पर मिळविल्ये दोन पदांतील प्रथम पदास अग्रेसर म्हणतात, आणि दुसऱ्ये पदास अग्रेसर. त्याचें गुणोत्तर म्हणजे भागाकार आहे. जें एक दुसऱ्यानें भागून

उत्पन्न

उत्पन्न होते .

चार पदे परस्पर प्रमाणांत आहेत , जेव्हां दोन युग्मांचे गुणोत्तर बराबर आहे , अथवा जेव्हां प्रथम पद दुसरे पदाचा भाजक किंवा गुणक आहे , तसाच तिसरे चौथ्याचा . जसे ३ , ६ , ४ , ८ , आणि अ , अर , ब , बर , हीं भूमितिप्रमाणांत आहेत .

कारण $\frac{६}{३} = \frac{८}{४} = २$ आणि $\frac{अर}{अ} = \frac{बर}{ब} = २$, आणि त्यांस या रीतीने लिहितात . जसे ३ : ६ :: ४ : ८ , इत्यादि , अंक गणितामध्ये पाहा .

भूमितिश्रेढी तीच होय , जांतील सर्व पदांचे गुणोत्तर अनुक्रमाने एकच आहे . जसे १ , २ , ४ , ८ , १६ , इत्यादि . जांत गुणोत्तर २ आहे .

भूमितिश्रेढीचा साधारण गुण हाच आहे , किं कोणत्याही दोन पदांचा गुणाकार , अथवा कोणत्याही एक पदाचा वर्ग , प्रत्येक दोन पदांचे गुणाकारा बरोबर आहे , जीं दोन पदे त्यांपासून बराबर अंतराने दोहोंकडून घेतलीं आहेत , सणजे जसे या पदांतील ,

१ , २ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , इत्यादि . $१ \times ६४ = २ \times ३२ = ४ \times १६ = ८ \times ८ = ६४$

कोणत्याही भूमितिश्रेढींतील जर

अ अतिलाहान पद दाखवितो

ज्ञ अतिस्रोतें पद _____

र गुणोत्तर _____

स सर्वधन

—

$$2. \quad S = A \times R^{n-1}$$

$$8, n = \frac{\text{ला.अ}}{\text{ला.र}} = \frac{\text{ला.र} + \text{ला.इ} - \text{ला.अ}}{\text{ला.र}}$$

श्रेणी अनंत आहे, तेव्हा अतिलाहान पद अशून्य आहे,
 वन $s = \frac{1}{1-x}$ होतें.

श्रेणी अनंत आहे, तेव्हा अतिलाहान पद अशून्य आहे,
 $s = \frac{1}{1-x}$ होतें.

श्रेणी अनंत आहे, तेव्हा अतिलाहान पद अशून्य आहे,
 वन $s = \frac{1}{1-x}$ होतें.

श्रेणी अनंत आहे, तेव्हा अतिलाहान पद अशून्य आहे,
 वन $s = \frac{1}{1-x}$ होतें.

જેણાં

(१०७)

जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत , असें अ , अर , ब , बर ,
अथवा २ , ६ , ४ , १२ , तेव्हा त्या पदांचीं पुढील कोणतींही रूपें
परस्पर प्रमाणांत होतील .

- १ समरीतीनें अ : अर :: ब : बर ; अथवा २ : ६ :: ४ : १२ ,
- २ व्यस्त — अर : अ :: बर : ब ; ६ : २ :: १२ : ४ ,
- ३ परावर्त — अ : ब :: अर : बर ; २ : ४ :: ६ : १२ ,
- ४ संयुक्त — अ : अ+अर :: ब : ब+बर ; २ : ८ :: ४ : १६ ,
- ५ वियुक्त — अ : अर-अ :: ब : बर-ब ; २ : ४ :: ४ : ८ ,
- ६ मिश्र — अर+अ : अर-अ :: बर+ब : बर-ब ; ८ : ४ :: १६ : ८ ,
- ७ गुणाकार — अक : अरक :: बक : बरक ; २×३ : ६×३ :: ४ : १२ ,
- ८ भागाकार — $\frac{अ}{क} : \frac{अर}{क} :: ब : बर ; १ : ३ :: ४ : १२ ,$
- ९ अ , ब , क , ड , हीं चार पदे समस्वर प्रमाणांत आहेत , जे-
व्हा अ : ड :: अ~ब : क~ड ; अथवा जेव्हा तीं व्युत्क्रम पदे अ , ब ,
क , ड , गणित प्रमाणांत आहेत .

उदाहरणे

प्रथम , एक भूमितिश्रेढीचें प्रथम पद १ आहे , गुणोत्तर २ ,
आणि गळ १२ , इंचें सर्वधन काय होईल .

आतां $१ \times २ = १ \times २०४८$ हें अति सोटें पद आहे .

तेव्हा $\frac{२०४८ \times २ - १}{२ - १} = \frac{४०९६ - १}{१} = ४०९५$ हें इच्छितें सर्वधन .

दुसरें , एक भूमितिश्रेढीचें प्रथम पद ३ आहे , गुणोत्तर ३ ,

आणि

(१०८)

आणि गच्छ ८, तीथें सर्वधन काय होईल.

आतां $३ \times (३) = ३ \times ३ = ९$ हे अतिसोटे पद.

तेव्हां $(३ - ९) \times ३ \div (१ - ३) = (३ - ९) \div ३ = ३ \times ३ = ९$ हे इच्छिलें सर्वधन.

तिसरें . १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि गच्छ २० याचें सर्वधनकाय.

उत्तर १०४८५७५.

चवथें . १, ३, ९, २७, ८१, २४३, इत्यादि गच्छ ८ याचें सर्वधनकाय.

उत्तर १३३३

पांचवें . १, ३, ९, २७, ८१, इत्यादि गच्छ १० याचें सर्वधनकाय.

उत्तर १३३३३

साहायें . १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि गच्छ १०० याचें सर्वधनकाय.

उत्तर १२६७६५०६००२२८२२८४०१४९६७०३२०५३७५

सातवें . कोणा एक मनष्याजवळ बहुत चांगला एक घोडा होता तो कोणी हौशी मनुष्याने पाहुन विकत मागीतला . तेव्हां त्याने आपली प्रतिज्ञा सांगितली किं याचे चार नाल मिळोन चुका ३२ आहेत . त्यास प्रथम चुकेस रेंस ५ पुढें एकेक चुकेस त्याचे याचे दुपटें वाढते

(१०८)

वाढते याचे रुपये जेहोतील ते जो देईल त्यास घोडा मिळेल . खणोन
त्या प्रमाणें त्या होशीस तो घोडा घेणें तर किती रुपये पावे लागतील .

उत्तर ५३८८७००९११००७५
रु० पा० रे०

अनंत श्रेणी

ही अनंतश्रेणी , जांत संयुक्तपद भाजक आहे अशे भागाकारा
पासून आणि संयुक्त करणीपदांचें मूळ काढिल्यापासून उत्पन्न होत्ये ,
अथवा दुसऱ्ये कांहीं सामान्यरीतीने . आणि ती कितीही वाढविली तरी
अंत पावत नाही , जसे अपूर्णांक गणितांत दशांश .

परंतु कित्येक पदे प्रथम उत्पन्न करून , श्रेणीचा मार्ग प्रकट हो-
ईल ; आणि तपशीलाचा श्रम केल्यावांचून अशा रीतीने श्रेणी पुढें
चालविता येईल .

प्रथम कृत्य

अपूर्ण पदांस भागाकारानें अनंतश्रेणीचें रूप दाखवाचें

रीति .

भागाकाररीतीनें अंश छेदानीं भागावे ; आणि हें भागाकार

* या अनंत श्रेणीची रीति डॉक्टर बाहिस साहेब यांहीं प्रथम कामांत आणिली , आ-
णि सन १८५७ दशाब्दीमध्ये त्याणीं गणित पुस्तकें छापिलीं त्यांत अंश हें अपूर्णबीज चा-
लत्ये भागाकारानें भागतां भागतां ही अनंतश्रेणीरीति उत्पन्न केली . अ+अर+अर+
अर+अर+ इत्यादि .

कृत्य

(११०)

कृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावे , सणजे इच्छिती अनंतश्रेणी उत्पन्न होईल .

उदाहरणे

प्रथम $\frac{२अब}{अ+ब}$ यास अनंतश्रेणीचे रूप दे .

$अ+ब) २अब (२ब - \frac{२ब^२}{अ} + \frac{२ब^३}{अ^२} - \frac{२ब^४}{अ^३} +$ इत्यादि .

$\frac{२अब+२ब^३}{२अब+२ब^३}$

$- २ब^२$

$- २ब^२ - २ब^३$

$\frac{अ}{अ}$

$+ \frac{२ब^३}{अ}$

$+ \frac{२ब^३}{अ} + \frac{२ब^४}{अ^२}$

$- \frac{२ब^४}{अ^२}$

$\frac{२ब^४}{अ^२} - \frac{२ब^४}{अ^२}$

$+ \frac{२ब^४}{अ} + \frac{२ब^५}{अ^२}$ इत्यादि .

दुसरे

(१११)

दूसरें $\frac{१-अ}{१+अ}$ यास अनंतश्रेणीचें रूप दे

१-अ) १ (१+अ+अ^२+अ^३+अ^४+ इत्यादि.

$$\begin{aligned} & \frac{१-अ}{१+अ} \\ & +अ-अ^२ \\ & +अ^३-अ^४ \\ & +अ^५-अ^६ \\ & +अ^७-अ^८ \\ & +अ^९-अ^{१०} \\ & +अ^{११}-अ^{१२} \end{aligned}$$

• तिसरें $\frac{ब}{अ+क}$ यास अनंतश्रेणीचें रूप दे

उत्तर $\frac{ब}{अ} \times (१-\frac{क}{अ}+\frac{क^२}{अ^२}-\frac{क^३}{अ^३}+ इत्यादि)$

चौथें $\frac{अ}{अ-ब}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $१+\frac{ब}{अ}+\frac{ब^२}{अ^२}+\frac{ब^३}{अ^३}+ इत्यादि.$

पांचवें $\frac{१-क्ष}{१+क्ष}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $१-२क्ष+२क्ष^२-२क्ष^३+२क्ष^४- इत्यादि.$

साहायें

(११२)

साहाय्ये , $\frac{अ^2}{(अ+ब)^2}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव

उत्तर $१ - \frac{२ब}{अ} + \frac{२ब^2}{अ^2} - \frac{४ब^3}{अ^3} +$ इत्यादि

सातये , $\frac{१}{१+ब} = १ - ब$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव .

दुसरें कृत्य .

संयुक्त करणीपदास अनंतश्रेणीचें रूप घावयाचें .

रीति

गणितरीतीनें त्याचें मूळ काढावें , आणि हें मूळकृत्य इछा आहे पर्यंत वाढवावें , क्षणजे इछिली अनंतश्रेणी उत्पन्न होईल , परंतु ही रीति वर्गमूळ काढायास उपयोगी आहे , आणि याकून सोद्ये घाताचें मूळ काढायास बहुतेक श्रम पडतो .

उदाहरणें

प्रथम $अ-क्ष$ याचें अनंतश्रेणींत मूळ काढ .

$अ-क्ष (अ - \frac{क्ष^2}{२अ} - \frac{क्ष^3}{८अ^2} - \frac{क्ष^4}{१६अ^3} - \frac{५क्ष^5}{१२८अ^4})$ इत्यादि .

$२अ - \frac{क्ष^2}{२अ}$

$\frac{अ^2}{अ^2} - \frac{क्ष^2}{२अ^2} + \frac{क्ष^3}{८अ^3}$

$२अ - \frac{क्ष^2}{अ} - \frac{क्ष^3}{८अ^2}$

$\frac{अ^2}{अ^2} - \frac{क्ष^2}{४अ^2} + \frac{क्ष^3}{८अ^3} + \frac{क्ष^4}{६४अ^4}$

$२अ - \frac{क्ष^2}{अ} - \frac{क्ष^3}{४अ^2} - \frac{क्ष^4}{१६अ^3}$

$\frac{अ^2}{अ^2} - \frac{क्ष^2}{८अ^2} + \frac{क्ष^3}{१६अ^3} + \frac{क्ष^4}{६४अ^4} + \frac{क्ष^5}{२५६अ^5}$

$-\frac{५क्ष^5}{६४अ^5}$ इत्यादि

दुसरें

(११३)

दुसरें, $\sqrt{१+१} = \sqrt{२}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव .

उत्तर $१+३-६+९-१६+२५$ इत्यादि .

तिसरें, $\sqrt{१-१}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव .

उत्तर $१-३-६-९-१६-२५$ इत्यादि .

चौथें, $\sqrt{अ+क्ष}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव .

पांचवें, $\sqrt{अ-२बक्ष-क्ष}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव .

तिसरें कृत्य .

कोणत्याही द्वियुक्पदाचें मूळ काढायाचें , अथवा द्वियुक्पद करणीस अनंतश्रेणीचें रूप घावयाचें .

हे कृत्य पुढील सारणी कोष्टकांपासून होतें , असें किं त्यांतील अक्षरांचे स्थानीं द्वियुक्पदाचीं अक्षरें ठेविल्यानें . स्पणजे .

$(प+पक्ष)^{\frac{म}{न}} = प^{\frac{म}{न}} + \frac{म}{न} अक्ष + \frac{म-१}{२न} बक्ष + \frac{म-२}{३न} कक्ष +$ इत्यादि .

प , प्रथम पद दाखवितो .

अक्ष : दुसरें पद प्रथमाचें अक्षगिलें तें दाखवितो .

$\frac{म}{न}$, घात किंवा मूळ याचा प्रकाशक दाखवितो .

अ , ब , क , ड , इत्यादि अक्षरें त्यांचे त्यांचे पूर्वश्रृंखला पदे दाखवितात -

उदाहरणें

(११४)

उदाहरणें

प्रथम , अ+ब याचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ .

एथे $p = अ$, $q = \frac{ब}{अ}$, $\frac{म}{न} = \frac{१}{२}$ याजकरितां

$\frac{म}{न} = (\frac{अ}{१})^१ = अ = अ$ हें श्रेणीचें प्रथम पद .

$\frac{म}{न}$ अक = $\frac{१}{२} \times अ \times \frac{ब}{अ} = \frac{ब}{२अ} = ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद

$\frac{म-न}{२न}$ बक = $\frac{१-२}{४} \times \frac{ब}{अ} \times \frac{ब}{अ} - \frac{ब}{२ \cdot ४अ} = क$ हें श्रेणीचें तिसरें पद .

$\frac{म-२न}{३न}$ कक = $\frac{१-४}{८} \times - \frac{ब}{२ \cdot ४अ} \times \frac{ब}{अ} = \frac{१ब}{२ \cdot ४ \cdot ६अ} = ड$ हें श्रेणीचें

चौथें पद आहे .

याजकरितां $अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब}{२ \cdot ४अ} + \frac{१ब}{२ \cdot ४ \cdot ६अ} -$ इत्यादि अथवा

$अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब}{८अ} + \frac{ब}{१६अ} - \frac{५ब}{१२८अ} +$ इत्यादि इच्छिली श्रेणी हें उत्तर .

दुसरें, $(अ-ब)$ अथवा त्याचे बरोबर किमतीचे $(अ-ब)$ याची

* ही गति अपूर्ण बीजावर लावायास पुढें सांगितल्या प्रकारां सुगम करावी , तो प्रकार :
आधि हें समजायास योग्य किं कोणतीही करणी छेदस्थळांतून अंशस्थळी आणणें अथवा अंशस्थळांतून छेदस्थळी नेणें हें तीर्थ प्रकाशकचिन्ह बदल करून शक्य आहे , जसें $\frac{१}{२} = १ \times \frac{१}{२}$ अथवा $\frac{१}{२} = \frac{१}{२}$ इतकें माव ; आणि $\frac{(अ+ब)}{२} = १ \times (अ+ब)$ अथवा $\frac{(अ+ब)}{२} = \frac{(अ+ब)}{२}$ इतकें माव ; आणि $\frac{अ}{(अ+ब)} = \frac{अ}{अ} \times \frac{१}{(अ+ब)}$; आणि $\frac{ब}{अ-ब} = \frac{ब}{अ-ब} \times \frac{१}{१}$; आणि $\frac{(अ-ब)}{(अ-ब)} = \frac{(अ-ब)}{(अ-ब)} \times \frac{१}{१}$; इत्यादि .

अनंत

अनंतश्रेणीति किमत काढ .

एथे $p = अ$, $q = -\frac{क्ष}{अ}$, $\frac{m}{n} = \frac{-२}{१} = -२$; याजकरिता
 $\frac{m}{n} = अ^{-२} = \frac{१}{अ^२} = अ$, हे श्रेणीचें प्रथम पद .

$\frac{m}{n}$ अक $= -२ \times \frac{१}{अ} \times -\frac{क्ष}{अ} = \frac{२क्ष}{अ} = २ अक्ष = व$ हे श्रेणीचें
दुसरें पद .

$\frac{m-n}{२n}$ वक $= -\frac{२}{२} \times \frac{२क्ष}{अ} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{२क्ष^२}{अ} = २ अक्ष^२ = क$ हे श्रेणी-
चें तिसरें पद .

$\frac{m-२n}{३n}$ कक $= -\frac{४}{३} \times \frac{२क्ष^२}{अ} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{४क्ष^३}{अ} = ४ अक्ष^३ = ड$ हे श्रेणीचें
चौथें पद .

तेव्हां $अ + २ अक्ष + २ अक्ष^२ + ४ अक्ष^३ +$ इत्यादि .

अथवा $\frac{अ}{अ} + \frac{२क्ष}{अ} + \frac{२क्ष^२}{अ} + \frac{४क्ष^३}{अ} + \frac{५क्ष^४}{अ}$ इत्यादि इच्छिली श्रेणी
हें उत्तर .

तिसरें $\frac{अ^३}{अ-क्ष}$ याची किमत अनंतश्रेणीति काढ .

उत्तर $अ + क्ष + \frac{क्ष^२}{अ} + \frac{क्ष^३}{अ} + \frac{क्ष^४}{अ} + \frac{क्ष^५}{अ}$ इत्यादि .

चौथें $\frac{१}{(अ+क्ष)}$ अथवा $(अ+क्ष)^{-१}$ याची किमत अनंत-
श्रेणीति काढ .

उत्तर

(११६)

उत्तर $\frac{१}{अ} - \frac{क्ष}{२अ} + \frac{३क्ष}{८अ} - \frac{५क्ष}{१६अ}$ इत्यादि.

पांचवें , $\frac{अ}{(अ-ब)}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $१ + \frac{२ब}{अ} + \frac{३ब^२}{अ^२} + \frac{४ब^३}{अ^३} + \frac{५ब^४}{अ^४} +$ इत्यादि.

साहाबें , $\sqrt{अ-क्ष}$ अथवा $(अ-क्ष)^{\frac{१}{२}}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $अ - \frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष^२}{८अ^३} - \frac{क्ष^३}{१६अ^५} - \frac{५क्ष^४}{१२८अ^७}$ इत्यादि.

सातवें , $\sqrt{(अ-ब)}$ अथवा $(अ-ब)^{\frac{१}{२}}$ याची किमत अनंतश्रेणींत काढ .

उत्तर $अ - \frac{ब}{२अ} - \frac{ब^२}{८अ^३} - \frac{५ब^३}{१२८अ^५} -$ इत्यादि.

आठवें , $\sqrt{(अ+क्ष)}$ अथवा $(अ+क्ष)^{\frac{१}{२}}$ याची किमत अनंतश्रेणींत काढ .

उत्तर $अ + \frac{क्ष}{२अ} + \frac{३क्ष^२}{८अ^३} + \frac{५क्ष^३}{१२८अ^५} +$ इत्यादि.

नववें , $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ याचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ .

उत्तर $१ - \frac{ब}{अ} + \frac{ब^२}{२अ^३} - \frac{ब^३}{२अ^५}$ इत्यादि.

दाहाबें : $\frac{अ}{अ+ब}$ याचें घनमूळ अनंतश्रेणींत काढ .

उत्तर $१ - \frac{ब}{३अ} + \frac{२ब^२}{९अ^३} - \frac{४ब^३}{८१अ^५}$ इत्यादि.

अनंतश्रेणी

(११७)

अनंतश्रेणी दुसरा भाग.

प्रथम कृत्य*.

सांगीतल्ये श्रेणीचे पदांचे वजा वाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा करायाचें.

शिति.

१ प्रथम पद दुसऱ्यांतून वजा करावें , तसें दुसरें तिसऱ्यांतून , तिसरें चौथ्यांतून , याप्रमाणें पुढेंही ; या वाक्यांपासून एक नवी श्रेणी उत्पन्न होईल , जीस वाक्यांची प्रथम परंपरा सृणतात .

२ या नव्ये श्रेणींतील प्रथम पद दुसऱ्यांतून वजा करावें , दुसरें तिसऱ्यांतून , या प्रमाणें पूर्ववत् करावें , सृणजे या वाक्यांपासून एक दुसरीश्रेणी उत्पन्न होईल , तीस वाक्यांची दुसरी परंपरा सृणतात .

३ या प्रमाणें पुढें तिसरी चौथी पांचवी इत्यादि वाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढाव्या , बाकी होईपर्यंत , अथवा प्रयोजन आहे पर्यंत -

उदाहरणें.

प्रथम , १ , ४ , ८ , १३ , १९ , २६ , इत्यादि ; या श्रेणीचे वजा वाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ .

※ एकवर्ण समीकरण आणि वर्गसमीकरण ही शिकल्यानंतर हें शिकावें हें बरें आहे .

आतां

(११८)

आता १, ४, ८, १२, १६, २० इत्यादि, सांगीतली श्रेणी-

तेव्हा ३, ४, ५, ६, ७ इत्यादि, प्रथम परंपरा-

आणि १, १, १, १ इत्यादि, दुसरी परंपरा-

आणि ०, ०, ० इत्यादि, तिसरी परंपरा-

सणजे स्पष्ट आहे किं याजवर काम स्तब्ध जालें-

दुसरें, १, ४, ८, १६, ३२, ६४, १२८ इत्यादि, या श्रेणीचे व-
जावाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ-

आतां १, ४, ८, १६, ३२, ६४, १२८ इत्यादि, सांगीतली श्रेणी-

तेव्हा ३, ४, ८, १६, ३२, ६४ इत्यादि, प्रथम परंपरा-

आणि १, ४, ८, १६, ३२ इत्यादि, दुसरी परंपरा-

आणि ३, ४, ८, १६ इत्यादि, तिसरी परंपरा-

आणि १, ४, ८ इत्यादि, चौथी परंपरा-

आणि ३, ४ इत्यादि, पांचवी परंपरा-

आणि १ इत्यादि, साहावी परंपरा-

तिसरें, १, २, ३, ४ इत्यादि, या श्रेणीचे वजावाक्यांचा वेगळा-
ल्या परंपरा काढ-

उत्तर { प्रथम परंपरा १, १, १, १ इत्यादि-
दुसरी परंपरा ०, ०, ०, ० इत्यादि-

चौथें, १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि या वर्गापासून जा-
ल्ये श्रेणीचे वजावाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ-

उत्तर

(११९)

उत्तर { प्रथम परंपरा १, ५, ७, ९ इत्यादि-
दुसरी परंपरा २, २, २ इत्यादि-
तिसरी परंपरा ०, ०, ० इत्यादि-

पांचवें , १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि, या घनांपासून जा-
ल्ये श्रेणीचे वजावाक्यांचा परंपराकाढ .

साहावें , १, ६, २०, ५०, १०५ इत्यादि, या श्रेणीचे व-
जावाक्यांचा परंपरा काढ .

दुसरें कृत्य-

सांगीतल्ये श्रेणीचें कोणतेंही पद काढायाचें -

रीति-

१ अ, ब, क, ड, ई इत्यादि. सांगीतली श्रेणी असावी, आणि
ढ, ड', ड'', ड''' इत्यादि, हीं अक्षरचिन्हें पूर्व रीतीप्रमाणें काढिल्ये
वाक्यांचे परंपरांचीं प्रथमपदे अनुक्रमें दाखवायास असावीं, आणि न
अक्षरचिन्ह इळिल्ये पदाचें स्थळ दाखवायास असावें .

२ तेव्हां $अ + \frac{n-1}{1} \cdot ड + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot ड' + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \cdot ड'' + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \cdot \frac{n-4}{4} \cdot ड''' +$ इत्यादि = न इळिलें पद .

उदाहरणें-

प्रथम , २, ५, ९, १४, २० इत्यादि, या श्रेणीचें दाहावें
पद

पद काट-

आतां २, ५, ९, १४, २० इत्यादि, सांगीतली श्रेणी-

तेव्हां ३, ४, ५, ६ इत्यादि, प्रथम परंपरा-

आणि १, १, १ इत्यादि, दुसरी परंपरा-

आणि ०, ० इत्यादि, तिसरी परंपरा-

यांत $ड' = ३$, $ड'' = १$, $ड''' = ०$ आणि $अ = २$, $न = १०$ याजकरिता
 $अ + \frac{न-१}{१} \cdot ड' + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot ड'' = २ + \frac{१०-१}{१} \cdot ३ + \frac{१०-१}{१} \cdot \frac{१०-२}{२} \times १ = २ + २७$
 $+ ३६ = ६५$ इच्छिलें दाहावें पद हें उत्तर-

दुसरें, २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि, या श्रेणीचें विसावें पद

काट-

आतां २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि, सांगीतली श्रेणी-

तेव्हां ४, ६, ८, १० इत्यादि, प्रथम परंपरा-

आणि २, २, २ इत्यादि, दुसरी परंपरा-

आणि ०, ०, ० इत्यादि, तिसरी परंपरा-

यांत $ड' = ४$, $ड'' = २$, आणि $अ = २$, $न = २०$ याजकरिता
 $अ + \frac{न-१}{१} \cdot ड' + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot ड'' = २ + \frac{१९}{१} \cdot ४ + \frac{१९}{१} \cdot \frac{१९}{२} \cdot २ = २ + ७६ +$
 $३४२ = ४२०$ इच्छिलें विसावें पद आहे हें उत्तर-

तिसरें, १, ३, ६, १० इत्यादि, या श्रेणीचें पांधवें पद
 काय आहे-

उत्तर १५.

चौथें

(१२१)

चौथें , १ , ४ , ८ , १३ , १८ , इत्यादि , या श्रेणीचें दाहावें पद काय आहे -

उत्तर ६४

पांचवें , १ , ८ , २७ , ६४ , १२५ , इत्यादि , या श्रेणीचें विसावें पद काढ -

उत्तर ८०००

• तिसरें कृत्य -

जर सांगितल्ये श्रेणीचीं पदं एकामेथे अंतरानें असतील तर मध्य स्थापनापासून कोणतेंही आंतलें पद काढायाचें .

रीति -

१ स्थापन करायाचें पद दाखवायाकरितां य अक्षर घ्यावें , श्रेणीचे आरंभापासून त्या पदापर्यंत अंतर दाखवायास क्ष घ्यावें , आणि

ड' ड' ड' ड' हीं बाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदं दाखवायास असावीं

२ तेव्हां अ+क्षड'+क्ष. $\frac{क्ष-१}{२}$. ड'+क्ष. $\frac{क्ष-१}{२}$. $\frac{क्ष-२}{२}$. ड'+क्ष. $\frac{क्ष-१}{२}$. $\frac{क्ष-२}{२}$. $\frac{क्ष-३}{४}$. ड'+ इत्यादि म इतिलें पद होईल .

उदाहरणें

प्रथम ३ , ४ , ३ , ५ , ३ , ६ , ३ , ७ आणि ३ , ८

यांची लागतंम भुज्या सांगितली आहे , या पासून ३ , ६ , १५

यांची लागतंम भुज्या काढ -

श्रेणी

(१२२)

श्रेणी	लागरतंम	प०परंपरा	दु०पर०	ति०पर०
३॥४	८०७२८३३६६	२३५९६		
३॥५	८०७३०६८८२	२३३९०	-१२६	९
३॥६	८०७३०२७२	२३२६३	-१२७	-४
३॥७	८०७३५३५३५	२३९४०	-१२३	
३॥८	८०७३७६६७५			

एथे क्ष = (३॥६॥१५ - ३॥४ = २॥१५) = $\frac{१५}{२}$ = य पदाचे स्थापनाचें अंतर ;
 अ = ८०७२८३३६६ , ड' = २३५९६ , ड'' = -१२६ , आणि ड''' = ९ , आणि य =
 अ + क्षड' + क्ष . $\frac{क्ष-१}{२}$. ड'' + क्ष . $\frac{क्ष-१}{२}$. $\frac{क्ष-२}{२}$. ड''' =
 (अ + $\frac{१५}{२}$ ड' + $\frac{१५}{२}$ ड'' + $\frac{१५}{२}$ ड''') = ८०७२८३३६६ + ००५२९९९ -
 ००००१७७१८७५ + ०००००००११७ = ८०७३७६६७५ इच्छिली लागर
 तंम भुज्या आहे -

दुसरे , रे , रे , रे , रे , रे ही सांगीतली श्रेणी आहे ;
 रे आणि रे या दोन पदांचे मधील पद काढ -

उत्तर रे

तिसरे , १॥४ , १॥५ , १॥६ आणि १॥७ यांची लागरतंम भुज-
 ज्या सांगीतली आहे आणि १॥५ , १॥६ यांची लागरतंम भुज्या इ-
 छिली आहे -

उत्तर ८२५७७७७७ -

चौथे

(१२३)

चौथें कृत्य-

मध्यस्थापनानें कोणतेही मधील पद काढायाचें, जेव्हां बरोबर अंतराचे श्रेणीचा प्रथम वाक्या लघु आहेत-

रीति-

१ अ, ब, क, ड, ई, फ, इत्यादि अक्षरचिन्हे सांगीतली श्रेणी दाखवायास घ्यावी, आणि $n =$ सांगीतल्ये पदाची संख्या.

२ तेव्हां $a = \frac{n-1}{2}$, $b = \frac{n-1}{2}$, $c = \frac{n-1}{2}$, $d = \frac{n-1}{2}$, $e = \frac{n-1}{2}$, $f = \frac{n-1}{2}$, $g = \frac{n-1}{2}$, $h = \frac{n-1}{2}$, $i = \frac{n-1}{2}$ इत्यादि $= 0$ या पासून सळकांतर आणि पृथक् करून कोणतेही पद उत्पन्न होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, १०, ११, १२, १३ आणि १५ यांचीं वर्गमूळें सांगीतलीं आहेत. आणि इच्छिलें आहे किं चौदावें वर्गमूळ काढावें.

पथे $n=५$, आणि $i=$ इच्छिलें पद.

$$a = (\sqrt{१०}) ३.१६२२७७६$$

$$b = (\sqrt{११}) ३.३१६६२४८$$

$$c = (\sqrt{१२}) ३.४६४१०२६$$

$$d = (\sqrt{१३}) ३.६०५५५१२$$

$$e = (\sqrt{१५}) ३.८७२९८३३$$

आणि यास्तव $n=५$ आतां श्रेणी, ५ पदे पावेतो वाढविली पाहिजे.

याजकरितां

(१२४)

याजकरिता अ-नब+न. $\frac{n-1}{2}$. क-न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-3}{2}$. ड+न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-3}{2}$. $\frac{n-5}{2}$. ई-न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-3}{2}$. $\frac{n-5}{2}$. $\frac{n-7}{2}$. फ=० नंतर ईचि किमत काढायाकरिता स्थलांतरा-
ने हे उत्पन्न होते . न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-3}{2}$. $\frac{n-5}{2}$. ई=- अ+नब-न. $\frac{n-1}{2}$.
क+न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-3}{2}$. ड+न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-3}{2}$. $\frac{n-5}{2}$. $\frac{n-7}{2}$. फ. या समी-
करणास संरख्येत हे रूप होते . ५. ई=- ३१६२२७७६+(५X३१६६२४०)-
(१०X३४६४१०१६)+(१०X३६०५५५१२)+३०७२८३७=५५५११६१३-
३७८०३२९३६=१८७०८३२५७. आणि ई= $\frac{१८७०८३२५७}{११.६}$ =
१७४१६६५१४ इतिले मूळ अवळ अवळ हे उत्तर .

दुसरे , ३७, ३८, ३९, ४१, आणि ४२ यांची वर्गमूळे सांगितली
आहेत , आणि इतिले आहे कि चाळिसांचे वर्गमूळ काढावे .

उत्तर ६३२४५५५३२

तिसरे , ४५ , ४६ , ४७ , ४८ , आणि ४९ यांची घनमूळे सां-
गीतली आहेत , आणि इतिले आहे कि ५० चे घनमूळ काढावे -

उत्तर ३६८४०३३

पांचवे कृत्य -

सांगीतल्ये श्रेणीस फिरवायाचे .

जेव्हा कोणत्या एक श्रेणीचे पदांमध्ये अव्यक्तपदांचे घात आहे-
त. या अव्यक्तपदांचे किमतीचा शोध , दुसरे श्रेणीतील पदांपासून
होतो , ज्ञा श्रेणीत सांगितल्ये श्रेणीपदांचे बगेवरीचे घात आणि व्य-
क्तपदे तीच असावी .

रीति

(१२५)

रीति

१. अव्यक्त पदाची किमत दाखवायाकरिता एक श्रेणी घे. अशी किंतीचे रूप फिरवायाचे सांगितल्ये श्रेणीचे रूपाचे होईल.

२. ही श्रेणी आणि ईचे घात सांगितल्ये श्रेणीची अव्यक्त पदे आणि घात यांचे स्थळी ठेवावी.

३. उत्पन्न जालेली ती पदे सांगितल्ये श्रेणीतील त्या त्या प्रतियोगी पदांचे बरोबर करूनी स्मरण घेतल्ये वेळापकाशकाची किमत उत्पन्न होती.

उदाहरण.

प्रथम . अक्ष+वक्ष+कक्ष+इक्ष+इत्यादि=क्ष. ही सांगितली श्रेणी असावी. यातील क्षची किमत सपदांत आणि व्यक्त पदांत काढावी.

आता क्ष=क्ष घे. तेव्हा स्पष्ट आहे कि जर क्ष आणि त्याचे ही घात सांगितल्ये श्रेणीमध्ये क्ष आणि त्याचे घात यांचे स्थळी ठेविलेतर जे घातमकाशक हे होतील, न, २न, ३न, ४न, इत्यादि, आणि १, याजकरिता न=१, आणि या घात प्रकाशकाचा वजावाक्याची आद्वेत, ०, १, २, ३, ४, इत्यादि. स्मरण घे या कारणास्तव घ्यावयाचे श्रेणीचे घातप्रकाशकांचाही वजावाक्या अशाच असाव्या. स्मरण घेतली श्रेणी हीच असावी, अज+वज+कज+इज+इत्यादि=क्ष. आणि जर ही श्रेणी वर्गादिकेकरून वाढविली आणि क्षचे वेगळे ल्ये

ये वर्गोदघातस्थली ठविली तर सांगीतल्ये श्रेणीस हें रूप होईल :

अ अज + अवज + अकज + अडज + इत्यादि

* + व अज + २ व अवज + २ व अकज + इत्यादि

* * * + व वज + इत्यादि } = ज

* * + क अज + २ क अवज + इत्यादि

* * * + ड अज + इत्यादि

आतां यांत तीं पदे जात जेचे सारिले घात आदेश त्यांस समकृत न ही उत्पन्न होतात-

(अ अज = ज) अथवा अ = $\frac{ज}{अ}$

(अ वज + व अज = ०) अथवा व = $(-\frac{व अ}{अ}) = -\frac{व}{अ}$

(अ कज + २ व अवज + क अज = ०) अथवा क = $(-\frac{२ व अवज + क अ}{अ}) = \frac{२ व - अ}{अ}$

ड = $(-\frac{२ व अक + व व + २ क अव + ड अ}{अ}) = \frac{२ अक - २ व - अड}{अ}$ इत्यादि

आणि आजकरीता क्ष = (अज + वज + कज + इत्यादि) = $\frac{ज}{अ} - \frac{वज}{अ} +$

$\frac{अ - अक}{अ} \cdot ज - \frac{२ व - अवक + अड}{अ} \cdot ज + इत्यादि$, ही इच्छिती श्रेणी आली.

आणि ही उत्पन्न जावळी श्रेणी जात सांगीतल्ये श्रेणीचे अव्यक्त पदांचे घातां सारिले घात आदेश त्यांस, ही साधारण साखणी कोष्टक आहे.

• दुसरे, क्ष - क्ष + क्ष - क्ष + इत्यादि = ज, ही श्रेणी फिरवायास इच्छिती आहे.

एथे अ=१, ब=-१, क=१, ड=-१ • इत्यादि, या किमती पूर्व उदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होते: क्ष=अ+अ+अ+अ+ इत्यादि, हें इच्छिते उत्तर.

तिसरे, क्ष- $\frac{क्ष}{२}$ + $\frac{क्ष}{२}$ - $\frac{क्ष}{२}$ + इत्यादि = य, ही श्रेणी फिर वायाची आहे.

एथे पूर्वप्रमाणेकरून अ=१, ब=- $\frac{१}{२}$, क= $\frac{१}{२}$, ड=- $\frac{१}{२}$ या किमती पूर्व उदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होते, क्ष=य+ $\frac{य}{२}$ + $\frac{य}{२}$ + $\frac{य}{२}$ + इत्यादि.

साहाय्यकृत्यः

काण्येही अनंतश्रेणीचे नपदे पर्यंत सर्वधन काढावाचें.
रीति.

१. अ, ब, क, ड, इ, इत्यादि अक्षरचिन्हे सांगितली श्रेणी दाखवायासचे, स=नपदपर्यंत सर्वधन, आणि ड', ड'', ड''', ड'''' इत्यादि चिन्हे प्रथमकृत्याप्रमाणे वाक्यांचा वेगळा त्या परंपरा दाखवायासचे.

२. तेव्हा नअ+न. $\frac{न-१}{२}$, ड+न. $\frac{न-१}{२}$, $\frac{न-३}{२}$, ड'+न. $\frac{न-१}{२}$, $\frac{न-३}{२}$, $\frac{न-५}{२}$, ड+न. $\frac{न-१}{२}$, $\frac{न-३}{२}$, $\frac{न-५}{२}$, $\frac{न-७}{२}$, ड'+इत्यादि=स हें नपद पर्यंत श्रेणीचे इच्छिते सर्वधन आहे.

प्रथमप्रकार १, २, ३, ४, ५, इत्यादि, नपदपर्यंत श्रेणीचे

(१२८)

चें सर्वधन काढायाचा :

आतां १, २, ३, ४, ५ इत्यादि सांगीतली श्रेणी.

१, १, १, १ इत्यादि प्रथम परंपरा.

१, ०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथे $अ=१$, $ड=१$, $ड''=०$ तेव्हां $नअ+न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot ड'' =$
 $\frac{२नअ+न-न \cdot ड''}{२} = \frac{(२न+न-न)}{२} = \frac{न \cdot न+१}{२} = स$ इतिलें सर्वधन :

उदाहरणें.

प्रथम, पूर्वश्रेणीचें २० पदे पर्यंत सर्वधन इतिलें आले.

एथे $न=२०$ आणि $स = \frac{न \cdot न+१}{२} = \frac{२० \times २१}{२} = २१०$ सर्वधन इतें.

उत्तरें.

दुसरें, पूर्वश्रेणीचें १००० पदे पर्यंत सर्वधन काढ.

उत्तर ५००५००

तिसरें, पूर्वश्रेणीचें १२३४५ पदे पर्यंत सर्वधन काढ.

दुसरा प्रकार १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि नपद पर्यंत श्रेणी

चें सर्वधन काढायाचा :

आतां १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि सांगीतली श्रेणी.

२, २, २, २ इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथे

(१३९)

एथे अ=१, ड=२, ड'=०, तेहां नअ+न. $\frac{n-1}{2}$. ड'=(नअ+
न. $\frac{n-1}{2}$. ड'=(याजकरितां अ=१ आणि ड=२) (न+न'-न=) न'=स इति
लें सर्वधन-

उदाहरणें-

प्रथम, पूर्वश्रेणीचें १० पदे पर्यंत सर्वधन काढ-

एथे न=१०, आणि स=(न') १०० सर्वधन हें उत्तर-

तिसरा प्रकार, १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि वर्गोंचे श्रेणी
चें न पदे पर्यंत सर्वधन काढावा-

आतां १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि सांगीतली श्रेणी-

२, ५, ८, ९ इत्यादि प्रथम परंपरा-

२, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा-

०, ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा-

एथे अ=१, ड=३, ड'=२, ड''=०, तेहां नअ.न. $\frac{n-1}{2}$. ड'+
न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-2}{2}$. ड''=(न+३न. $\frac{n-1}{2}$ + २न. $\frac{n-1}{2}$. $\frac{n-2}{2}$ = $\frac{n^2-n}{2}$ + $\frac{n^2-n-2n}{2}$)
 $\frac{n \cdot n + 9 \cdot 2 + 9}{2}$ = स इतिलें सर्वधन-

उदाहरणें-

प्रथम, पूर्वश्रेणीचें ३० पदे पर्यंत सर्वधन काढ-

एथे न=३० याजकरितां $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{30 \times 31 \times 61}{6} = ९४५५$ सर्व
धन हें उत्तर-

कोष्ठक पृ० १०१ पाहा

सातवें

(१३०)

सातवें कृत्य.

वजाबाकीचे शितीने श्रेणीचे सर्वधन काढायाचे.

ही शिती दोन अथवा तीन सोप्ये उदाहरणां पासून प्रकट हो-

ईल -

प्रथम उदाहरण.

१ + २ + ३ + ४ + इत्यादि पदे अनंत = स ही सांगीत-
ली श्रेणी, ईचे सर्वधन काढ -

तर १ + २ + ३ + ४ + इत्यादि अनंत = स - १
वजाबाकीने २ + ३ + ४ + ५ + इत्यादि अनंत = १ सर्वध-
न हें उत्तर -

दुसरें.

१ + २ + ३ + ४ + इत्यादि पदे अनंत = स, ही सांगी-
तली श्रेणी, ईचे सर्वधन काढ -

तेव्हां १ + २ + ३ + ४ + इत्यादि पदे अनंत = स - ३
वजाबाकीने २ + ३ + ४ + ५ + इत्यादि = ३
अथवा
याणीभायून २ + ३ + ४ + ५ + इत्यादि = ३ सर्वधन हें
उत्तर -

तिसरें.

२ + ३ + ४ + ५ + इत्यादि पदे अनंत = स, ही सां-
गीतली श्रेणी, ईचे सर्वधन काढ -

तेव्हां

(१३१)

तेव्हां $\frac{१.२.३}{१.२.३} + \frac{१.२.४}{१.२.४} + \frac{१.२.५}{१.२.५} +$ इत्यादि पदे अनंत = स-३
 वजाबाकीने $\frac{१.२.३}{१.२.३} + \frac{१.२.४}{१.२.४} + \frac{१.२.५}{१.२.५} +$ इत्यादि = ३
 अथवा
 श्रेणीभागून $\frac{१.२.३}{१.२.३} + \frac{१.२.४}{१.२.४} + \frac{१.२.५}{१.२.५} +$ इत्यादि = ३
 चवथें-

$\frac{१.२.३.४}{१.२.३.४} + \frac{१.२.३.५}{१.२.३.५} + \frac{१.२.४.५}{१.२.४.५} +$ इत्यादि पदे अनंत आहेत,
 या श्रेणीचें सर्वधन काढ -

आतां प्रत्येक वेदांचे दोवटील गुणक सोड आणि,

$\frac{१.२.३}{१.२.३} + \frac{१.२.४}{१.२.४} + \frac{१.२.५}{१.२.५} +$ इत्यादि = स. पे.
 तर $\frac{१.२.३}{१.२.३} + \frac{१.२.४}{१.२.४} + \frac{१.२.५}{१.२.५} +$ इत्यादि = स-३
 वजाबाकीने $\frac{१.२.३.४}{१.२.३.४} + \frac{१.२.३.५}{१.२.३.५} + \frac{१.२.४.५}{१.२.४.५} +$ इत्यादि = ३
 अथवा
 श्रेणीभागून $\frac{१.२.३.४}{१.२.३.४} + \frac{१.२.३.५}{१.२.३.५} + \frac{१.२.४.५}{१.२.४.५} +$ इत्यादि = ३ सर्वधन हें
 उत्तर.

पाचवें-

$\frac{१.२.३.४.५}{१.२.३.४.५} + \frac{१.२.३.४.६}{१.२.३.४.६} + \frac{१.२.३.५.६}{१.२.३.५.६} + \frac{१.२.४.५.६}{१.२.४.५.६} +$
 इत्यादि पदे अनंत आहेत, या श्रेणीचें सर्वधन काढ -

उत्तर ३६६

साहायें-

$\frac{१.२.३.४.५.६}{१.२.३.४.५.६} + \frac{१.२.३.४.६.७}{१.२.३.४.६.७} + \frac{१.२.३.५.६.७}{१.२.३.५.६.७} + \frac{१.२.४.५.६.७}{१.२.४.५.६.७} +$
 इत्यादि पदे अनंत आहेत, या श्रेणीचें सर्वधन काढ -

उत्तर

२६६
 आठवें

(१३२)

आठवें छान्द-

अनंतश्रेणीचें सर्वधन काढायाचें , ती अनंतश्रेणी कोणतेही अपूर्णपद वाढविल्यापासून उत्पन्न जाली असें कल्पून-

रिति-

सांगीतली श्रेणी एक अपूर्णपदाचे बरोबर करावी , जा अपूर्णपदाचे छेदांहीं ती श्रेणी गुणिली तर गुणाकार सांत होईल . हा गुणाकार घेतल्ये अपूर्णपदाचे अंशांबरोबर असून त्याची किंमत निघेल -

उदाहरणें-

प्रथम , क्ष+क्ष+क्ष+ इत्यादि अनंत पदें आहेत , या श्रेणीचें सर्वधन काढ-

आतां सांगीतली श्रेणी = $\frac{क्ष}{१-क्ष}$, ये .

तेव्हां क्ष+क्ष+क्ष+ इत्यादि-

गुणिली १-क्ष

क्ष+क्ष+क्ष+ इत्यादि-

- क्ष+क्ष+क्ष+ इत्यादि-

क्ष = क्ष * *

याअकरितां क्ष+क्ष+क्ष+ इत्यादि = $\frac{क्ष}{१-क्ष}$

असें जर क्ष = ३ तर ३+३+३+ इत्यादि = $३ \div ३ = १$

जर क्ष = ३ तर ३+३+३+ इत्यादि = $३ \div ३ = ३$ सर्वधन हें उ०

इसरे

(१३३)

दुसरे , $क्ष + २क्ष^२ + ३क्ष^३ +$ इत्यादि अनंत पदों , या श्रेणीके सर्वधन काट-

$$\text{आतां सांगीतली श्रेणी} = \frac{क्ष}{(१-क्ष)^२} = \frac{क्ष}{१-२क्ष+क्ष^२}$$

तेका $क्ष + २क्ष^२ + ३क्ष^३ +$ इत्यादि-

$$\text{गुणिली } \frac{१-२क्ष+क्ष^२}{क्ष + २क्ष^२ + ३क्ष^३ +}$$

इत्यादि-

इत्यादि-

+ क्ष + इत्यादि-

$$क्ष = क्ष \quad * \quad *$$

$$\text{याजकरितां } क्ष + २क्ष^२ + ३क्ष^३ + \text{ इत्यादि} = \frac{क्ष}{(१-क्ष)^२}$$

$$\text{अर } क्ष = \frac{१}{२} \text{ , तर , } \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \text{ इत्यादि} = \frac{१}{२} \div \frac{१}{२} = २$$

$$\text{अर } क्ष = \frac{१}{३} \text{ , तर , } \frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \text{ इत्यादि} = \frac{१}{३} \div \frac{१}{३} = ३$$

सर्वधन हें उत्तर-

आणि या प्रमाणें पुढेही आणखी प्रकार-

तिसरे $क्ष + ४क्ष^२ + ९क्ष^३ + १६क्ष^४ +$ इत्यादि , या अनंत श्रेणीके सर्वधन काट-

$$\text{उत्तर } \frac{क्ष(१+क्ष)}{(१-क्ष)^३}$$

समीकरण

समीकरण क्षणजे बीज गणिताचा एक भाग आहे, जो अव्यक्तपदांचा किमती त्या पदांचा दुसऱ्या व्यक्तपदांशी जो संबंध आहे त्याचे साहाय्याने काढायाचा वेगळ्या रीति दारखवितो.

कित्येक बीजगणित संबंधी उद्देशक परस्पर बरोबर केल्यापासून हें होतें; याबरोबर केल्ये उद्देशकांस समीकरण क्षणतात नंतर याचे गतीप्रमाणें गणित करीत चालतो. व्यक्तपद त्या समीकरणाचे बाजूंस एकाकी राहीपर्यंत, क्षणजे ते दुसऱ्या बाजूला सांगीतल्ये व्यक्तपदांचे बरोबर होईल.

जां पदांपासून समीकरण सुसंपन्न जालें त्यांपदांस समीकरणाचीं पदे क्षणतात; आणि बरोबरीचा = या चिन्हाचे दोहोपदे जे उद्देशक लिहिले आहेत, त्यांस समीकरणाचे दोन भाग अथवा दोन बाजू क्षणतात.

जसें जर $क्ष = अ + ब$ यांत क्ष, अ, आणि ब हीं तीन पदे आहेत; आणि या उद्देशकाचा अर्थ हाच किं कोणतेंही पद क्ष समीकरणाची डावी बाजू, त्याची उजवी बाजू अ आणि ब हीं दोन पदे आहेत त्यांचे बेरिजे बरोबर आहे.

एकवर्ण समीकरण क्षणजे तेंच होय, जांत अव्यक्तपदांचे प्रथम घात मात्र येतात.

जसें $क्ष + अ = ३ब$ अथवा $अक्ष = बक$ अथवा $क्ष +$

३अ=५, बं. यांत क्ष अव्यक्तपद दारववितो ; आणि दुसरी अक्षर चिन्हें आणि अक्षर व्यक्तपदें दारववितात.

अनेकवर्णसमीकरण तेंच होय, जांत अव्यक्तपदांचे दोन किंवा अधिक वेगळाले घात येतात.

जसें क्ष+अक्ष=ब अथवा क्ष-४ क्ष+३ क्ष=२५

या समीकरणाचा जाती अथवा नावें त्यांतील अव्यक्तपदांचे सर्वांहून मोठे घात, त्यांवरून तशीं तशीं होतात अशीं वर्णसमीकरणे घनसमीकरण, चतुर्घातसमीकरण इत्यादि

वर्णसमीकरण तेंच होय, जांत अव्यक्तपद दोन घातांचें आहे अथवा दुसरा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें क्ष=२ अथवा क्ष+अक्ष=ब अथवा ३क्ष+१०क्ष=१००

घनसमीकरण तेंच होय, जांत अव्यक्तपद तीन घातांचें आहे, अथवा तिसरा घातपर्यंत चढतें आहे

जसें क्ष=२७ अथवा २क्ष-३ क्ष=३५ अथवा क्ष-अक्ष+बक्ष=क

चतुर्घातसमीकरण तेंच होय, जांत अव्यक्तपद चार घातांचें आहे, अथवा चवथा घातपर्यंत चढतें आहे

जसें क्ष=२५ अथवा ५ क्ष-४ क्ष=६ अथवा क्ष-अक्ष+बक्ष-कक्ष=३, इत्यादि समीकरणांस पंचघात, षड्घात, आणि यांहून अधिक महत्त्व जातीचीं उपपदें लागतात. या सर्वांस अव्यक्त पदांत

पदांत सर्वांकून मोठा घात येतो तशी नावे होतात .

समीकरणाचें मूळ तशी संख्या किंवा पद आहे, जें अव्यक्त पदांचे स्थानी ठेविलें असतां समीकरणाचा दोनही बाजू परस्पर उडतील, अथवा बरोबर होतील .

एकवर्णसमीकरणास एकच मूळ होतें , परंतु अनेकवर्ण समीकरणास तितकीं मूळे होतात , त्याचें अव्यक्तपदांत जित के घात आहेत , अथवा त्यांतील पदांत सर्वांकून मोठा घात प्रकाशक आहे , त्याचें संख्ये इतकीं मूळे होतात त्यांनीं निरवारक वितो .

जसें $x^2 + 2x = 9$, या वर्गसमीकरणांत मूळ किंवा x अव्यक्तपदाची किंमत $+3$ आहे, किंवा -6 , आणि $x^2 - 9$, $x^2 + 2x - 9$ या घनसमीकरणांचीं मूळे $2, 3$, आणि 4 हीं आहेत, त्याजें या तिहींतून कोणतेंही एक x चे स्थळीं ठेविलें असतां या समीकरणाचा दोनही बाजू उडतील, अथवा बरोबर होतील .

एकवर्ण समीकरण द्व्यंशकरणाची रीति जांत एकच अव्यक्त पद आहे .

एकवर्णसमीकरण, तशीं सर्व समीकरणें, यांची कृति ही आहे, किं सर्व समीकरणांचा उदाहरणांत अव्यक्त पदाची किंमत काढिये समयां तें कोणत्याही दुसरे व्यक्तपदाशी संबध असेल

(१३७)

असेल त्यास तेथून सोडवून एक बाजूस लिहावे आणि बाकी व्य-
क्त पदे दुसऱ्या बाजूस लिहावीं हेच करायाकरितां वेगळालीं प्रत्यक्ष
प्रमाणे आणि कृती घेतली पाहिजे. सणोन या दोहोंतील सर्वांहून
उपयोगी जीं आहेत तीं सांगतो.*

प्रथम प्रकार

समीकरणाचे कोणत्याही पदाचे स्थळांतर त्या पदाचे चिन्ह ब-
दल करून एक दोहंतून काढून दुसऱ्या बाजूंत कर्ता येईल असें के-
ले असताही दोनी बाजू किमतींत बराबरच राहातील -

१. असे जर $क्ष + ३ = ७$ तर $क्ष = ७ - ३$ सणजे $क्ष = ४$

आणि जर $क्ष - ४ + ६ = ८$ तर $क्ष = ८ + ४ - ६$ सणजे $क्ष = ६$

२. आणि जर $क्ष - अ + ब = क - ड$ तर $क्ष = क - ड + अ - ब$.

आणि जर $४क्ष - ८ = ३क्ष + २०$ तर $४क्ष - ३क्ष = २० + ८$ सणजे $क्ष = २८$

* हे काम करायाची कृति यापुढील प्रत्यक्ष प्रमाणापासून प्रकर होत्ये -

१. दोन समपदांत एकच पद प्रत्यक्षांत नेळविलें अथवा वजाकेंलें तर दोन बरिजा अ-
थवा दोन बाक्या (२ आणि ३ प्र० प्र०) बरोबर होतील. सणोनच एक बाजूचे पद दुसऱ्या बा-
जूस आणिले तर त्याचें धन ऋणचिन्ह असेल ते बदल होते हेही तसेच आहे -

२. कोणतीही दोन समपदे एकच पदानें प्रत्यक्ष गुणिलीं अथवा भागिलीं तर त्या-
चे दोन गुणाकार अथवा दोन भागाकार (७० आणि ७१ सि० प्र०) बरोबर होतील -

३. कोणतीही एकाकी पदे किंवा संयुक्तपदे परस्पर बरोबर असतील तर त्या प-
दांचे कोणतेही सारखे घात अथवा मूळे हीं (७४ सि० प्र०) बरोबर होतील -

आणि पुढील साहा प्रकारांचे उदाहरणांतील वेगळ्याचे कृती वरून ही सर्व प्र-
त्यक्ष उघड होतील -

या

(१३८)

या रीतीपासून हे निघते कि जर दोनही बाजूंस पदे एकरूप आणि एकच चिन्हांने युक्त आहेत तर तीं त्या दोनही बाजूंतून टाकितां येतील आणि कोणत्याही समीकरणाचे सर्वपदांचीं चिन्हे बदल करितां येतील किंमत आहेतीच राहील -

जसे जर $क्ष + ५ = ७ + ५$ तर रद करण्याचे रीतीनें $क्ष = ७$

आणि जर $अ - क्ष = ब - क$ तर $क्ष - अ = क - ब$ म्हणजे

$क्ष = अ + क - ब$

दुसरा प्रकार.

कोणत्याही समीकरणांत जर अव्यक्तपद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह या गुणकानें गुणिलें जोडिलें आहे तर त्या गुणकानें सर्व दुसरीं पदे भागून तो गुणक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल आणि जर अव्यक्तपद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह या भाजकानें भागायाचें जोडिलें आहे तर त्या भाजकानें सर्व दुसरीं पदे गुणून तो भाजक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल -

जसे जर $अक्ष = ३अब - क$ तर $क्ष = ३ब - \frac{क}{अ}$

आणि जर $२क्ष + ४ = १६$ तर $क्ष + २ = ८$ म्हणजे

$क्ष = ८ - २ = ६$

आणि जर $\frac{क्ष}{२} = ५ + ३$ तर $क्ष = १० + ६ = १६$

आणि

(१३९)

आणि जर $\frac{३६}{२} - २ = १६$ तर $२६ - ६ = १२$ तर भागाकारानें
 $६ - ३ = ३$ अथवा $६ = ३ + ३ = ६$

तिसरा प्रकार

जर कोणत्याही समीकरणांत काहीं अपूर्णबीजपदें असतील तर त्या अपूर्णबीजपदांचे छेद उडवितां येतील जे प्रतिपदाचे छेदांनीं अनुक्रमें त्या त्या पदावांचून राहिलीं सर्वपदें गुणित्यापासून अथवा अपूर्णबीजपदांचे सर्वछेद परस्पर गुणून त्या गुणाकारानें सर्वपदें गुणित्यापासून किंवा दोनही बाजूंतील सर्वपदें सर्वछेदांचे लघुतम साधारण गुणाकारानें गुणित्यापासून

असें

* साधारण गुणाकार म्हणजे एक संख्या आहे जींत दुसरी कोणतीही संख्या कित्येक वेळा बरोबर आले

जसे ६ ही संख्या २ या संख्येच्या साधारण गुणाकार आहे कारण ६ यांतून २ बरोबर ३ वेळा जातात

आणि १२ ही संख्या ६, ४, ३, या प्रत्येक संख्यांच्या साधारण गुणाकार आहे कारण १२ यांत प्रथम संख्या ६ बरोबर २ वेळा जातात तसें दुसरी संख्या ४ बरोबर ३ वेळा जातात आणि तिसरी संख्या ३ बरोबर ४ वेळा जातात

कित्येक संख्यापदांच्या लघुतम साधारण गुणाकार काढायाची रीति-

कित्येक संख्यापदें आहेत त्यांत वहुतपदें कोणत्या संख्येनें बरोबर भागलीं जातील तें पाहून तो भाजक त्या ओळीचे भाजकस्थळीं लिहून जीं भागतील त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे रवालीं लिहावे आणि जीं न भागत तीं तशीं त्यांचे रवालीं लिहावीं नंतर पुनः पूर्वप्रमाणेच दुसरा भाजक काढून त्या दुसऱ्या ओळीत प्रथमतः करावें, या प्रमाणे करितां कदाचित् दोयदास दोन पदें पर्यंत नव्हे भागलीं जात तर ते सर्व भाजक आग्निर्मी राहिलीं पदें परस्पर गुणून तो गुणाकार साधारण लघुतम गुणाकार आला असें जाणावें

उदाहरण

(१४०)

जसे जर $\frac{क्ष}{५} + \frac{क्ष}{४} = ५$ तर प्रथम पदाचे छेद ३ याणीं रीतीप्रमाणें गुणित्यानें $क्ष + \frac{३क्ष}{४} = ५५$ पुनः सहित्ये पदाचे छेद ४ याणीं गुणित्यानें $४क्ष + ३क्ष = ६०$ नंतर मिळवणीनें $७क्ष = ६०$ आतां भागाकारानें $क्ष = \frac{६०}{७} = ८ \frac{४}{७}$

आणि जर $\frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{६} = १०$ तर $४ \times ६ = २४$ क्षणजे या सर्व छेदांचे गुणाकारानें समीकरणाचा दोनी बाजू गुणित्यानें $\frac{३क्ष}{४} + \frac{२क्ष}{६} = २४०$ अथवा $६क्ष + ४क्ष = २४०$ नंतर मिळवणीनें $१०क्ष = २४०$ आतां भागाकारानें $क्ष = \frac{२४०}{१०} = २४$

आणि जर $\frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{६} = १०$ तर ४ आणि ६ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार १२ याणीं समीकरणाचा दोनी बाजू गुणित्यानें $\frac{१२क्ष}{४} + \frac{१२क्ष}{६} = १२०$ अथवा $३क्ष + २क्ष = १२०$ नंतर मिळवणीनें $५क्ष = १२०$ आतां भागाकारानें $क्ष = \frac{१२०}{५} = २४$

या रीतीवरून कळतें किं जर एकच संख्या अथवा अक्षर चिन्ह समीकरणाचे दोन बाजूंस गुणक अथवा भाजक अशा रीतीनें

उदाहरण.

७, १५, ४२, २०, २४ या संख्यापदांचा साधारण लघुतम गुणाकार कर.

+	७	१५	४२	२०	२४
+	५	५	५	२०	२४
+	६	६	६	४	२४
+	४	४	४	४	४
	१	१	१	१	१

तर $७ \times ५ \times ६ \times ४ = ८४०$ हा त्या सर्व पदांचा लघुतम साधारण गुणाकार होय.

दुसरे

दुसर्ये पदांशीं संयुक्त होउन असेल तर ती साधारण संख्या अथवा ते अक्षरचिन्ह त्या दोनही बाजूंतून उडवितां येईल परंतु किमत आहे तीच आहे.

जसे जर $अक्ष = अव + अक$ तर रद केल्याने $क्ष = ब + क$
 आणि जर $\frac{क्ष}{अ} + \frac{ब}{अ} = \frac{क}{अ}$ तर रद केल्याने $क्ष + ब = क$ म्हणजे $क्ष = क - ब$

चवथा प्रकार

जरी जर कोणत्याही समीकरणात अव्यक्तपद करणीरूप आहे तर (१ प्रकाराप्रमाणे) सर्व पदांस स्थळांतर करावे असे किं अव्यक्तपद समीकरणाचे एक बाजूस एकलें येईल आणि राहिलीं सर्व पदे दुसर्ये बाजूस येतील नंतर समीकरणाचा दोनही बाजू करणीचा घातापर्यंत वाढवाव्या म्हणजे उद्देशक समीकरण खंडपदापासून मुक्त होईल

जसे जर $\sqrt{क्ष-२} = ३$ तर स्थळांतराने $\sqrt{क्ष} = ३ + २ = ५$ नंतर वर्ग केल्याने $क्ष = २५$

आणि जर $\sqrt{३क्ष+४} = ५$ तर वर्ग केल्याने $३क्ष+४ = २५$ नंतर स्थळांतराने $३क्ष = २५ - ४ = २१$ आणि भागाकाराने $क्ष = \frac{२१}{३}$
 $= ७$

आणि जर $\sqrt{२क्ष+३} + ४ = ८$ तर स्थळांतराने

$$\sqrt{२क्ष+३}$$

(१४२)

$\sqrt{२६५+३}=८-४=४$ नंतर घन केल्याने $२६५+३=४^३=६४$ पुनः स्थळांतराने $२६५=६४-३=६१$ आतां भागाकाराने $६१=\frac{६१}{१}=६१$

पांचवा प्रकार-

जर समीकरणाचे बाजूंत अव्यक्तपद कोणताही एक पूर्ण घात असेल तर त्या समीकरणाच्या या रीतीने संक्षेप केला जातो जे समीकरणाचे दोनही बाजूंचे पदांचे त्या पूर्ण घाताचे मूळ काढावे

जसे जर $६९=८१$ तर $६९=८१=९$

आणि जर $६९=२७$ तर $६९=२७=३$

आणि जर $३६-९=२४$ तर स्थळांतराने $३६=२४+९=३३$ नंतर भागाकाराने $३३=\frac{३३}{१}=३३$ नंतर वर्गमूळ काढिल्याने $३३=\sqrt{११२}$

आणि जर $६९+६९+९=२७$ तर विचारें पाहतां करणाचे डाव्ये बाजूंत एक पूर्ण घात म्हणजे वर्ग आहे तेव्हा वर्गमूळ काढिल्याने $६९+३=१२७=\sqrt{१२७}=३/३$ तर स्थळांतराने $६९=३/३-३$

साहावा प्रकार-

कोणत्याही प्रमाणास त्याचे दोन शेषपदांच्या गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकाराबराबर आहे तो केल्याने समीकरणाचे रूप देता येईल.

जसे जर $३६ : १६ :: ५ : ६$ तर $३६ \times ६ = १६ \times ५$

अथवा

(१४३)

अथवा १८ क्ष = ८० तर भागाकारानें क्ष = $\frac{६०}{४} = १५ = ४ \frac{५}{४}$

आणि जर $\frac{३क्ष}{५} : अ :: ब : क$ तर $\frac{३क्ष}{५} \times क = अ \times ब$ अथ-
वा $\frac{३क्षक}{५} = अब$ गुणाकारानें २ क्षक = ५ अब भागाकारानें क्ष = $\frac{५अब}{२क}$

आणि जर १२-क्ष : $\frac{१५}{४} :: ४ : १$ तर १२-क्ष = २ क्ष तर स्थळांतरानें १२ = २ क्ष + क्ष = ३ क्ष भागाकारानें क्ष = $\frac{१२}{३} = ४$

पूर्व प्रकारांचीं वेगळालीं उदाहरणे

प्रथम ७ क्ष-१८ = ४ क्ष+६ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय

आतां ७ क्ष-१८ = ४ क्ष+६

स्थळांतरानें ७ क्ष-४ क्ष = ६+१८

तर . . . ३ क्ष = २४

भागाकारानें . . . क्ष = $\frac{२४}{३} = ८$ हें उत्तर.

दुसरें २०-४ क्ष-१२ = १२-१० क्ष या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे याची किंमत काय

आतां २०-४ क्ष-१२ = १२-१० क्ष

स्थळांतरानें १० क्ष-४ क्ष = १२-२०+१२

तर . . . ६ क्ष = ८

भागाकारानें . . . क्ष = $\frac{८}{६} = १ \frac{४}{३}$ हें उत्तर.

तिसरें ४ अक्ष-५ ब = ३ इक्ष+२ क या समीकरणांत क्ष

अव्यक्त

(१४४)

अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय .

आतां ४ अक्ष-५ ब = ३ उक्ष + २ क

स्थळांतरानें ४ अक्ष-३ उक्ष = ५ ब + २ क

तर ४ अ-३ उ याणीं भागून क्ष = $\frac{५ ब + २ क}{४ अ - ३ उ}$ हें उत्तर .

चवथें ५ क्ष^२-१२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^२ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय .

आतां ५ क्ष^२-१२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^२ यांत सर्वपदांचा साधारण गुणक क्ष

याणे तीं भागून ५ क्ष-१२ = ९ + २ क्ष

स्थळांतरानें ५ क्ष-२ क्ष = १२ + ९

तर ३ क्ष = २१

भागाकारानें क्ष = $\frac{२१}{३}$ = ७ हें उत्तर .

पांचवें ९ अक्ष^२-१५ अवक्ष^२ = ६ अक्ष^२+१२ अक्ष^२ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय .

आतां ९ अक्ष^२-१५ अवक्ष^२ = ६ अक्ष^२+१२ अक्ष^२ यांत सर्वपदांचा साधारण गुणक ३ अक्ष^२

याणे तीं भागल्यानें ३ अक्ष-५ ब = २ क्ष + ४

स्थळांतरानें ३ अक्ष-२ क्ष = ५ ब + ४

तर ३ अक्ष-२ क्ष = ५ ब + ४ हें उत्तर .

साहायें $\frac{३ अक्ष}{३} - \frac{५ ब}{३} + \frac{४}{३} = २$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त

पद

(१४५)

पद आहे त्याची किमत काय.

$$\text{आतां } \frac{\text{क्ष}}{२} - \frac{\text{क्ष}}{४} + \frac{\text{क्ष}}{५} = २$$

$$\text{प्रथम छेद २ याणीं गुणून } \text{क्ष} - \frac{२\text{क्ष}}{४} + \frac{२\text{क्ष}}{५} = ४$$

$$\text{दुसरे छेद ४ याणीं गुणून } ४\text{क्ष} - २\text{क्ष} + \frac{१२\text{क्ष}}{५} = २४$$

$$\text{राहिले छेद ५ याणीं गुणून } २०\text{क्ष} - १५\text{क्ष} + १२\text{क्ष} = १२०$$

$$\text{तर } १७\text{क्ष} = १२०$$

$$\text{भागाकारानें } \text{क्ष} = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१}{१७} \text{ हें उत्तर.}$$

दुसर्यें गितीनें

$$\frac{\text{क्ष}}{२} - \frac{\text{क्ष}}{४} + \frac{\text{क्ष}}{५} = २$$

३ · ४ · ५ हे सर्व छेद परस्पर गुणून

$$६० \text{ याणीं सर्व पदे गुणित्यानें } \frac{६०\text{क्ष}}{२} - \frac{६०\text{क्ष}}{४} + \frac{६०\text{क्ष}}{५} = १२०$$

$$\text{तर } २०\text{क्ष} - १५\text{क्ष} + १२\text{क्ष} = १२०$$

$$\text{तर } १७\text{क्ष} = १२०$$

$$\text{भागाकारानें } \text{क्ष} = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१}{१७} \text{ हें पूर्ववत् उत्तर.}$$

सातवें $\frac{\text{क्ष}-५}{२} + \frac{\text{क्ष}}{२} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{२}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमत काय.

$$\text{आतां } \frac{\text{क्ष}-५}{२} + \frac{\text{क्ष}}{२} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{२}$$

$$\text{प्रथम छेद २ याणीं गुणित्यानें } \text{क्ष}-५ + \frac{२\text{क्ष}}{२} = २४ - \frac{\text{क्ष}-१०}{२}$$

$$\text{दुसरे छेद २ याणीं गुणित्यानें } २\text{क्ष}-१० + २\text{क्ष} = ४८ - २\text{क्ष} + १०$$

स्थळांतरानें

(१४६)

स्थळांतरानें $२क्ष + ३क्ष + २क्ष = ७२ + २० + १०$

तर $७क्ष = १०२$

भागाकारानें $क्ष = \frac{१०२}{७} = १४\frac{४}{७}$ हें उत्तर

आठवें $\sqrt{\frac{१६}{४}} + ७ = १०$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद

आहे त्याची किंमत काय

आतां $\sqrt{\frac{१६}{४}} + ७ = १०$

स्थळांतरानें $\sqrt{\frac{१६}{४}} = १० - ७ = ३$

वर्गकेल्यानें $\frac{१६}{४} = ३ = ९$

गुणाकारानें $१६ = ३६$

भागाकारानें $क्ष = \frac{३६}{३} = १२$ हें उत्तर

नववें $२क्ष + २\sqrt{अ + क्ष} = \frac{५अ^२}{\sqrt{अ + क्ष}}$ या समीकरणांत क्ष

अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय

आतां $२क्ष + २\sqrt{अ + क्ष} = \frac{५अ^२}{\sqrt{अ + क्ष}}$

आतां $\sqrt{अ + क्ष}$ याणे गुणित्यानें $२क्ष\sqrt{अ + क्ष} + २(अ + क्ष) = ५अ$

तर $२क्ष\sqrt{अ + क्ष} + २अ + २क्ष = ५अ$

स्थळांतरानें $२क्ष\sqrt{अ + क्ष} = ३अ - २क्ष$

वर्गकेल्यानें $४क्ष^२ \times अ + क्ष^२ = ९अ^२ - १२क्ष^२$

तर $४अक्ष^२ + ४क्ष^२ = ९अ^२ - १२अक्ष^२ + ४क्ष^२$

दोनही बाजूंचीं ४क्ष^२ हीं दोनपदे

टाकित्यानें

$$४अक्ष^२ = ९अ^२ - १२अक्ष^२$$

स्थळांतरानें

(१४७)

स्थळांतेरानें $४ अक्ष + १२ अक्ष = १ अ$

तर $१६ अक्ष = १ अ$

भागाकारानें $क्ष = \frac{१ अ}{१६ अक्ष} = \frac{१ अ}{१६}$

वर्गमूळकेल्यानें $क्ष = \sqrt{\frac{१ अ}{१६}} = \frac{१}{४} अ$ हें उत्तर

दाहावें $२ क्ष - ५ + १६ = २१$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय.

उत्तर क्ष = ५

अकरावें $६ क्ष - १५ = क्ष + ६$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय.

उत्तर क्ष = ४

बारावें $८ - ३ क्ष + १२ = ३० - ५ क्ष + ४$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय.

उत्तर क्ष = ७

तेरावें $क्ष + \frac{१}{२} क्ष - \frac{१}{४} क्ष = १२$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय.

उत्तर क्ष = १२

चौदावें $३ क्ष + \frac{१}{२} क्ष + २ = ५ क्ष - ४$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय.

उत्तर क्ष = ४

पंधरावें $४ अक्ष + \frac{१}{२} अ - २ = अक्ष - ६ क्ष$ या समीकरणांत

त

(१४८)

त क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय .

$$\text{उत्तर क्ष} = \frac{६-अ}{१अ+३ब}$$

सोळावें $\frac{१}{२} क्ष - \frac{१}{४} क्ष + \frac{१}{२} क्ष = \frac{१}{२}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय .

$$\text{उत्तर क्ष} = \frac{२०}{१७}$$

सत्रावें $\sqrt{४+क्ष} = ४ - \sqrt{क्ष}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय .

$$\text{उत्तर क्ष} = २ \frac{१}{४}$$

अठरावें $४अ + क्ष = \frac{क्ष^२}{४अ+क्ष}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय .

$$\text{उत्तर क्ष} = -२अ$$

एकुणिसावें $\sqrt{४अ^२+क्ष^२} = \sqrt{४ब^२+क्ष^२}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय .

$$\text{उत्तर क्ष} = \frac{\sqrt{ब^२-४अ^२}}{२अ}$$

विसावें $\sqrt{क्ष} + \sqrt{१अ+क्ष} = \frac{४अ}{\sqrt{२अ+क्ष}}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय .

$$\text{उत्तर क्ष} = \frac{२}{३}अ$$

एकविसावें $\frac{अ}{१+२क्ष} + \frac{अ}{१-२क्ष} = २ब$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय .

$$\text{उत्तर क्ष} = \frac{१}{२} \frac{ब-अ}{ब}$$

बाविसावें

(१४९)

बाविसावें $अ + क्ष = \sqrt{अ^2 + क्ष} \sqrt{४ब + क्ष}$ या समीकरणांत
क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय .

$$उत्तर क्ष = \frac{ब^2}{अ} - अ$$

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति.

जेव्हा दोन अव्यक्तपदे आहेत ती वेगळाल्ये दोन समीक-
रणांत येतात तेव्हा पुढील तीन रीतींतून एकेरीतीने त्या दोन समी-
करणांस एकत्र करून त्यांचें एकच समीकरण करितां येईल .

प्रथमरीति.

प्रत्येक समीकरणांत पूर्वी सांगितल्ये रीती करून एक अव्य-
क्तपदाची किमत राहिल्ये दुसरे पदांचे किमती करून काढावी . नंतर
या दोन बराबर किमती पासून एक नवें समीकरण होईल . जांत अ-
व्यक्त पद एकच येईल . त्याची किमत पूर्वरीतीप्रमाणें निघेल* .

टीप . यांत उघड दिसतें किं जा अव्यक्तपदाची किमत का-
ढायास सुगम आहे त्यापासून सांगितल्ये समीकरणांत किम-
त काढायास आरंभ करावा .

उदाहरणें.

प्रथम $\begin{cases} २क्ष + ३य = १७ \\ ५क्ष - २य = १४ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आ-

* या रीतीस तें प्रत्यक्ष आश्रय होय . जा वस्तू एकवस्तूईं बराबर त्या सर्व पर-
स्पर बराबर . तसें पुढील दोन रीतीं सही आश्रय उघड प्रकटार्थच आहेत .

(१५०)

णि य या दोन अव्यक्त पदांची किमत काढ .

प्रथम समीकरणांत २ क्ष + ३ य = १७ क्षची किमत काढाया करिता .

३ य यास स्थळांतर करून २ याणीं भागिल्यानें क्ष = $\frac{१७-३य}{२}$

दुसरे समीकरणांत ५ क्ष - २ य = १४ क्षची किमत काढाया करिता .

२ य यास स्थळांतर करून ५ याणीं भागिल्यानें क्ष = $\frac{१४+२य}{५}$

नंतर क्षचा दोन किमती परस्पर बराबर करून $\frac{१७-३य}{२} = \frac{१४+२य}{५}$

आता पूर्वरीतीनें २ आणि ५ या छेदानीं गुणिल्यानें ८५ - १५ य = २८ + ४ य

स्थळांतराने ८५ - २८ = ४ य + १५ य

तर १९ य = ५७

भागाकाराने य = $\frac{५७}{१९} = ३$

नंतर यची किमत पूर्व कोणत्याही समीकरणांत उघड मांडिल्या
नें प्रथमांत क्ष = $\frac{१७-२८}{२} = ४$ आणि दुसऱ्यांत क्ष = $\frac{१४+६}{५} = ४$ हे उत्तर .

दुसरें $\begin{cases} क्ष + य = अ \\ क्ष - य = ब \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य
या दोन अव्यक्त पदांची किमत काढ .

आतां प्रथम समीकरणांतील क्ष = अ - य

आणि दुसऱ्यांतील क्ष = ब + य

याजकरिता अ - य = ब + य

नंतर स्थळांतराने २ य = अ - ब

भागाकाराने य = $\frac{अ-ब}{२}$

प्रथमांत

(१५१)

प्रथमांत यची ही किमत उघड लिहिल्यानें क्ष = अ - $\frac{अ-ब}{२} = \frac{अ+ब}{२}$ }
दुसऱ्यांत यची ही किमत उघड लिहिल्यानें क्ष = ब + $\frac{अ-ब}{२} = \frac{अ+ब}{२}$ }

हीं दोनही बराबर हें उत्तर.

तिसरें $\begin{cases} ३क्ष + २य = ७ \\ ३क्ष + २य = ८ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील $\frac{क्ष}{२} = ७ - \frac{य}{२}$

गुणाकारानें क्ष = १४ - $\frac{२य}{२}$

दुसऱ्यांतील $\frac{क्ष}{२} = ८ - \frac{य}{२}$

गुणाकारानें क्ष = २४ - $\frac{२य}{२}$

याजकरितां २४ - $\frac{२य}{२} = १४ - \frac{२य}{२}$

प्रथमछेद २ याणीं गुणिल्यानें ४८ - २य = २८ - ४य

दुसरे छेद ३ याणीं गुणिल्यानें १४४ - १य = ८४ - ४य

स्थळांतरानें १४४ - ८४ = १य - ४य

तर ६० = ५य

अथवा ५य = ६०

भागाकारानें य = $\frac{६०}{५} = १२$

प्रथमांत यची किमत १२ ती लिहिल्यानें क्ष = १४ - $\frac{२ \times १२}{२} = १४ - ८ = ६$ }

दुसऱ्यांत यची किमत १२ ती लिहिल्यानें क्ष = २४ - $\frac{२ \times १२}{२} = २४ - १८ = ६$ }

हीं दोनही बराबर हें उत्तर.

चवथें $\begin{cases} ३क्ष + २य = अ \\ ३क्ष - २य = ब \end{cases}$ या दोन समीकरणांत क्ष आणि

य

(१५२)

य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

उत्तर क्ष=५+५ आणि य= $\frac{१०}{२}$ अ- $\frac{१०}{२}$ ब

पांचवें $\left\{ \begin{array}{l} १क्ष + ५य = २२ \\ ३य + ५क्ष = १८ \end{array} \right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

उत्तर क्ष=६ आणि य=४

साहचर्य $\left\{ \begin{array}{l} \frac{१}{२}क्ष + \frac{१}{२}य = ४ \\ \frac{३}{२}क्ष + \frac{३}{२}य = १८ \end{array} \right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

उत्तर क्ष=६ आणि य=४

सातवें $\frac{२क्ष}{५} + \frac{३य}{५} = \frac{२२}{५}$ आणि $\frac{२क्ष}{५} + \frac{३य}{५} = \frac{१८}{५}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

उत्तर क्ष=५ आणि य=४

आठवें क्ष+२य=८ आणि क्ष-४य=३ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

उत्तर क्ष= $\frac{३५}{२२}$ आणि य= $\frac{३५}{४२}$

नववें क्ष-२य=३ आणि क्ष:य::अ:ब या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

उत्तर क्ष= $\frac{अड}{अ-२ब}$ आणि य= $\frac{बड}{अ-२ब}$

दुसरी

(१५३)

दुसरी रीति.

दोन समीकरणांत अतिसोईचें जें अव्यक्तपद असेल त्याची किमत प्रथम काढ . नंतर दुसऱ्या समीकरणांत ती किमत त्या अव्यक्ताचे स्थळीं लिहिल्यानें दुसरें नवें समीकरण होईल . असें किं जांत एकच अव्यक्तपद राहील . नंतर त्याची किमत पूर्वरीतीप्रमाणें काढितां येईल .

उदाहरणें.

प्रथम $\begin{cases} \text{क्ष} + २\text{य} = १७ \\ ३\text{क्ष} - \text{य} = २ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

आतां प्रथमांत अतिसोईचें अव्यक्तपद क्ष आहे याजकरितां तेथून आरंभ करावा . $\text{क्ष} = १७ - २\text{य}$ झणोन ही किमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहून . . . $३(१७ - २\text{य}) - \text{य} = २$

तर . . . $५१ - ६\text{य} - \text{य} = २$

स्थळांतरानें . . . $- ६\text{य} - \text{य} = २ - ५१$

सर्वचिन्हे बदल करून $६\text{य} + \text{य} = ५१ - २$

तर . . . $७\text{य} = ४९$

भागाकारानें . . . $\text{य} = \frac{४९}{७} = ७$

तर . . . $\text{क्ष} = १७ - २\text{य}$

झणजे . . . $\text{क्ष} = १७ - २ \times ७ = १७ - १४ = ३$ हें उत्तर .

दुसरें $\begin{cases} \text{क्ष} + \text{य} = १३ \\ \text{क्ष} - \text{य} = ३ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य

या

(१५४)

या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

आतां प्रथमांत अतिसोईचे अव्यक्तपद क्ष आहे याजकरितां तेथून आरंभ करावा . क्ष = १३ - य स्थणोन ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थ-

कीं लिहून १३ - य - य = ३

स्थळांतरानें वचिन्हें बदल करून २य = १३ - ३ = १०

भागाकारानें य = $\frac{१०}{२}$ = ५ .

तर क्ष = १३ - य

स्थणजे क्ष = १३ - ५ = ८ हें उत्तर .

तिसरें { क्ष : य :: अ : ब } या दोन समीकरणांत क्ष आणि य

या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

आतां प्रमाणास समीकरणरूप दिल्यानें वक्ष = अय

भागाकारानें क्ष = $\frac{अय}{ब}$

ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहित्यानें $(\frac{अय}{ब}) + य = क$

अथवा $\frac{अ^२य}{ब^२} + य = क$

छेदकादित्यानें अ^२य + ब^२य = ब^२क

अ^२ + ब^२ याणें भागित्यानें य = $\frac{ब^२क}{अ^२ + ब^२}$

वर्गमूळानें य = $\sqrt{\frac{ब^२क}{अ^२ + ब^२}} = ब \sqrt{\frac{क}{अ^२ + ब^२}}$

ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहित्यानें $क्ष = अ \times य \sqrt{\frac{क}{अ^२ + ब^२}} = अ \sqrt{\frac{क}{अ^२ + ब^२}}$ हें उत्तर .

चवथें २ क्ष + ३ य = २९ आणि ३ क्ष - २ य = ११ या दोन

समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर

(१५५)

उत्तर क्ष=७ आणि य=५

पांचवें क्ष + य = १४ आणि क्ष - य = २ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=८ आणि य=६

साहाचें $\left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष : य :: ३ : २} \\ \text{क्ष - य = २०} \end{array} \right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=६ आणि य=४

सातवें $\frac{\text{क्ष}}{३} + ३\text{य} = २१$ आणि $\frac{\text{य}}{३} + ३\text{क्ष} = २१$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=९ आणि य=६

आठवें $१० - \frac{\text{क्ष}}{२} = \frac{\text{य}}{३} + ४$ आणि $\frac{\text{क्ष} - \text{य}}{२} + \frac{\text{क्ष}}{४} - २ = \frac{३\text{य} - \text{क्ष}}{५} - १$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=८ आणि य=६

नववें क्ष : य :: ४ : ३ आणि क्ष - य = ३७ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=४ आणि य=३

तिसरी रीति.

सांख्यिकीं दोन समीकरणे तसे संख्येने किंवा अक्षर चिन्हांने

(१५६)

चिन्हानें गुणावीं किंवा भागावीं किं जेणेकरून दोहोंतही एक अव्यक्तपद बरोबर होईल .

नंतर त्यांतील धन ऋण चिन्हे . असें दाखवितात तसें त्या दोन समीकरणाची बेरीज किंवा वजा बाकी केल्यानें एक नवे समीकरण होईल . असें किं जात एकच अव्यक्तपद राहील . त्याची किंमत पूर्वरीतीनें काढितां येईल . म्हणजे जेव्हां त्या दोन बराबर अव्यक्त पदांचीं चिन्हे विरुद्ध आहेत तेव्हां त्या दोन समीकरणांची मिळवणी करावी . आणि जेव्हां तीं सरूप आहेत तेव्हां वजा बाकी करावी .

टीप . विषमवेळाप्रकाशक पदं समवेळाप्रकाशक करणें तर परस्परगंम परस्परगंमवेळाप्रकाशी गुणावीं .

उदाहरणें .

प्रथम $\begin{cases} ३४ + ५.य = ४० \\ ४४ + २.य = १४ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील ४४ आ-
णि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

आतां दुसरें समीकरणास ३ याणी गुणून $\begin{cases} ३४ + ५.य = ४० \\ ३४ + ५.य = ४० \end{cases}$ नंतर यांतून
न प्रथम समीकरण वजा करून $०.य = ०$ ही यची

किंमत दुसरें समीकरणांत लिहून $४४ = १४ - २.य$

म्हणजे $४४ = १४ - २ \times २ = १४ - ४ = १०$

उत्तर ४४ = १० आणि य = ०

दुसरें $\begin{cases} ५४ - ३.य = ९ \\ ३४ + ५.य = १६ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील ४४ आ-
णि

(१५७)

णि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ .

आतां या समीकरणांतील प्रथम पद जात अ अव्यक्त पद आहे ती इच्छित्या प्रमाणें बरोबर करितां येतील . अथवा दुसरीं पदें जात य अव्यक्त पद आहे ती बरोबर करितां येतील . दोन प्रथम पदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण २ याणीं आणि दुसरें ५ याणीं गुणावें . आणि दुसरीं पदें बरोबर करणें तर प्रथम ५ याणीं आणि दुसरें ३ याणीं गुणावें जसे पुढें सांगतो .

१ प्रथम पदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण २ याणीं गुणावें .

समजा

$$१०क्ष - ५ य = १८$$

आणि दुसरें ५ याणीं गुणावें समजा $१०क्ष + २५ य = ८०$

नंतर वरचे खालचांत वजा करून

$$३५ य = ६२$$

भागाकारानें

$$य = \frac{६२}{३५} = १.७७$$

ही किमत प्रथमांत यचे स्थळीं लिहून क्ष = $\frac{१८ + ५ य}{१०} = \frac{१८ + ५ \times १.७७}{१०} = २.५८$

२ दुसरीं पद बरोबर करायास प्रथम समीकरण ५ याणीं गुणावें .

समजा

$$२५क्ष - १० य = ४५$$

आणि दुसरें ३ याणीं गुणावें समजा $६क्ष + १५ य = ४८$

नंतर दोहोंची मिळवणी करून

$$३१क्ष - ५ य = १३$$

भागाकारानें

$$क्ष = \frac{१३ + ५ य}{३१} = ०.४१$$

ही किमत प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहावी . य = $\frac{४५ - २५ क्ष}{१०}$

अथवा

(१५८)

अथवा

$$य = \frac{५क्ष-९}{५} = \frac{५ \times ३-९}{५} = \frac{१५-९}{५} = \frac{६}{५} = २$$

उत्तर क्ष=३ आणि य=२

तिसरें $\frac{क्ष+८}{५} + ६य = २१$ आणि $\frac{य+६}{५} + ५क्ष = २३$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=४ आणि य=३

चवथें $\frac{३क्ष-य}{५} + १० = १३$ आणि $\frac{३य+क्ष}{५} + ५ = १२$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=५ आणि य=४

पांचवें $\frac{३क्ष+४य}{५} + क्ष = १०$ आणि $\frac{५क्ष-३य}{५} + य = १४$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=८ आणि य=४

साहायें $३क्ष+४य=३८$ आणि $४क्ष-३य=९$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

उत्तर क्ष=६ आणि य=५

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति -

जेव्हा तीन आदिकरून अव्यक्तपदे आहेत -

जेव्हा तीन अव्यक्तपदे वेगळाल्ये समीकरणांत येतात तेव्हा या पुढील रीतीकरीत यांचें एकच समीकरण होईल -

रीति

रीतिः

१ त्या प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्तपदाची किमत काढावी ती अशी किं राहित्ये दोन अव्यक्तपदांची किमत ठाउक आहेच असें मानून . नंतर या किमतींत प्रथम दुसरीचे बरोबर करावी . आणि प्रथम किंवा दुसरी तिसरीचे बरोबर करावी म्हणजे दोन नवीं समीकरणे होतील . जांत दोनमात्र अव्यक्तपदे राहातील . जांची किमत पूर्वरीतीकरून निघेल . यापासूनच तिसऱ्याची किमत साफ कळेल .

२ अथवा एक समीकरणांतील एक अव्यक्तपदाची किमत काढून ती राहित्ये दोन समीकरणांत त्या अव्यक्तपदाचे स्थळीं लिहून दोन नवीं समीकरणे होतील . जांत दोन मात्र अव्यक्तपदे येतील . नंतर पूर्वरीती करून त्यांची किमत निघेल .

३ अथवा एकेक समीकरण तशी संख्या किंवा अक्षरचिन्ह यांणी गुणावे अथवा भागावे . जापासून त्या सर्व समीकरणांत एकपद बरोबर होईल . नंतर या तीन समीकरणांतून कोणतीही दोन समीकरणे तिसऱ्यातून वजा केलीं अथवा कोणत्याही दोहोंची तिसऱ्याशीं बेरीज घेतली . जसें त्यांचे चिन्हापासून कळेल तसें करावे . तर दोन नवीं समीकरणे होतील . अशीं किं जातील अव्यक्तपदांची किमत पूर्वरीतीकरून काढितां येईल .

आणि या रीतीनें ४, ५ किंवा याहून अधिक अव्यक्तपदे

अंमतील

(१६०)

असतील तीं तितकी संख्या समीकरणांतून निःशेष करितां येतील परंतु अशा प्रकारचे समीकरणांतील अव्यक्तपदांची किंमत काढा-
याची रीति यादून थोडक्यांत आणि अतिसोपी आहे ती बीजग-
णिताचा अतिअभ्यास केला असता पकट होईल.

उदाहरणें

प्रथम $\left\{ \begin{array}{l} क्ष + य + ज्ञ = ९ \\ क्ष + २य + ३ज्ञ = १६ \\ क्ष + ३य + ४ज्ञ = २१ \end{array} \right\}$ या तीन समीकरणांतील क्ष

य आणि ज्ञ या तीन अव्यक्तपदांची किंमत काढ -

१ रीतीने.

या प्रत्येक समीकरणांत य आणि ज्ञ यांस स्थळांतर करून लिहि.

$$क्ष = ९ - य - ज्ञ$$

$$क्ष = १६ - २य - ३ज्ञ$$

$$क्ष = २१ - ३य - ४ज्ञ$$

नंतर प्रथम किंमत दुसरीशी बराबर करून $९ - य - ज्ञ = १६ - २य - ३ज्ञ$ हा दोन
तसेच दुसरी तिसरीशी बराबर करून $१६ - २य - ३ज्ञ = २१ - ३य - ४ज्ञ$ ही दोन
मीकरणे

यांतील प्रथमांत ९ आणि ज्ञ आणि २य यांस

स्थळांतर करून

$$य = ७ - २ज्ञ$$

दुसऱ्यांत १६ आणि ३ज्ञ आणि ३य यांस $य = ५ - ज्ञ$

मती बराबर करून

$$५ - ज्ञ = ७ - २ज्ञ$$

यचा दोन कि

५ आणि

• (१६१०)

५ आणि २ क्ष यांस स्थळांतर करून क्ष=३

तेदनां य=५-क्ष क्षणजे य=५-२=३

आणि क्ष=१-य-क्ष क्षणजे क्ष=१-३-२=४

उत्तर क्ष=४ य=३ क्ष=२

२ शितीनें

प्रथम समीकरणांत क्ष=१-य-क्ष ही क्षची किमत दुसऱ्या समीकरणांत लिहून $१+य+२क्ष=१६$ } हीं दोन नवीं समीकरणे जा-
आणितिसर्यात $१+२य+३क्ष=२१$

प्रथमांत १ आणि २ क्ष यांस स्थळांतर करून य=७-२क्ष ही य-
ची किमत शेवटील समीकरणांत लिहून $१+१४-४क्ष+३क्ष=२१$
स्थळांतरानें $२=क्ष$

याजकरिता य=७-२क्ष

क्षणजे य=७-४=३

आणि क्ष=१-य-क्ष

क्षणजे क्ष=१-३-२=४

उत्तर क्ष=४, य=३, क्ष=२ पूर्ववत् आहे •

३ शितीनें

प्रथम समीकरण दुसऱ्यांतून वजा करून य+२क्ष=७ } हीं दोन नवीं समी-
आणि दुसरे तिसऱ्यांतून वजा करून य+क्ष=५ } करणें जालीं यांतील
प्रथमांतून दुसरे वजा करून $१=क्ष$

याजकरिता

(१५२)

याजंकरिता $y = ५ - ज$

सपणजे $y = ५ - २ = ३$

आणि $क्ष = ९ - य - ज$

सपणजे $क्ष = ९ - ३ - २ = ४$

उत्तर $क्ष = ४$, $y = ३$, $ज = २$ पूर्व दोन उत्तरांबरोबर आहे.

दुसरे $\begin{cases} क्ष + य + ज = १८ \\ क्ष + ३य + २ज = ३० \\ क्ष + ६य + ४ज = १० \end{cases}$ या तीन समीकरणांत $क्ष$ य $ज$

यांची किंमत काय-

उत्तर $क्ष = ४$, $y = ६$, $ज = ८$

तिसरे $\begin{cases} क्ष + ६य + ४ज = २७ \\ क्ष + ६य + ४ज = २० \\ क्ष + ६य + ४ज = १० \end{cases}$ या तीन समीकरणांत $क्ष$

य $ज$ यांची किंमत काय आहे.

उत्तर $क्ष = १$, $y = १२$, $ज = ६०$

चवथे $क्ष - य = २$ आणि $क्ष - ज = ३$ आणि $य + ज = ९$ या तीन समीकरणांत $क्ष$ य $ज$ यांची किंमत काय-

उत्तर $क्ष = ७$, $y = ५$, $ज = ४$

पाचवे $\begin{cases} २क्ष + ३य + ४ज = ३४ \\ ३क्ष + ४य + ५ज = ४६ \\ ४क्ष + ५य + ६ज = ५८ \end{cases}$ या तीन समीकरणांत

क्ष

(१६३)

क्ष य ज या तीन अव्यक्त पदांची किंमत काय आहे -

प्रश्न समुदाय

प्रश्नसमुदाय सणजे कित्ति एक प्रश्न जाँ पासून एकवर्ण समीकरण उत्पन्न होते -

प्रथम प्रश्न, दोन संख्या शोधायच्या जाँ दोन संख्यांची बेरीज १० होता व आणि वजावकी ६ होतात -

दोन्ही संख्या दाखवाय्याकरिता क्ष आणि लाहान संख्या दाखवाय्यास य घे

तर प्रथम संकेता पासून

$$\text{क्ष} + \text{य} = १०$$

दुसरी पासून

$$\text{क्ष} - \text{य} = ६$$

प्रति समीकरणातीळ य यास स्थळांतरानें क्ष = १० - य) या दोन कि-
आणि

$$\text{क्ष} = ६ + \text{य}$$

बरोबर करून

$$६ + \text{य} = १० - \text{य}$$

स्थळांतरानें

$$२ \text{ य} = ४$$

* या सर्व उदाहरणांत जितक्या अव्यक्त संख्या आहेत त्यांचे स्थळी तितकी क्ष, य, ज इत्यादिक मूळ अक्षरलिपीचे शेवटील अक्षर घेतात. तर या हुने संक्षेप करून अव्यक्त संख्यांचे प्रतिस्थळी वेगळाले अक्षर चिन्ह न घेता काय होईल. परंतु शिकणाऱ्यांस चांगला समज पडो न पळे द्यावे सणोन असे लिहिले.

भागाकारानें

(१६४)

भागाकारानें

$$य = \frac{६}{३} = २$$

याजकरिता

$$क्ष = ६ + य$$

सणजे

$$क्ष = ६ + २ = ८$$

उत्तर ८ आणि २

दुसरा समाजीक रुपये १००० आहेत ते अ य क या तीनजणांस वाटून द्यावे असे किं अला वपेक्षा २०० अधिक आणि बला वपेक्षा १०० अधिक होतील.

क्ष = अचा भाग य = बचा भाग आणि ज = कचा भाग असे असो.

$$\text{आता } क्ष + य + ज = १०००$$

$$क्ष = य + २००$$

$$य = ज + १००$$

प्रथम समीकरणांत क्षची किंमत य + २०० लिहिली तर त्या प्रथम समीकरणाचे रूप $२य + २०० + ज = १०००$ असे होईल नंतर यांत यची किंमत ज + १०० यचे स्थान ज + ४०० = १०००

स्थळांतरानें

$$३ज = १००० - ४०० = ६००$$

भागाकारानें

$$ज = \frac{६००}{३} = २००$$

आता

$$य = ज + १००$$

सणजे

$$य = २०० + १०० = ३००$$

आणि

$$क्ष = य + २००$$

सणजे

(१६५)

झणजे

$$क्ष = ३०० + २०० = ५००$$

उत्तर अ ५०० , ब ३०० , क २००

तिसरा . ५००० रुपये २ आसामीस वांटून देणें आहेत असे किं . त्यांचे भाग परस्प प्रमाणांत होतील . जसे ७ : ८ तर प्रत्येकास काय काय भाग येईल .

आतां क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हें दोन अव्यक्त भाग दाखवायास ये .

तर प्रश्नाप्रमाणें ७ : ८ :: क्ष : य .

यास समीकरणरूप देऊन ७ य = ८ क्ष

आणि क्ष + य = ५०००

दुसरें समीकरणांत यला स्थ . क्ष = ५००० - य ही क्षची किमत प्र

थमांत क्षचे स्थळां लिहून ७ य = ४०००० - ८ य

८ य यांस स्थळांतर करून १५ य = ४००००

भागाकारानें य = $\frac{४००००}{१५} = २६६६ \frac{२}{३}$

वरचें समीकरण क्ष = ५००० - य

यांत यची किमत लिहून क्ष = ५००० - $२६६६ \frac{२}{३} = २३३३ \frac{१}{३}$

उत्तर क्षचा भाग २३३३ $\frac{१}{३}$ रुपये आणि यचा २६६६ $\frac{२}{३}$

चवथा . ती संख्या काय आहे . किं जीचा चौथा भाग पांचव्या भागाहून १० याणीं अधिक आहे .

इच्छिली अव्यक्तसंख्या दाखवायास क्ष अक्षरचिन्ह घे .

आतां

(१६६)

आतां $\frac{१}{२}$ क्ष - $\frac{१}{२}$ क्ष = १०
 प्रथम छेद ४ याणीं गुणून $\frac{१}{२}$ क्ष - $\frac{१}{२}$ क्ष = ४०
 दुसरे छेद ५ याणीं गुणून $\frac{१}{२}$ क्ष - $\frac{१}{२}$ क्ष = २००
 तर $\frac{१}{२}$ क्ष = २०० इच्छिली संख्या हें उ-
 त्तर

पांचवा ते अपूर्णांक काय होत जांचे अंशांत १ मिळविला
 असता त्यांची किंमत हे आणि छेदांत १ मिळविला तर त्यांची किंम-
 त हे होत्ये ते सांग.

एथे अव्यक्त अपूर्णांक दाखवायास $\frac{१}{२}$ हीं अक्षर चिन्हे घे-

तर प्रश्नाप्रमाणें $\frac{क्ष+१}{२} = \frac{१}{२}$
 आणि $\frac{क्ष}{२+१} = \frac{१}{२}$

प्रथमांत य आणि २ याणीं गुणून $२क्ष+२ = य$
 दुसरींत य+१ आणि ३ याणीं गुणून $३क्ष = य+१$
 प्रथम दुसरींतून वजा करून $क्ष-२ = १$

स्थळांतरानें $क्ष = १+२ = ३$

आतां $य = २क्ष+२$

सणजे $य = ६+२ = ८$

उत्तर हे हे इच्छिले अपूर्णांक.

साहावा एक बिगारी याणें ३० दिवस चाकरी कबूल केली
 पुढील कैराप्रमाणें जा दिवशीं चांगलें काम करील त्या दिवसाचे पै-
 से

(१६७)

से २० आणि जा दिवशीं खेळेल किंवा गैर हजीर असेल त्या दिवसा-
चा उलटा दंड १० पैसे पुढे ३० दिवस पुरे जाल्यानंतर करारा प्रमाणे
त्याचे २४० पैसे निघाले तेव्हा खेळणे व गैर हजीरी यांत किती दिवस
गेले ते सांग .

अव्यक्त कामाचे दिवसस्थळीं क्ष आणि खेळणे गैर हजीर या-
दिवसांचे स्थळीं य हीं दोन अक्षरविन्हें घे-

आतां	क्ष + य = ३०	} या दोहोंची
आणि	२० क्ष - १० य = २४०	
प्रथम समीकरण १० याणीं गुणून	१० क्ष + १० य = ३००	
मिळवणी करून	३० क्ष = ५४०	
भागाकारानें	क्ष = $\frac{५४०}{३०} = १८$	ही क्षची
किंमत दुसऱ्या समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहून	य = ३० - क्ष	
हणजे	य = ३० - १८ = १२	

उत्तर कामाचे दिवस १८ खेळ व गैर हजीरी दि० १२

सातवा . एक पिंप पाण्यानें पूर्ण भरलें होतें त्यांतून चतुर्था-
श पाणीं गळोन गेलें आणि कांहीं कार्यार्थ ३० मण पाणीं काढिलें
नंतर त्या पिंपांत काठी उभी करून सुमार पाहतां अर्धे पिंप पाणी
बाकी आहे . तेव्हा त्या सगळ्या पिंपांत किती मण पाणी राहिल
सांग .

सगळ्या पिंपाचें पाणीं अव्यक्त त्याचे स्थळीं क्ष मण घे-

आतां

(१६८)

आतां \Rightarrow क्ष इतकें पाणीं गळोन गेलें . याज-
करितां \Rightarrow क्ष + ३० मण इतकें पाणीं गेलें .
तेद्दां \Rightarrow क्ष = \Rightarrow क्ष + ३० मण
४ या छेदानीं गुणून २ क्ष = क्ष + १२०
क्ष यास स्थळांतर करून क्ष = १२० मण हे उत्तर .

आठवा . २० या संख्येचे दोन भाग कर ते असेकिं त्यांती-
ल एक भागाची तिपट आणि दुसऱ्ये भागाची पांचपट यांची बेरीज
७६ होईल -

एथे दोन अव्यक्त भागांचे स्थळीं क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे -

आतां क्ष + य = २०
आणि ३ क्ष + ५ य = ७६
प्रथम समीकरण ३ याणीं गुणून ३ क्ष + ३ य = ६० } या दोहोंची व-
जा बाकी करून २ य = १६
भागाकारानें य = $\frac{१६}{२}$ = ८
प्रथम समीकरण क्ष = २० - य यांत यची
किंमत यचे स्थळीं लिहून क्ष = २० - ८ = १२

उत्तर १२ आणि ८

नववा . एक मनुष्यानें १ पैशाचे २ प्रमाणें काहीं आंबे ख-
रेदी करून पुनः तितकेच आंबे १ पैशाचे ३ प्रमाणें खरेदी केले न-
वर ते सर्व आंबे काहीं नका द्यावा या आशेनें २ पैशांचे ५ आंबे या
प्रमाणें

(१६९)

प्रमाणें विकले तों शेवटीं त्यांत ३ पैसे तोटा आला तेव्हां ते सर्व आंबे किती होते सांग-

आंब्यांची संख्या प्रत्येक अव्यक्त ती दाखवायास क्ष अक्षर घे-
आतां ३ क्ष ही पहिल्या खरेदीची किंमत
आणि ३ क्ष ही दुसऱ्या खरेदीची किंमत.

जर ५ आंबे : ३ पैशांस :: २ क्ष (सर्व आंबे) : ३ क्ष म्हणोन ही दोन खरेद्यांची किंमत आहे . दर ५ आंबे २ पैशांस .

तर प्रश्नाप्रमाणें $३ क्ष + ३ क्ष - ३ क्ष = ३$
प्रथम छेद ० याणीं गुणून $क्ष + ३ क्ष - ३ क्ष = ६$
दुसरे छेद ३ याणीं गुणून $३ क्ष + २ क्ष - ३ क्ष = १८$
तिसरे छेद ५ याणीं गुणून $१५ क्ष + १० क्ष - ३८ क्ष = १०$
म्हणजे क्ष = १० प्रति खरेदीचे इतके आंबे हें उत्तर .

दाहावा . अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळायास बसले त्यांत अचे जवळ ८०० रुपये आणि बचे जवळ ६०० हे खेळाचे आरंभी होते पुढें खेळांत परस्परांची हार जिंक बळकत वेळा होवुन शेवटास उठोन गेले ते समयीं अचे जवळ रुपये बजवळ राहिल्याचे तिपट राहिले तेव्हां अ बजवळून किती रुपये जिंकला ते सांग .

एथे अचे जिंकलेचे रुपये अव्यक्त त्यांचे स्थळीं क्ष अक्षर घे .

आतां

(१७०)

आता ८०० + ६५ इतकें अर्धें सुदल व जिक
 आणि ६०० - ६५ इतकें बर्धें सुदल व हार
 तर प्रश्नाप्रमाणें ८०० + ६५ = १८०० - ३६५
 ८०० आणि ३६५ यांस स्थळांतर करून ४६५ = १०००
 भागाकारानें ६५ = $\frac{१०००}{४} = २५०$

इतके रुपये व पासून अ जिकला हें उत्तर.

अकरावा . दोन संख्या काढ . अशा किं जांची वजा बाकी ४
 आणि जांचे वर्गाची वजा बाकी ६४ होतील .

उत्तर ६ आणि १०

बारावा . दोन संख्या काढ . अशा किं प्रथम संख्येचें अर्ध
 आणि दुसरे संख्येचा एक तृतीयांश मिळून ९ आणि प्रथम संख्ये-
 चा एक चतुर्थांश आणि दुसरे संख्येचा एक पंचमांश मिळून ५
 होतील .

उत्तर ८ आणि १५

तेरावा . २० या संख्येचे दोन भाग कर असे किं एक भा-
 गाचा एक तृतीयांश आणि दुसरे भागाचा एक पंचमांश मिळून ६
 होतील .

उत्तर १५ आणि ५

चोदावा . तीन संख्या काढ . अशा किं प्रथम आणि दुस-
 री यांची बेरीज ७ आणि प्रथम आणि तिसरी यांची बेरीज ८ आ-
 णि

(१७१)

णि दुसरी आणि तिसरी यांची बेरीज ९ होतील .

उत्तर ३ आणि ४ आणि ५

पंधरावा . कोणी एक गृहस्थ होता त्याजबळ रुपये २०००० हजार होते त्यास एक पुत्र आणि एक कन्या ऐशीं दोन अपत्यें होतीं पुढें तो मरण पावला . त्याणें पूर्वश्च लिहून ठेविलें होतें किं पुत्रास १ रुपया १ पावला आणि कन्येस २ पावले या प्रमाणें वांटून द्यावे . तेद्वां ते रुपये त्याचे लेकराप्रमाणें वांटून देतां कोणास किती रुपये भाग आला तो प्रत्येकाचा सांग .

उत्तर पुत्रास २०००० कन्येस ८००० .

सोळावा . अ ब क या त्रिवर्गानीं सर्कत केली त्यांत स गळें भांडवल रुपये ४००० त्यांत बचे अचे दुपट आणि वर २०० आणि कचे अ आणि ब यांचे बेरिजे बराबर तेद्वां एकेकाचे किती किती रुपये तें सांग .

उत्तर अचे ६०० बचे १४ आणि कचे २०००

सत्रावा . कोणी एक मनुष्यानें १००० रुपये कर्ज देणें होतें तें चुकविले समयी त्याणें कांहीं मोहोरा व कांहीं रुपये ऐशीं शिबडी मिळून नंग २०२ देऊन तें बराबर चुकविलें तेद्वां त्यांत मोहोरा किती व रुपये किती तें सांग .

उत्तर ५७ मोहोरा आणि १४५ रुपये

अठरावा . अ आणि ब हे दोघे मित्र होते त्यांत अ बला सांगे

(१७२)

सांगे किं तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजबळ तुझे बाकीचे दुप-
पट रुपये होतील तसे व अला सांगे किं तूं मजला रुपये १० दिले-
सतर मजबळ तुझे बाकीचे तिपट रुपये होतील तेव्हा एकेकाज-
बळ रुपये किती किती होते ते सांग -

उत्तर अ२२ व २६

एकुणिसावा . कोणी एक गृहस्थ कांही रुपये घेउन बाजा-
रांत गेला तेथें एक दुकानीं सामानाबद्दल २ रुपये खर्च करून पुढें
चालिला नंतर जवळ रुपये अधिक असावे सणोन जे बाकी राहि-
ले होते त्यांचे बराबर रुपये दुंसऱ्यापासून कर्ज घेतले नंतर दुसऱ्या
दुकानीं गेला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकी रुपयां ब-
राबर पूर्ववत् कर्ज घेउन तिसऱ्या दुकानीं गेला तेथें २ रुपये खर्च करू-
न पुनः जवळचे बाकी बराबर पूर्ववत् कर्ज घेउन चौथ्या दुकानीं गेला
तेथें २ रुपये खर्च केले तो जवळ बाकी कांही नाही असें जालें तेव्हा
तो गृहस्थ मुळीं किती रुपये घेउन बाजारांत गला सांग -

उत्तर ३ रुपये आणि ३ पावले

विसावा . कोणी एक मनुष्य त्याची स्त्री आणि पुत्र यांस-
ह वर्तमान प्रवासास गेला होता तेथें मार्गी कोणा एकाचे घरीं तीं ति-
घेंजणें भोजनास गेलीं तेव्हा त्याणें भोजन खर्च सांगितला किं सु-
खास रुपया ३ आणि वायकोस मुलाबराबर आणि पुरुषाच्या ३
अधिक आणि पुरुषास पुत्र आणि स्त्री यांचे बराबर इतके रुपये

पडतील

(१७३)

पडतील ऐसें बोलणें ठरवून भोजन दिलें पुढे त्याणीं काय काय घा-
वें सांग .

उत्तर बायकोस ^{पा० ३० रे०} ३०००० दे पुरुषास ^{रु० पा० रे०} १०००००००० दे

एकविसावा . एक कोठार आहे- त्यांत ६० खंडी धान्य रा-
हातें त्यांत त्रेवडी डाळ यारीतीनें भरली होती (त्रेवडी सणजे चणे तु-
री आणि उडीद यांचा डाळी एकत्र मिश्रित) उडदांची डाळ चण्यांचे डा-
ळीपेक्षा ६ खंडी अधिक आणि तुरींची डाळ उडदांची डाळ आणि च-
ण्यांचे डाळीचा दे इतक्याचे बराबर होती तेव्हां त्या तीन डाळी प्रत्ये-
कीं किती किती खंडी होत्या सांग-

उत्तर चण्यांची ^{खं०} १५ उडदांची ^{खं०} २१ तुरींची ^{खं०} २४

बाविसावा . कोणे एके सदीराजवळ फौज होती ती चौरस
आकृती उभी केली तर २८४ मनुष्ये बाकी राहातात आणि त्या चौरस
आकृतीचे बाजूंस चौरस साधूनच एकेक मनुष्य वाढविलें तर २० म-
नुष्ये कमी येतात तेव्हां ती सर्व फौज किती होती सांग-

उत्तर २४०००

तेविसावा . ती संख्या काय आहे किं जीस ३, ५, ८ हे
पर्यायानें मेळविले असतां तीन बेरिजा भूमिति प्रमाणांत होतील-

उत्तर १

चौविसावा . कोणी तिघांजणानीं सर्कती व्यापार केला ते-
थें भांडवल रुपये ७६०० त्यांत प्रथम आणि दुसरा यांचे भाग मिळ-
न

(१७४)

न तिसर्यापेक्षां २४०० रुपये अधिक होतात. तसें दुसरा आणिति सरा यांचे भाग मिळून प्रथमापेक्षां ३६०० रुपये अधिक होतात तेद्वां एकेकाचे किती किती रुपये सांग.

उत्तर प्रथमाचे २००० दुसऱ्याचे ३००० तिसऱ्याचे २६००

पंचविसावा . त्या दोन संख्या कोणत्या आहेत किं आप रस्वरांस आहेत जसे ३:४ आणि त्यांचा गुणाकार त्यांचेच बेरिजेचे बारापट आहे

उत्तर २१ , २८

सव्विसावा . किति एक मनुष्यें खाणाबळ कबूल करून कोणाएकाचे घरीं जेवायास गेलीं होतीं त्यांत ४ मनुष्यें अधिक असतीं तर सर्वास प्रत्येकीं अर्ध अर्ध रुपया कमी पडता आणि त्यांत तीन उणीं असतीं तर एकेकास अर्ध अर्ध रुपया अधिक पडता तेद्वां सर्व मनुष्यें किती आणि प्रत्येकास किती किती रुपये पडले व सर्व मिळून किती रुपये ते सांग .

उत्तर २४ मनुष्यें . प्रत्येकास रुपये २.२^{पा.} आणि सर्व बेरिज रुपये ८४

सत्ताविसावा . कोणे एके शिळेदाराजबळ २ तट्टू आणि २ जिन होते त्यांत एक जिन बडुमोल त्याची किमत रुपये १८० आणि दुसरा जिन अल्पमोल त्याची किमत रुपये ३० जेद्वां प्रथम तट्टूवर बडुमोल जिन आणि दुसरें तट्टूवर अल्पमोल जिन घालतो तेद्वां प्रथमाची किमत दुसऱ्याचे दुपट होत्ये . आणि जेद्वां प्रथमा

वर

(१७५)

वर अत्यमोल जिन आणि दुसऱ्यावर बहुमोल जिन असें घालतो तेव्हां दुसऱ्याची किंमत प्रथमाचे तिप्पट होत्ये. तेव्हां त्या दोन तडूंची जिनां वांचून वेगळाली किंमत काय आहे ती सांग -

उत्तर प्रथमाची ६० रुपये दुसऱ्याची १० रुपये.

अठ्ठाविसावा . त्या दोन संख्या काय आहेत जा परस्परां स आहेत जसे २ : ३ आणि त्या संख्यांत प्रत्येकीं ६ मिळविले असतां त्या दोन बेरीज परस्परांस होतील - जसे ४ : ५

उत्तर ६ आणि ८

एकुणतिसावा . त्या दोन संख्या काय आहेत जांत सोटी लाहानीस आहे जशी त्यांची बेरीज २० या संख्येस आहे आणि त्यांची वजा बाकी १० या संख्येस आहे -

उत्तर १५ आणि ४५.

तिसावा . त्या दोन संख्या काय आहेत . जांची वजा बाकी बेरीज आणि गुणाकार यांस होत्ये जशी २ ही संख्या ३ आणि ५ यांस आहे -

उत्तर २ आणि १०

एकतिसावा . गणित श्रेढीचा त्या तीन संख्या काय आहेत जांत प्रथम तिसरीस आहे जसे ५ : ९ आणि त्या तिहींची बेरीज ६३ होतील -

उत्तर १५ २१ आणि २७

वतिसावा

(१७६)

वन्तिसावा . २४ या संख्येचे दोन भाग कर . असे किं स्रोत
भाग लाहान भागानें भागिला आणि आहान भाग मोठ्ये भागानें भा-
गिलातर ते दोन भागाकार परस्परांसहोतील असे ४:१

उत्तर १६ आणि ८

त्रैतिसावा . दोन ग्रहस्थ परस्पर अनेक गोष्टी बोलत
होते त्यांत एकानें दुसऱ्यास विचारिलें किं तुझास पुत्र २ त्यांचीं
वयें काय आहेत तेव्हां त्याणें सांगितलें जे त्या दोन पुत्रांचे वयांचे बे-
रिजेंत १८ मिळविले असतां वडील पुत्राचे वयाचे दुपट होतात आ-
णि दोघांचे वयांचे वजा बाकींत ६ वजा केले तर धाकट्याचे वया व-
रोबर होतात .

उत्तर १० आणि १२ वर्षे .

चौतिसावा . त्याचार संख्या काय आहेत जांत प्रथ-
म आणि दुसरी आणि तिसरी यांची बेरीज १३ होतील आणि प्र-
थम दुसरी आणि चौथी यांची बेरीज १५ होतील तसें प्रथम ति-
सरी आणि चौथी यांची बेरीज १८ तसें दुसरी तिसरी आणि च-
वथी यांची बेरीज २० होतील .

उत्तर २, ४, ७ आणि ९

पन्तिसावा . ४८ या संख्येचे चार भाग कर असे किं
प्रथमांत ३ मिळविले ती बेरीज दुसऱ्यांतून ३ वजा केले ती बा-
की तिसरी तिहींनि गुणिला ती गुणाकार आणि चवथा ति-
हींनी

(१७७)

तिहीनीं भागिला तो भागाकार हे सर्व परस्पर बराबर होतील -

उत्तर ६, १२, ३ आणि २७

छत्तिसावा . कोणी एक फडिया सावकार आंबे मोहोर आणि पटण या दोन जातींचे तांदुळ १०० मण एकत्र करून विकायास इच्छितो त्यांत आंबे मोहोर २ रुपये मण आणि पटण १ रुपया २ पावल्यानी मण पडले आणि हालीं सकट भाव १ रुपया २ पावले ५० रेंसानीं मण असा आहे तेव्हां त्याणें कोण जातीचे किती किती मण एकत्र मिळवून १०० मण करावे सणजे पडल्ये भावांत तोरा नयेईल तें सांग -

उत्तर आंबे मोहोर २५ मण . पटण ७५ मण .

वर्ग समीकरण -

वर्ग समीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे -

एकाकी वर्ग समीकरण तेंच होय जांत अव्यक्त पदाचा वर्गमात्र येतो जसे अक्ष = व आणि या जातीचे वर्ग समीकरणाचे पृथक्करणाची रीति पूर्व एकवर्ण समीकरणांत सांगितली आहे -

संयुक्त वर्ग समीकरण तेंच होय जाचे एक पदांत अव्यक्त पदाचा वर्ग येतो आणि दुसरे पदांत त्याच अव्यक्त पदाचा प्रथम घात येतो जसे अक्ष + वक्ष = क .

सर्व संयुक्त वर्ग समीकरणांची पूर्व सांगितल्ये रीती करू

(१७८)

न पृथक्करणे केल्यानंतर ती समीकरणे पुढील तीन सारणी कोष्टकांतून एक कोष्टकाचे रूपाची होतील अें रूप अव्यक्त पदाची किंमत काढायाकरितां त्यांस दिलें पाहिजे -

$$१. \text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{ब}$$

$$२. \text{क्ष} - \text{अक्ष} = \text{ब}$$

$$३. \text{क्ष} - \text{अक्ष} = -\text{ब}$$

वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची सामान्य रीति पुढें सांगतो याप्रमाणें आढे जास वर्गपूरणीकरण स्पणतात -

१ सांगितल्ये वर्गसमीकरणास पूर्वरीतीनें सरळ करावें असें किं वरचे तीन कोष्टकांतून एक कोष्टकासारखें रूप होईल याची रीति पदांस स्थळांतर करावें असें किं अव्यक्त पदें समीकरणाचे एक बाजूस होतील आणि व्यक्त पदें दुसरे बाजूस आणि जांत वर्ग आढे तें पद प्रथम स्थळीं तसें जांत प्रथम घात आढे तें पद दुसरे स्थळीं याप्रमाणें करावें नंतर अव्यक्त वर्ग पदास अंक अथवा अक्षरचिन्ह वेळाप्रकाशक असेल तर त्याणें समीकरणाचीं सर्व पदें भागावीं आणि जर तें अव्यक्त वर्ग पद ऋण (-) असेल तर त्यास समीकरणाचे सर्व पदांचीं धन (+) ऋण (-) चिन्हें बदल करावीं कारण अव्यक्त वर्ग पद धन (+) असल्या बाजून पृथक्करण होत नाही तेव्हां समीकरणाचे पृथक्करण वर्ग पुरा केल्यानें होतें या रीतीनें -

२ वर्ग

२. वर्ग समीकरणाचे अव्यक्त बाजूचा पुरा वर्ग करावा या रीतीने दुसऱ्या पदाचे वेळापकाशकाचे अर्ध घेऊन त्याचा वर्ग करावा आणि हा वर्ग समीकरणाचे दोन बाजूंस मिळवावा तेव्हा समीकरणाचे जा बाजूंत अव्यक्त पद आहे त्या बाजूचा पुरा वर्ग होईल.

३. नंतर समीकरणाचे दोन बाजूंचे वर्गमूळ काढावे म्हणजे अव्यक्त पदाची किंमत प्रकट होईल समीकरणाची व्यक्त बाजू धन किंवा ऋण (+) अशी करावी म्हणजे समीकरणाची दोन मूळे निघतील अथवा अव्यक्त पदाचा दोन किंमती निघतील*.

१ टीप -

* कोणत्याही पदाचे वर्गमूळ धन + किंवा ऋण - असेल याजकरिता सर्व वर्ग समीकरणाचे पृथक्करण दोन प्रकारचे होते जसे + ने याचे वर्गमूळ + न किंवा - न आहे कारण + न \times + न आणि - न \times - न हे दोनही + ने होतात परंतु - ने अथवा /- ने हे सर्व मिथ्या भासवत किंवा अशक्य कारण + न किंवा - न या दोहोचाही वर्ग - ने होत नाही.

जसे प्रथम सारणी कोष्टकांत $क्ष + अक्ष = ब$ यांतून निघते कि $क्ष + \frac{अ}{२} = \sqrt{ब + \frac{अ^२}{४}}$ म्हणजे हे मूळ $+\sqrt{ब + \frac{अ^२}{४}}$ अथवा $-\sqrt{ब + \frac{अ^२}{४}}$ असेल कारण यांतून कोणत्याही एकाने त्याचे तेंच गुणिले असता $ब + \frac{अ^२}{४}$ हा वर्ग होतो याजकरिता याप्रमाणे मूळांत भ्रम राहानो तो दाखवायाकरिता मूळाचे मागे \pm ही दोन चिन्हे लिहितात. जसे $क्ष = \pm \sqrt{ब + \frac{अ^२}{४}} - \frac{अ}{२}$

या सारणी कोष्टकांत $क्ष = \pm \sqrt{ब + \frac{अ^२}{४}} - \frac{अ}{२}$ अक्ष अव्यक्त पदाची प्रथम किंमत म्हणजे $क्ष = +\sqrt{ब + \frac{अ^२}{४}} - \frac{अ}{२}$ अशी सर्वदा धन + आहे कारण $\frac{अ}{२} + ब$ हे $\frac{अ^२}{४}$ याहून अधिक आहे तेव्हा मोठे वर्गाचे निश्चय मोठे मूळ

असावे

१ टीप- समीकरणाचे प्रथम बाजूचे मूळ सर्वदा बराबर आहे जे प्रथम पदाचे मूळ दुसरे पदाचे वेळाप्रकाशकाचे अर्धाने युक्त दुसरे पद धन + किंवा ऋण - असेल तशा चिन्हांनेही.

२-सर्व

असावे याजकरिता $\sqrt{b + \frac{c}{a}}$ हे वर्गमूळ सर्वदा $\sqrt{\frac{c}{a}}$ स्वरुपाचे अ वाढून मोठे आहे याजकरिता $+\sqrt{b + \frac{c}{a}} - \frac{c}{a}$ हे सर्वदा धन + होईल.

दुसरी किमत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = -\sqrt{b + \frac{c}{a}} - \frac{c}{a}$ हे सर्वदा ऋण - होईल कारण याची दोनही पदे ऋण-आहेत. याजकरिता जेव्हा $\frac{c}{a} + \frac{c}{a} = b$ तेव्हा क्षची धन + किमत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = +\sqrt{b + \frac{c}{a}} - \frac{c}{a}$ आणि क्षची ऋण - किमत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = -\sqrt{b + \frac{c}{a}} - \frac{c}{a}$.

दुसरे सरणि कोष्टकांत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = \pm \sqrt{b + \frac{c}{a}} + \frac{c}{a}$ अ यांत क्षची प्रथम किमत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = +\sqrt{b + \frac{c}{a}} + \frac{c}{a}$ ही सर्वदा धन आहे कारण दोनही पदे धन + आहेत. परंतु दुसरी किमत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = -\sqrt{b + \frac{c}{a}} + \frac{c}{a}$ ही सर्वदा ऋण - होईल कारण $b + \frac{c}{a}$ हे $\frac{c}{a}$ वाढून अधिक आहे याजकरिता $\sqrt{b + \frac{c}{a}}$ हे $\sqrt{\frac{c}{a}}$ स्वरुपाचे अ वाढून मोठे आहे स्वरुपाचे $-\sqrt{b + \frac{c}{a}} + \frac{c}{a}$ हे सर्वदा ऋण आहे.

याजकरिता जेव्हा $\frac{c}{a} - \frac{c}{a} = b$ तेव्हा क्षची धन + किमत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = +\sqrt{b + \frac{c}{a}} + \frac{c}{a}$ आणि क्षची ऋण - किमत स्वरुपाचे $\frac{c}{a} = -\sqrt{b + \frac{c}{a}} + \frac{c}{a}$.

या पासून कळते कि. दोन प्रथम सरणि कोष्टकांत सर्वदा अव्यक्त पदाचा दोन किमती निघतात त्यांत एक धन + आणि दुसरी ऋण - आहे.

परंतु तिसरे सरणि कोष्टकांत जेव्हा $\frac{c}{a} = \pm \sqrt{\frac{c}{a} - b} + \frac{c}{a}$ अ यांत क्षचा दोन किमती धन होतील जेव्हा $\frac{c}{a}$ हा बहुत अधिक आहे आतां

क्षची

(१८१)

२ सर्व समीकरणें जांत अव्यक्त पदांचीं दोन पदे येतात आणि प्रथम पदाचा घात प्रकाशक दुसरे पदाचे घात प्रकाचे दुपट आहे . तेव्हां त्याचें पृथक्करण पूर्वप्रमाणें वर्गसमीकरणांरीतीनें च वर्ग पुरा केल्यानें होतें -

जसें $x^2 + ax = b$ अथवा $x^2 + ax = b$ किंवा $x^2 + ax = b$ हीं सर्व वर्गसमीकरणासारिखीं आहेत . आणि यांचें पृथक्करण त्या वर्ग पृथक्करणाप्रमाणें होतें -

क्षची प्रथम किमत स्मरणजे $x = + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} + \frac{1}{2}a$ ही धन होईल . कारण दोनही पदे धन + आहेत .

दुसरी किमत स्मरणजे $x = - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} + \frac{1}{2}a$ ही हि धन + आहे कारण $\frac{1}{2}a$ हे $\frac{1}{4}a^2 - b$ याहून अधिक आहे . याजकरितां $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ स्मरणजे $\frac{1}{2}a$ हे $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ याहून अधिक आहे स्मरण - $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} + \frac{1}{2}a$ हे सर्वदा धन + होईल . अशापासून जेव्हां $x^2 - ax = -b$ तेव्हां क्षची प्रथम किमत $x = + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} + \frac{1}{2}a$ आणि दुसरी स्मरणजे $x = - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} + \frac{1}{2}a$ या दोनही किमती धन आहेत .

परंतु यातिसर्यां सरणि कोष्टकांत जर बची किमत $\frac{1}{4}a^2 - b$ याहून अधिक असेल तर अशो प्रभाचें पृथक्करण करावयास अशक्य आहे कारण कोणतेंही पद धन + किंवा - करण असो परंतु त्याचा वर्ग सर्वदा धन आहे . याज करितां करण पदाचें वर्गमूल अशक्य . आणि जेव्हां बहा $\frac{1}{4}a^2$ याहून अधिक आहे तेव्हां $\frac{1}{4}a^2 - b$ हे करण पद होईल . आणि याजकरितां त्याचें वर्गमूल स्मरणजे $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ हा मिथ्या भास किंवा अशक्य आहे याजकरितां या प्रकारांत $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ स्मरणजे क्षचा दोन किमती अशक्य किंवा मिथ्या भास पदे आहेत .

उदाहरणें

(१८२)

उदाहरणें

प्रथम $क्ष^3 + ४ क्ष = ६०$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे .

आतां $क्ष^3 + ४ क्ष = ६०$

वर्ग पुंग करून $क्ष^3 + ४ क्ष + ४ = ६० + ४ = ६४$

नंतर मूळ काढून $क्ष + २ = \pm ८$

२ यांस स्थळांतर करून $क्ष = ६$ किंवा -१० हीं दोन मूळें हें उत्तर .

दुसरें $क्ष^3 - ६ क्ष + १० = ६५$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे .

आतां $क्ष^3 - ६ क्ष + १० = ६५$

१० यांस स्थळांतर करून $क्ष^3 - ६ क्ष = ५५$

वर्ग पुंग करून $क्ष^3 - ६ क्ष + ९ = ६४$

नंतर मूळ काढून $क्ष - ३ = \pm ८$

पुनः ३ यांस स्थळांतर करून $क्ष = ११$ किंवा -५ हें उत्तर .

तिसरें $२ क्ष^3 + ८ क्ष - ३० = ६०$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे .

आतां $२ क्ष^3 + ८ क्ष - ३० = ६०$

३० यांस स्थळांतर करून $२ क्ष^3 + ८ क्ष = ९०$

२ याणी भागून $क्ष^3 + ४ क्ष = ४५$

वर्ग

(१८३)

वर्ग पुरा करून $क्ष^2 + ४ क्ष + ४ = ४९$
 नंतर मूळ काढून $क्ष + २ = \pm ७$
 पुनः २ यास स्थळांतर करून $क्ष = ५$ किंवा -९ हें उत्तर
 चवथें ३ $क्ष^2 - ३ क्ष + ९ = ८$ चे या वर्गसमीकरणांतील क्ष
 अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे -

आतां ३ $क्ष^2 - ३ क्ष + ९ = ८$ चे
 ३ याणे भागून $क्ष^2 - क्ष + ३ = २$ चे
 ३ यास स्थळांतर करून $क्ष^2 - क्ष = -१$ चे
 वर्ग पुरा करून $क्ष^2 - क्ष + २ = ३$ चे
 नंतर मूळ काढून $क्ष - २ = \pm १$ चे
 पुनः ३ यास स्थळांतर करून $क्ष = ३$ किंवा -१ हें उत्तर -

पांचवें ३ $क्ष^2 - ३ क्ष + ३० = ५२$ चे या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे -

आतां ३ $क्ष^2 - ३ क्ष + ३० = ५२$ चे
 ३० चे यास स्थळांतर करून ३ $क्ष^2 - ३ क्ष = २२$ चे
 ३ याणीं गुणून $क्ष^2 - क्ष = ४४$ चे
 वर्ग पुरा करून $क्ष^2 - क्ष + १ = ४४$ चे
 मूळ काढून $क्ष - १ = \pm ६$ चे
 पुनः ३ यास स्थळांतर करून $क्ष = ७$ किंवा -५ चे

हैं उत्तर -

साहायें . अक्ष-बक्ष = क या वर्ग समीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे -

आतां अक्ष-बक्ष = क
 अ याणें भागून $\frac{\text{क्ष}^2 - \frac{b}{a}\text{क्ष} = \frac{k}{a}}$
 वर्ग पुराकरून $\frac{\text{क्ष}^2 - \frac{b}{a}\text{क्ष} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{k}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$
 नंतर मूळ काढून $\text{क्ष} - \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{4ak + b^2}{4a^2}}$
 यांस स्थळांतर करून $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\frac{4ak + b^2}{4a^2}} + \frac{b}{2a}$ हैं
 उत्तर .

सातवें . $\text{क्ष}^2 - २\text{अक्ष} = ब$ या वर्ग समीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे -

आतां $\text{क्ष}^2 - २\text{अक्ष} = ब$
 वर्ग पुराकरून $\text{क्ष}^2 - २\text{अक्ष} + \text{अ}^2 = \text{अ}^2 + ब$
 मूळ काढून $\text{क्ष} - \text{अ} = \pm \sqrt{\text{अ}^2 + ब}$
 अ यास स्थळांतर करून $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{अ}^2 + ब} + \text{अ}$
 नंतर वर्गमूळ काढून $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{अ} + \sqrt{\text{अ}^2 + ब}}$

या रीतीने सर्वदा असे कामाचे शब्द प्रत्येक रेखांस लिहून शिकणारे चांगले समजदार होऊन पुढील उदाहरणांची पृथक्करणे करीत असे त्यांस शिकवावें

आठवें . $\text{क्ष}^2 - ६\text{क्ष} - ७ = ३३$ या वर्ग समीकरणांतील

क्ष

(१८५)

क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=१०

नववें . $क्ष^2 - ५ क्ष - १० = १४$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=८

दादावें . $५ क्ष^2 + ४ क्ष - १० = ११४$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=६

अकरावें . $\frac{३}{२} क्ष^2 - \frac{३}{२} क्ष + २ = ९$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=४

बागवें . $३ क्ष^2 - २ क्ष = ४०$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=२

तेरावें . $\frac{३}{२} क्ष - \frac{३}{२} \sqrt{क्ष} = १\frac{३}{२}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=९

चौदावें . $\frac{३}{२} क्ष^2 + \frac{३}{२} क्ष = \frac{३}{२}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=०.२००६६

पंधरावें .

(१८६)

पंधरावें क्ष+४क्ष=१२ या वर्गसमीकरणातील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे .

$$\text{उत्तर क्ष} = \sqrt{12} = 9.2499929$$

सोळावें क्ष+४क्ष=अ+२ या वर्गसमीकरणातील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे .

$$\text{उत्तर क्ष} = \sqrt{\text{अ}+६}-२$$

प्रश्न .

जांघासह वर्गसमीकरणे उत्पन्न होतात .

प्रथम त्या दोन संख्या काढ जांची वजाबाकी २ आणि जांचा गुणाकार ८० होतो .

इडिन्या अव्यक्त २ संख्या दाखवायास क्ष आणि य ही दोन अक्षरचिन्ह घे .

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें

$$\text{क्ष}-\text{य} = २$$

दुसऱ्या प्रमाणें

$$\text{क्ष}+\text{य} = ८०$$

प्रथमांतील य यास म्थळांतर करून

$$\text{क्ष} = \text{य}+२$$

क्षची किंमत दुसऱ्यांत लिहून

$$\text{य}+२+\text{य} = ८०$$

वर्ग पुरा करून

$$\text{य}^२+२\text{य}+१ = ८१$$

✽ या प्रश्नांत जसें एक वर्गसमीकरणांत आहे . किं जिनकिं अव्यक्त पदे आहेत . तितकी अक्षरचिन्हे घेतात . पृथक्करण करायास तसेंच आहे परंतु याहून संक्षेप रीति आहे वण अभ्यास करण्यास आरंभी ती उपयोगी नह कारण प्रथमच कठिण लागलें तर पुढें समज हो . ने दुर्घट .

मूळ

(१८७)

मूळ काढून $y + १ = ९$
 १ यास स्थळांतर करून $y = ८$
 वरप्रमाणे क्षची किमत $क्ष = y + २ = १०$

उत्तर १० आणि ८

दुसरा १४ या संख्येचे दोन भाग कर असे किं त्यांच्या गुणा-
 कार ४८ होतील

दोन अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हे
 घे-

आतां प्रथम संकेताप्रमाणे $क्ष + y = १४$
 आणि दुसऱ्ये संकेताप्रमाणे $क्ष y = ४८$
 प्रथम समीकरणांतील y यास स्थळां $क्ष = १४ - y$ ही क्षची किमत
 दुसऱ्ये समीकरणांतील क्षचे स्थळां लि० $१४y - y^2 = ४८$ वर्ग धन करावया
 करितां सर्वचिन्हे वटल करून $y^2 - १४y = -४८$
 नंतर वर्ग पुरा करून $y^2 - १४y + ४९ = १$
 वर्गमूळ काढून $y - ७ = \pm १$
 ७ यास स्थळांतर करून $y = ८$ आणि ६ हे इच्छि-
 ले दोन भाग हें उत्तर.

तिसरा जा दोन संख्यांची बेरीज ९ होतात आणि जांचे
 वर्गांची बेरीज ४५, त्या दोन संख्या काय आहेत.

या दोन अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरे घे-
 आतां

(१८८)

आतां प्रथम संकेता प्रमाणें $क्ष + य = ९$
 आणि दुसऱ्ये संकेता प्रमाणें $क्ष^२ + य^२ = ४५$
 प्रथम समीकरणांतील य यास स्थळां $क्ष = ९ - य$ ही क्षची किमत दुसऱ्ये
 समीकरणांत लिहून $८१ - १८ य + २ य^२ = ४५$
 ८१ यांस स्थळांतर करून $२ य^२ - १८ य = -३६$
 २ याणीं भागून $य^२ - ९ य = -१८$
 नंतर वर्ग पुरा करून $य^२ - ९ य + \frac{८१}{४} = \frac{८१}{४} - १८$
 वर्गमूळ काढून $य - \frac{९}{२} = \pm \frac{३}{२}$
 आतां $\frac{९}{२}$ यांस स्थळांतर करून $य = \pm \frac{३}{२} + \frac{९}{२} = ६$ आणि ३
 या इच्छित्या दोन संख्या हें उत्तर .

चवथा त्या दोन संख्या काय आहेत जांची बेरीज गुणाकार
 आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी हीं तीनही बराबर आहेत .
 अव्यक्त दोन संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन अक्षरे
 घे .

प्रथम आणि दुसऱ्ये संकेता प्रमाणें $क्ष + य = क्ष य$
 प्रथम आणि तिसऱ्ये संकेता प्रमाणें $क्ष + य = क्ष^२ - य^२$
 दुसऱ्याचा दोन बाजू $क्ष + य$ याणीं भागून $१ = क्ष - य$
 १ यास स्थळांतर करून $य + १ = क्ष$ ही क्षची किमत प्रथम
 समीकरणांत क्षचे स्थळां लिहून $२ य + १ = य^२ + य$
 $२ य$ यांस स्थळांतर करून $१ = य^२ - य$

वर्ग

(१८९)

वर्ग पुरा करून $\frac{५}{३} = य^३ - य + \frac{३}{२}$

मूळ काढून $\frac{३}{२} \sqrt{५} = य - \frac{३}{२}$

$\frac{३}{२}$ यास स्थळांतर करून . . . $\frac{३}{२} \sqrt{५} + \frac{३}{२} = य$

आणि वरचे समीकरणाप्रमाणे . . . $क्ष = \frac{३}{२} \sqrt{५} + \frac{३}{२}$

या कोष्टकांतील $\sqrt{५}$ यांची किमत दशांशांत काढून $क्ष = +२.६१८०$

इत्यादिक निघेल . आणि $य = +१.६१८०$ इत्यादिक .

पांचवा . गणितश्रद्धेत त्या चार संख्या काय आहेत .
किं जांचे दोन शेंवटांच्या गुणाकार २२ आहे . आणि दोन मध्य प-
टांच्या गुणाकार ४० होतो .

अतिलाहान अव्यक्तपद दाखवायास क्ष अक्षर घे . आणि
अव्यक्त उत्तर दाखवायास य अक्षर घे .

तर क्ष , क्ष + य , क्ष + २य , क्ष + ३य हीं चार पदे
त्या अव्यक्त चार संख्या दाखवितात .

आतां प्रथम संकेताप्रमाणे . . . $क्ष^३ + ३क्षय = २२$

दुसर्ये संकेताप्रमाणे . . . $क्ष^३ + ३क्षय + २य^३ = ४०$

दुसर्यांतून प्रथम वजा करून $२य^३ = १८$

२याणीं भागून $य^३ = ९$

वर्गमूळ काढून $य = ३$ हें उत्तर आहे .

यची किमत प्रथमांत लिहून . . . $क्ष^३ + ९क्ष = २२$

वर्ग पुरा करून $क्ष^३ + ९क्ष + \frac{८१}{४} = \frac{१६९}{४}$

मूळ

(१९०)

मूलकाढून $क्ष + २ = २२$

३ यांस स्थळांतर करून $क्ष = २$ हें अतिलाहान पद
याजकरितां २, ५, ८, ११ या इळित्या चार संख्या हें उत्तर.

साहावा भूमिति श्रेढींत त्या तीन संख्या काय आहेत.
किंजांची बेरीज ७ होत्ये आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज २१ होत्ये.

अव्यक्त तीन संख्या दाखवायास क्ष, य, आणि ज हीं ती-
न अक्षर चिन्हे घे

तर प्रथम संकेतां प्रमाणें $क्षज = य$

आणि दुसरे संकेता प्रमाणें $क्ष + य + ज = ७$

आतां तिसरे संकेता प्रमाणें $क्ष^२ + य^२ + ज^२ = २१$

दुसऱ्यातील य यास स्थळांतर करून $क्ष + ज = ७ - य$ याच समीकरणाचे

दोनही बाजूंचे वर्ग करून $क्ष^२ + २ क्षज + ज^२ = ४९ - १४ य + य^२$

२ क्षज यांचे स्थळां प्रथमांतील.

त्यांची किमत ये ती लिहून $क्ष^२ + २ य^२ + ज^२ = ४९ - १४ य + य^२$

दोन बाजूंचे ये वजा करून $क्ष^२ + य^२ + ज^२ = ४९ - १४ य$

आतां $क्ष + य + ज$ यांचा दोन

किमतींची बराबरी करून $२१ = ४९ - १४ य$

२१ आणि १४ य ० स्थळांतर करून $१४ य = २८$

१४ याणीं भागून $य = २$ हें दुसरे पद ही

यची किमत प्रथमांत लिहून $क्षज = ४$

चौथ्या

(१११)

चोथ्या समीकरणांतील लिहून . $क्ष + ज्ञ = ५$ या शेवटील समी-
करणांतील ज्ञ यास स्थळांतर करून . $क्ष = ५ - ज्ञ$ ही क्षची किमत
त्या शेवटीलाचे वरचे समीकरणांतलि० $५ ज्ञ - ज्ञ = ४$
वर्ग धन करायास सर्वेचिन्हें बदल
करून . $ज्ञ - ५ ज्ञ = -४$
वर्ग पुरा करून . $ज्ञ - ५ ज्ञ + २५ = २५$
मूळ काढून . $ज्ञ - ५ = \pm ५$
यास स्थळांतर करून . $ज्ञ = ४$ अथवा ९ ही क्षची
किमत .

याजकरिता १ , २ , ४ या इच्छित्या तीन संख्या हें उत्तर .

वर्गसमीकरणाचे दुसरे प्रश्न .

पूर्वी सांगितलें किं अव्यक्त पदें आहेत तितकीं अक्षरचिन्हें
ध्यावीं सणोन . परंतु त्याशिवाय दुसरी रीति आहे तिचीं उदाहर-
णें लिहितो

उदाहरणें .

प्रथम . दोन संख्या काढ . अशाकिं त्यांची वजाबाकी ८
आणि त्यांचा गुणाकार २४० होईल .

आतां लाहान अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे .

तर

(१९२)

तर $\cdot \cdot \cdot \cdot$ क्ष + ८ = सोटी संख्या.

आणि प्रश्नाप्रमाणें $\cdot \cdot \cdot$ क्ष (क्ष + ८) सणजे क्ष^२ + ८ क्ष = २४०

वर्ग पुरा करून $\cdot \cdot \cdot$ क्ष^२ + ८ क्ष + १६ = २५६

वर्गमूळ काढून $\cdot \cdot \cdot$ क्ष + ४ = १६

४ यास स्थळांतर करून $\cdot \cdot \cdot$ क्ष = १२ ही लाहान संख्या.

तेव्हां क्ष + ८ = १२ + ८ = २० ही सोटी संख्या. हें उत्तर.

दुसरा $\cdot \cdot \cdot$ ६० या संख्येचे दोन भाग कर. असे किं त्यांचा गुणाकार ८६४ होईल.

आतां सोटा अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर $\cdot \cdot \cdot \cdot$ ६० - क्ष = लाहान भाग.

आणि प्रश्नाप्रमाणें $\cdot \cdot \cdot$ क्ष (६० - क्ष) सणजे ६० क्ष - क्ष^२ = ८६४

दोन बाजूंची सर्व चिन्हे बदल करून $\cdot \cdot \cdot$ क्ष^२ - ६० क्ष = - ८६४

वर्ग पुरा करून $\cdot \cdot \cdot \cdot$ क्ष^२ - ६० क्ष + ९०० = ३६

वर्गमूळ काढून $\cdot \cdot \cdot \cdot$ क्ष - ३० = \pm ६

३० यास स्थळांतर करून $\cdot \cdot \cdot$ क्ष = \pm ६ + ३०

याज करितां क्ष = ६ + ३० = ३६ अथवा ३० - ६ = २४ सणजे ३६

आणि २४ हे दोन इच्छिले भाग. हें उत्तर

तिसरा $\cdot \cdot \cdot$ दोन संख्या असाव्या \cdot त्या अशा किं. त्यांची बेरीज १० (अ) असेल \cdot आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज ५८ (ब) असेल.

आतां

(११३)

आतां सोदी संख्या दारववायास क्ष अक्षर घे.

तर अ - क्ष = लाहान संख्या .

आणि प्रश्नाप्रमाणें $क्ष^2 + (अ - क्ष)^2$ म्हणजे $२क्ष^2 - २अक्ष + अ^2 = ब$

आतां अ यास स्थळांतर करून $२क्ष^2 - २अक्ष = ब - अ^2$

२ याणें भागून $क्ष^2 - अक्ष = \frac{ब - अ^2}{२}$

वर्ग पुरा करून $क्ष^2 - अक्ष + \frac{अ^2}{२} = \frac{अ^2}{२} + \frac{ब - अ^2}{२}$

वर्ग मूळ काढून $क्ष - \frac{अ}{२} = \pm \sqrt{\frac{अ^2}{२} + \frac{ब - अ^2}{२}} = \pm \frac{१}{२} \sqrt{२ब - अ^2}$

$\frac{अ}{२}$ यास स्थळांतर करून $क्ष = \frac{अ}{२} \pm \frac{१}{२} \sqrt{२ब - अ^2}$

अचे स्थळीं १० आणि बचे स्थळीं ५८ ही त्यांची किमत लिहून .

$क्ष = \frac{१०}{२} + \frac{१}{२} \sqrt{११६ - १००} = ५ + २ = ७$ ही सोदी संख्या .

तेकां $१० - क्ष = \frac{१०}{२} - \frac{१}{२} \sqrt{११६ - १००} = ५ - २ = ३$ ही लाहान संख्या .

थोथा . एक ताका २४ रुपयांस विकला त्यांत जशी १०० रुपयांस मूळ किमत तशी प्रमाणानें मूळ किमतीस नफा तेकां मूळ किमत काय ती सांग .

आतां मूळ किमत अव्यक्त . ती दारववायास क्ष अक्षर घे.

तर $२४ - क्ष =$ सर्व नफा .

प्रश्नाप्रमाणें $१०० : क्ष :: क्ष : २४ - क्ष$.

तर $क्ष^2 = १००(२४ - क्ष) = २४०० - १०० क्ष$.

$१०० क्ष$ यास स्थळांतर करून $क्ष^2 + १०० क्ष = २४००$

वर्ग

(१९४)

- वर्ग पुरा करून . . . $क्ष + १००$ $क्ष + २५०० = २४०० + २५०० = ४९००$
 वर्ग मूळ काढून . . . $क्ष + ५० = \sqrt{४९००} = ७०$
 ५० यास स्थळांतर करून . . . $क्ष = ७० - ५० = २०$ मूळ किंमत हे उत्तर
 पांचवा . . . एक मेंढ्याने ८० रुपयांस कांहीं मेंढे विकत घेतले . त्यांत चार मेंढे अधिक आले असते तर दर मेंढ्यास एके क रुपया कमी पडता तेव्हां सर्व मेंढे किती घेतले ते सांग .
 अव्यक्त मेंढ्यांची संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे .
 तर . . . $\frac{८०}{क्ष}$ हे एकेकाचे मोल होईल .
 आणि जर $क्ष + ४$ मेंढे ८० रुपयांस येते तर प्रत्येकाचे मोल $\frac{८०}{क्ष + ४}$
 प्रश्नाप्रमाणे . . . $\frac{८०}{क्ष} = \frac{८०}{क्ष + ४} + १$
 क्षने गुणून . . . $८० = \frac{८०क्ष}{क्ष + ४} + क्ष$
 $क्ष + ४$ याणी गुणून . . . $८०क्ष + ३२० = ८०क्ष + क्ष^२ + ४क्ष$
 $८०क्ष$ दोन बाजूंतून टाकून . . . $क्ष^२ + ४क्ष = ३२०$
 वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^२ + ४क्ष + ४ = ३२४$
 वर्ग मूळ काढून . . . $क्ष + २ = १८$
 २ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष = १८ - २ = १६$ मेंढ्यांची संख्या हे उत्तर

साहावा . . . दोन संख्या काढ . अशा किं त्यांची बेरीज १३(अ)
 आणि त्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ४७२१(ब) होईल .

अव्यक्त दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवायास क्ष अक्षर घे .
 तर

(११५)

तर $\frac{अ+क्ष}{२}$ ही मोदी संख्या.

आणि $\frac{अ-क्ष}{२}$ ही लाहान संख्या आहे.

आतां प्रश्नाप्रमाणे $\frac{(अ+क्ष)}{१६} + \frac{(अ-क्ष)}{१६} = ब$

१६ याणीं गुणून $(अ+क्ष) + (अ-क्ष) = १६ब$

घन करून त्यांची बेरीज $२अ + १२अ^३ + २क्ष = १६ब$

स्थ० आणि २ याणीं भागून $क्ष + ६अ^३ = ८ब - अ$

वर्ग पुरा करून $क्ष + ६अ^३ + ९अ^३ = ८ब + ८अ^३ = ८(ब + अ^३)$

मूळ काढून $क्ष + ३अ^३ = \sqrt{८(ब + अ^३)}$

३ अ^३ यांस स्थळांतर करून $क्ष = \sqrt{८(ब + अ^३)} - ३अ^३$

पुनः वर्ग मूळ काढून $क्ष = \sqrt{८(ब + अ^३)} - ३अ^३$

आतां यांत अची किंमत १३ आणि बची ४७२९ ही लिहून.

$$क्ष = \sqrt{८(४७२९ + २०५६९)} - ५०७$$

$$= \sqrt{५९६८ - ५०७}$$

$$= \sqrt{९}$$

$$= ३ \text{ ही क्षची किंमत सणजे दोन संख्यांची वजाबाकी}$$

तर $\frac{अ+क्ष}{२} = \frac{१३+३}{२} = \frac{१६}{२} = ८$ ही मोदी संख्या.

आणि $\frac{अ-क्ष}{२} = \frac{१३-३}{२} = \frac{१०}{२} = ५$ ही लाहान संख्या.

यांची बेरीज $८ + ५ = १३$ आणि $८^३ + ५^३ = ४७२९$ हे उत्तर.

सातवा. ती संख्या काय आहे. किं. जीचा वर्ग आणि ती संख्या मिळून ४२ होतात.

उत्तर ६

(११६)

आठवा . दोन संख्या काढ अशाकिं . त्यांतील लाहान संख्या मोठ्ये संख्येस होईल . जशी मोठी संख्या बारांस होईल . आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ होत्ये .

उत्तर ३ आणि ६

नववा . त्या दोन संख्या काय आहेत . किं . जांची वजा बाकी २ आहेत . आणि जांचे घनांची वजा बाकी ९८ आहेत .

उत्तर ३ आणि ५

दाहावा . त्या दोन संख्या काय आहेत . किं . जांची बेरीज ६ होतात . आणि जांचे घनांची बेरीज ७२ होतात .

उत्तर २ आणि ४

अकरावा . त्या दोन संख्या काय आहेत . किं . जांच्या गुणाकार २० आणि जांचे घनांची वजा बाकी ६१ आहेत .

उत्तर ४ आणि ५

बारावा . ११ या संख्येचे दोन भाग कर . असे किं . त्या दोन भागांचे वर्गांचा गुणाकार ७८४ होतील .

उत्तर ४ आणि ७

तेरावा . ५ या संख्येचे दोन भाग कर . असे किं . ते दोन भाग परस्परांनं वेगळाले भागिले असता त्या दोन भागाकारांची बेरीज ४ ३/४ होईल .

उत्तर १ आणि ४

चौदावा

(११७)

चौदावा . १२ या संख्येचे दोन भाग कर . असेकि . त्यांचा गुणाकार त्यांचे वजाबाकीचे आठपट होईल .

उत्तर ४ आणि ८

पंधरावा . १० या संख्येचे दोन भाग कर . असेकि . लाहान भागाचे चौपटीचा वर्ग मोठ्या भागाचे दुपटीचे वर्गाहून ११२ याणी अधिक होईल .

उत्तर ४ आणि ६

सोळावा . त्या दोन संख्या काय आहेत . कि . जांचे वर्गांची बेरीज ८९ आणि जांची बेरीज त्यांतील मोठ्या संख्येने गुणिली असतां १०४ होतात .

उत्तर ५ आणि ८

सत्रावा . ती संख्या काय आहे . कि . जा संख्येचे अंक रूप आकृतींतील दोन मूळ अंकांचे गुणाकाराने जी भागिली असतां भागाकार ५ ने येतो . आणि त्या संख्येतून ९ वजा केले तर बाकींत त्या संख्येतील मूळ अंकांची सुक्रम स्थिती होत्ये .

उत्तर ३२

अठरावा . २० या संख्येचे तीन भाग कर . असेकि त्या तीन भागांचा गुणाकार २७० होईल . तसें प्रथम आणि दुसरा या दोन भागांची वजाबाकी दुसरा आणि तिसरा यांचे वजाबाकीहून २ या संख्येने उणी असेल

उत्तर ५, ६ आणि ९

(१९८)

एकुणिसावा . गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ . किं जांचे वर्गांची बेरीज ५६ आणि प्रथम संख्येची तिपट दुसऱ्ये संख्येची दुपट आणि तिसऱ्ये संख्येची तिपट यांची बेरीज ३२ होतील .

उत्तर २ , ४ आणि ६

विसावा . १३ या संख्येचे तीन भाग कर . असे किं . जांचे वर्गांचे उत्तर बराबर असेल . आणि त्या वर्गांची बेरीज ७५ होतील -

उत्तर १ , ५ आणि ७

एकविसावा . गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ . अशा किं . जांचे उत्तर बराबर . तसें जांची बेरीज १२ आणि जांचे चतुर्घातांची बेरीज १६२ होतील .

उत्तर ३ , ४ आणि ५

बाविसावा . गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ . अशा किं . जांचे उत्तर बराबर . आणि त्यांतील लाहान संख्येचा वर्ग मोठ्ये दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असतां २८ होतील . आणि अति मोठ्ये संख्येचा वर्ग लाहान दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला तर ४४ होतील -

उत्तर २ , ४ आणि ६

तेडिसावा . अ , ब , क या तिघांजणांनी व्यापारांत १४४४ रुपये नफा मेळविला . त्यांत जर बचा नफा असे

(११९)

चे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९२० रूपये होतात परंतु
कचे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९१२ रूपये होतात तेव्हा
त्या विचर्गांत एकेकाच्या नफा किती किती रूपये सांग .

उत्तर अथा ४०० बथा ९०० कथा १४४

चौविसावा . गणित प्रमाणांत तीन संख्या काढ . अशा
किं जांचे वर्गांची बेरीज ९२ आणि त्या संख्या ३, ४, ५ याणीं अ-
नुक्रमें गुणित्या असतां त्या तीन गुणाकारांची बेरीज ६६ होतील .

उत्तर २, ५ आणि ८ .

पंचविसावा . दोन संख्या काढ . अशा किं जांचा गुणा-
कार आणि जांची बेरीज हीं मिळून ४७ होतात . आणि जांची बेरी-
ज जांचे वर्गांचे बेरीजेतून वजा केली तर ६२ बाकी राहातील .

उत्तर ५ आणि ७

घनादि समीकरण पृथक्करण .

घन समीकरण अथवा तिसर्ये घाताचें समीकरण तेंच हो-
य . किं जांत अव्यक्तपदाचा तिसरा घात येतो .

जसे $x^3 - २x^2 + ३x = ४$

चतुर्घात समीकरण तेंच होय . किं जांत अव्यक्तपदाचा
चतुर्घात

चतुर्घात येतो . जसें क्ष-अक्ष+वक्ष-कक्ष=ड

पंचघात समीकरण तेंच होय . किं . जांत अव्यक्त पदाचा पंच
घात येतो . जसें क्ष-अक्ष+वक्ष-कक्ष+डक्ष=ई

इत्यादि . पुढें या प्रमाणें षड्घातादि समीकरणें जाणावीं .
परंतु सर्वांत सर्व घात किंवा पदें जीं समीकरणांत येतात . तीं क-
रणी वांचून असावीं .

घनादिसमीकरण पृथक्करणाचा सामान्य रीति बळुत आ-
आहेत . परंतु . त्या अतिलांबद्द ह्मणोन ही सोपी थोडक्यांत क-
रायाची रीति पुढें सांगतो . या रीतीवरून घनादिसमीकरण पृ-
थक्करण स्वल्यांत आणि सत्वर होईल .

रीति.

१ गणिताचा तपशील करून दोन संख्या काढाव्या . जा मू-
ळाचे जवळ जवळ येतील . आणि त्या दोन संख्या समीकरणांत
अव्यक्त पदस्थळीं वेगळाल्या ठेवाव्या . नंतर हीं संख्या पदें त्यांचे
वेगळाल्ये चिन्हांनीं एकत्र करावीं . आणि समीकरणाची सांगीत-
ली किमत व्यक्तपद तें त्याहून अधिक किंवा उणें अंतर आहे त्या
प्रमाणें धन (+) किंवा ऋण (-) चिन्हांनें तें अंतर युक्त करावें .

२ वर प्रमाणें काढिलेल्या दोन संख्यांची वजाबाकी वरचा दो-
न अंतरांतून एकानें गुणावी . आणि गुणाकार चेईल तो . जर
दोन अंतरांचीं चिन्हें सरूप आहेत तर त्यांचे वजाबाकीनें भागावा .

आणि

आणि जर ती विरूप आहेत तर त्यांचे बेरिजेने भागावा . किंवा . या रीतीने प्रमाण राखी कराव्या . जर दोन अंतरांची वजाबाकी किंवा बेरीज काढिल्ये दोन संख्यांचे वजाबाकीस आहे . तसे कोणतेही अंतर त्याचे संख्येचे शुद्धीस होईल :

३ जा अंतराने गुणून शेवटील भागाकार आला . तो त्या अंतराचे संख्येत मेळवावा . जर ती संख्या समीकरणाचे सांगितल्ये संख्येहून उणी आहे . आणि अधिक आहे तर तो भागाकार त्यातून वजा करावा . म्हणजे या दोन रीती करून इच्छित्ये मूळाचे जवळ जवळ एक संख्या निघेल .

४ हे मूळ आणि पूर्वी मूळाजवळ जवळ दोन संख्या काढिल्या आहेत त्यांतून अथवा दुसरी कोणतीही संख्या जी याहून मूळाजवळ आहे ती घेउन पूर्वप्रमाणे पुनः करावे . म्हणजे दुसरे मूळ निघेल . ते असे किं . पूर्वी पेक्षा अधिक जवळ . या प्रमाणे पुनः पुनः करित जावे . म्हणजे अतिच मूळाजवळ जवळ संख्या निघत जाईल .

प्रथम टीप . दोन संख्या घेणे त्या अशा घ्याव्या किं . जांची वजाबाकी उजव्ये कडे शेवटी १ राहील . कारण ही बाकी वर सांगितल्या प्रमाणे गुणक १ हा अंक होईल . आणि पृथक्करण करित्ये समयी लाहान अंतर कामांत घ्यावयास योग्य आहे .

दुसरी टीप . गाणताचा तपशील करित्ये समयी मूळाक तपा-

सावे

(२०२)

सावे - दोन संख्या घेणें त्यांत एक किमतीहून उणी आणि एक अधिक . या रीतीनें दोन मूळांक घेउन त्या पासून शुद्ध करायास एक-
च अंक काढावा . नंतर तें शुद्ध पद अव्यक्त स्थळीं ठेवून काम चाल-
वावें . सांगीतल्ये संख्येहून उणे अंक जाले तर पुनः याहून अधिक
दुसरी संख्या घेउन पूर्ववत् करावें . कदाचित् सांगीतल्ये संख्ये-
हून अधिक जाले तर याचे उलट दुसरी संख्या याहून उणी घेउन
पूर्ववत् करावें . या दोन संख्या घेउन गणित कर्त्ये समयीं भा-
गाकार असा घ्यावा किं . शुद्ध पद संख्येंत चार अंक येतील . नंतर
ही चार अंकस्थानांची संख्या घेउन त्यांत १ अधिक किंवा उणा वर
सांगीतल्या प्रमाणें करून पूर्ववत् करावें . आणि या गणितांत शु-
द्ध संख्येंत अंकस्थानें आठ पर्यंत काढावीं . कारण प्रतिगणित पर्या-
यांत पूर्वपूर्वोपेक्षा उत्तरोत्तर अंकस्थानें दुपट होतात . तेव्हां दुपटी पे-
क्षा अधिकांचा भरवसा नाही . आणि या प्रमाणे पुनः पुनः गणित
पर्याय केल्यानें उत्तरोत्तर खर्ये मूळाजवळ जवळ येईल .

उदाहरणें

प्रथम - $६० + ६० + ६० = १८०$ या घनसमीकरणाचें मूळ किं-
वा क्षवी किंमत काढ .

आतां

(२०३)

आतां सत्वर कळतें किं क्ष-
ची किमत ४ अथवा ५ यांचे
मध्ये आहे.

याजकरिता या दोन स-
ख्या रव्या जाणोन घे - तर पृथ-
करण या प्रमाणे होते.

पुनः ४.२ आणि ४.३ या दोन
सख्या रवरीं मूळें जाणोन घे.

प्रथमसख्या अव्यक्त दु.सख्या
४ क्ष ५
१६ क्ष २५
६४ क्ष १२५
८४ बेरीज १५५
१०० सांगीतली किमत १००
-१६ अंतरे +५५

७१ ही दोन अंतरांची बेरीज
जसे ७१ : १ : १६ : २
याजकरिता क्ष = ४.२ हे
जवळ जवळ

प्र.स. अव्यक्त दु.सख्या
४.२ क्ष ४.३
१७.६४ क्ष १८.४९
७४.०८८ क्ष ७९.५०७
९५.९२८ बेरीज १०२.२९७
१०० सांगीतली किमत १००
-४.०७२ अंतरे +२.२९७

६.३६९ ही दोन अंतरांची बेरीज
जशी ६.३६९ : १ : २.२९७ : ०.०३६
ही ४.३ यांतून वजा करून
क्ष = ४.२६४ हे जवळ जवळ आहे.

पुनः

अव्यक्तपदांचा सर्वांकून मोठा घातप्रकाशक जितक्या किमतीचा आहे. स्रणजे एकवर्णसमीकरणांत मूळ किंवा मूळाची किमत एकच आहे. परंतु वर्गसमीकरणांत मूळें किंवा त्यांचा किमती दोन आहेत. घनसमीकरणांत तीन. चतुर्घातसमीकरणांत चार इत्यादि.

आणि जेव्हा कोणत्याही समीकरणाचें एक मूळ संनिधरीती प्रमाणें निघालें तेव्हां राहिलीं मूळें किंवा त्यांचा किमती या पुढील रीतीकरून काढिता येतात. आतां भाज्य भाजक असावे. त्यांत भाज्याकरितां व्यक्तसंख्येस चिन्ह बदल करून अव्यक्त बाजूस स्थलांतर करावें. स्रणजे तो भाज्य जाला. आणि भाजकाकरितां क्षरणें पूर्व काढिलेलें अवळ अवळचें मूळ. स्रणजे हा भाजक जाला. नंतर या भाजकानें तो भाज्य भागून जो भागाकार येईल तो एकनवें दुसरें समीकरण होईल. जांत सांगितल्ये समीकरणांकून एक घात कमी येईल.

या नव्ये समीकरणाचें मूळ पूर्वसंनिधरीतीनें काढावें. स्रणजे सांगितल्ये समीकरणाचें दुसरें मूळ निघेल. नंतर या दुसरें मूळानें पूर्वप्रमाणें दुसरें समीकरणांकून एक घात कमी असें तिसरें नवें समीकरण करावें. नंतर या तिसरें नव्ये समीकरणाचें मूळ पूर्व अवळचे रीतीनें काढावें. ती सांगितल्ये समीकरण मूळाची तिसरी किमत होईल. या प्रमाणें वर्गसमीकरण होई पर्यंत नवें नवें समीकरण

(२०७)

समीकरण करित जावें . तें आज्ञानंतर वर्गसमीकरणरीतीनें वर्गपुराकरून त्याचीं पूर्ववत् दोनमूळें निघतील - या रीतीकरून सर्व मूळें कळतील -

जसें वरचे उदाहरणाचे समीकरणांत एक मूळ काढिलें तें १०२८०४ आहे - तर त्यास ऋणचिन्ह आणि क्ष जोडून भाज

भाजक

भाज्य .

भागाकार

कजाला क्ष-१०२८०४) क्ष-१५ क्ष+६३ क्ष-५० (क्ष-१३१७१६ क्ष+४८६३) हें दुसरें नवें समीकरण जालें . आतां वर सांगितल्या प्रमाणें कळतें किं . हें वर्गसमीकरण या रूपाचें आहे .

क्ष-१३१७१६ क्ष=-४८६३६३७

यांत वर्ग पुराकरून क्षचा दोन किमती या आहेत :

जे ६५७६५३ आणि ७३१५४३ आतां या दोन सांगीतल्ये घनांचे मूळांचा राहिल्या दोन किमती आहेत . सणजे

क्ष-१५ क्ष+६३ क्ष=५० या समीकरणाचीं तीन मूळें हीं आहेत .

प्रथम मूळ	१०२८०४	} आणि सर्व मूळांची बेरीज बराबर १५ सणजे ही बेरीज सांगीतल्ये घनसमीकरणांतील दुसरे पदाचे बेरीज प्रकाशकाचे बराबर आहे आणि
दुसरें मूळ	६५७६५३	
तिसरें मूळ	७३१५४३	
बेरीज	१५०००००	

सणोनच हीं तीन मूळें शुद्ध आहेत - नाहीतर अशुद्ध होती .

चौथी टीप - या वरचे रीतींत हा मोठा लाभ आहे - जे इतर रीती

ती

ती करून पृथक्करण करून किमत काढायास त्या समीकरणास एक
रूप द्यावे लागते तसे या शितीत नाही कारण किं ही रीति समीक
रणाचे ते रूप आहे त्याजवरच लागत्ये - त्या समीकरणांत कदा
ही करणा पदे किंवा संयुक्त पद असोत जसे या पुढील उदाहरणां
त -

तिसरे - $\sqrt{988x^2 - (x^2 + 20)^2} + \sqrt{996x^2 - (x^2 + 28)^2} = 998$
या समीकरणाचे मूळ किंवा क्षची किमत काढ -

काही तपाशिन्यावर सत्वर कळते कि क्षची किमत ७ याहून
न काही अधिक आहे - तर प्रथम संख्या $x = ७$ आणि दुसरी
संख्या $x = ८$ या दोन संख्या खरी जाणून घे -

प्रथम संख्या $x = ७$ दुसरी संख्या $x = ८$

$87 \cdot 506$ $\sqrt{988x^2 - (x^2 + 20)^2}$ $86 \cdot 876$

$69 \cdot 358$ $\sqrt{996x^2 - (x^2 + 28)^2}$ $68 \cdot 257$

$993 \cdot 250$ बेरीज $995 \cdot 133$

998 मांगितली किमत 998

$- 990$ अंतर $+ 9 \cdot 133$

$+ 9 \cdot 133$

जसे $865 : 9 : 0 \cdot 790 : 0 \cdot 2$ हे जवळ जवळ

याज करिता $x = \frac{9 \cdot 0}{0 \cdot 2}$ हे जवळ जवळ

ही

(२०९)

ही संख्या अधिक आहे याजकरिता याकून उणी ७१ ही घेऊ-

न पुनः	क्ष = ७२	क्ष = ७१
४७९९०	$\sqrt{१४४२९^2 - (६९^2 + २०)}$	४७९७३
६६४०२	$\sqrt{१९६६९^2 - (६९^2 + २४)}$	६६४०४
११४३९२	वेरीज	११३८७७
११४	सांगितली किमत	११४
+ ३९२	अंतर	- १२३
- १२३		
जस ११५	१	१२३
		७१

याजकरिता

क्ष = ७१२४ हे न

वळ जवळ

पांचवी टीप : ही रीति समीकरणाचे कसेही विकट रूप असले तरी त्याजवर लागले आणि ही रीति प्रकाशक समीकरणाचे पृथक्करणेवरही लागते.

प्रकाशक समीकरण संपूर्ण अक्षराने वा घात प्रकाशक ही अव्यक्त आहे ते होय. जसे या पुढील उदाहरणात.

चौथे उदाहरण : क्ष = १०० या समीकरणातून अर्धी किंमत काढ.

या जातीचे समीकरणाचे पृथक्करण सत्वर करावा म्हणजे उम

वागी

(२१०)

चोगी आहे कि. समीकरणाचे लागतंम काढून लागतंम कोष्टका-
चे साहाय्याने पदांचा वेगळाव्या किमती लिहाव्या -

जसे या समीकरणात दोन बाजूंचे लागतंम हे आहे -

क्ष × क्ष लाग = २ हे १०० चे लागतंम आहे -

नंतर तपाशिल्या पासून जवळ समजते कि क्षची किमत
३ आणि ४ या दोन संख्यांचे आत मध्याचे जवळ परंतु ३ या संख्ये-
पासून दूर आणि ४ या संख्येचे जवळ याजकरिता क्ष = ३.५ आ-
णि क्ष = ३.६ या दोन संख्यांचे आणि लागतंमाने तपशील करि-
ता या प्रमाणे होईल -

प्रथम - क्ष = ३.५	दुसरी - क्ष = ३.६
३.५ याचा लाग = ०.५४४०६०	३.६ याचा लाग = ०.५५६३०३
नंतर ३.५ × ३.५ चा लाग = १२.०४२३०	नंतर ३.६ × ३.६ चा लाग = १२.०३३६०
रवरा लाग = २.००००००	रवरा लाग = २.००००००
- ०.०४४०६० अंतरे	+ ०.०३३६००
०.००२६५९	
०.००४५९ अंतरांची बेरीज ..	

जसे ०.००४५९ : १ :: ०.००२६५९ : ०.००२७२ ही दुसरी संख्ये-
ची शुद्धि :

याची $\frac{३.६}{०.००२७२} = क्ष$ हे जवळ जवळ -

पुनः तपासून कळते कि हे थोडे कमी आहे याजकरिता

क्ष =

(२११)

क्ष=३.५९७२७ आणि क्ष=३.५९७२८ या दोन संख्या घे आणि त्या
गस्तमाने तपशील करिता या प्रमाणे होईल.

प्रथम क्ष=३.५९७२७

दुसरी क्ष=३.५९७२८

३.५९७२७ याचा लाग=०.५५५९७३६

३.५९७२८ याचा लाग=०.५५५९७३७

३.५९७२७ X

३.५९७२८ X

३.५९७२७ चा लाग } = १.९९९९८५४

३.५९७२८ चा लाग } = १.९९९९८५३

स्वरांश=२.००००००

स्वरांश = २.००००००

७.०००००९४६

अंतरे

०.०००००४७

०.०००००४७

०.०००००९९

ही अंतरांची बजावाकी - तर

जसे ०.०००००९९ : ०.००००१ : ०.००००४७ : ०.००००४७४७४७ दुसरे संख्ये

च शुद्धीस -

३.५९७२८ ०.०००००० ही व
३.५९७२८ ४७४७४७

गिज क्षये किमतीचे अवळ अवळ -

पांचवे - क्ष+१० क्ष+५ क्ष=२६० या समीकरणांत क्षची
किमत काय आहे -

उत्तर क्ष=४.९९७९८५७

साहावे - क्ष-२ क्ष=५० या समीकरणांत क्षची किमत का
य आहे . . .

उत्तर क्ष=३.८६४८८५४

सातवे - क्ष+२ क्ष-२३ क्ष=७० या समीकरणांत क्षची
किमत

(२१२)

किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=५१३४५७

आठवें - क्ष-१७ क्ष+५४ क्ष=३५० या समीकरणांत क्ष
ची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=१४९५४०७

नववें - क्ष-३ क्ष-७५ क्ष=१०००० या समीकरणांत क्ष
ची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=१०१२६०९

दाहावें - २क्ष-१६ क्ष+४० क्ष-३० क्ष=-१ या समीकरणांत
क्षची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=११२८४७२४

अकरावें - क्ष+२ क्ष+३ क्ष+४ क्ष+५ क्ष=५४३२९ या स
मीकरणांत क्षची किमत काय आहे .

उत्तर क्ष=८४१४४५५

बारावें - क्ष=१२३४५६७८ या समीकरणांत क्षची किम
त काय आहे .

उत्तर क्ष=८४४००२४८

तेरावें - २क्ष-७ क्ष+११ क्ष-३ क्ष=११ या समीकरणांत
क्षची किमत काय आहे .

उत्तर

बौदावें

(२१३)

चौदावे - $(३क्ष^३ - २ \sqrt{क्ष} + १)^३ - (क्ष^३ - ४क्ष \sqrt{क्ष} + ३ \sqrt{क्ष})^३ = ५६$
या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे -

उत्तर क्ष = १८.३६०८७७

घन समीकरण पृथक्करण करायाची काडीनची- रीति.

इष्टराशि साधनाचे साहाय्यानें घनादिसमीकरणाचें मूळ संख्येंत काढायास पूर्वसामान्य रीति फार उपयोगी आणि सोपी आहे - परंतु घनसमीकरणाचेंच मूळ काढायास काडीननें विशेष रीति दुसरी केली आहे - ती यास्थळीं लिहितो - कारण - कदाचित् कोणी या रीतीवरून काम करायास इच्छील तरी चिंता नाही.

या रीतीनें पृथक्करण करणें तर घनसमीकरणास अगत्यजें रूप पाहिजे तें हें होय - स्त्रणजे - जे* अक्ष = ब स्त्रणजे दुसरे पद किंवा दुसरे घाताचें पद त्यांत नसावें - याजकरितां कोणत्याही घनसमीकरणास त्याचें रूप दिल्यानंतर - जसें $क्ष^३ + ५क्ष^२ + ६क्ष =$ र - स्त्रणजे जाचे प्रथमपदास वेळाप्रकाशक नाही असें तर दुसरे पद पक्ष हें तेथून घालविलें पाहिजे - त्याची रीति - ३ प अथवा दुसरे पदाचे वेळाप्रकाशकाच्या ३ येउन त्यास चिन्ह बदल करावें - आणि कोणत्याही दुसरे अव्यक्ताशीं जोडावें - जसें क्ष, तर या प्रमाणें होईल - क्ष - ३ प नंतर सांगितल्या समीकरणांत अव्य-

क्त

क्षचे स्थळीं ठेवावे . सणजे एक नवे या पुढील संक्षेप रूपाचें समीकरण उत्पन्न होईल . जे * अज्ञ = ब हें रूप कार्डानचे रीतीने पृथक्करण करायास अगत्य पाहिजे . आतां यांत $k = \frac{1}{2}$ अ आणि $ड = \frac{1}{2}$ ब असे असतील तर संक्षेप समाकरणास हें पूर्वीचें रूप होईल . जे * $३कज्ञ = २ड$.

नंतर क आणि ड यांचा दोन किमती या पुढील सारणी कोष्टकांत ठेवाव्या .

$$\left. \begin{aligned} ज्ञ &= \sqrt{ड + \sqrt{(ड + के)}} + \sqrt{ड - \sqrt{(ड + के)}} \\ &\text{अथवा} \quad क \\ ज्ञ &= \sqrt{ड + \sqrt{(ड + के)}} - \sqrt{ड - \sqrt{(ड + के)}} \end{aligned} \right\} *$$

सणजे

* मनांत आण किं कोणतेंही मूळ दोन भागांचें आहे . सणजे क्ष आणि य - आतां $क्ष + य = क्ष$ ही बेरीज सांगितल्ये समीकरणात क्षचे स्थळीं ठेवावी . सणजे त्याचें हें रूप होईल -

$$क्ष + य + ३क्षय(क्ष + य) + अ(क्ष + य) = ब .$$

पुनः मनांत आण किं $३क्षय = - अ$. आतां पूर्वे समीकरणांत $३क्षय$ यांचे स्थळीं - अडेविल्याने त्या समीकरणाचें हें रूप होईल . $क्ष + य = ब$. आतां या समीकरणाचे वर्गीतून हें समीकरण सणजे . $क्षय = - \frac{1}{2}$ अ याची चौपट वजा केली सणजे ही बाकी राहात्ये . $क्ष - २क्षय + य = ब + \frac{1}{2}अ$. नंतर याचें वर्गमूळ हे आहे - $क्ष - य = \sqrt{ब + \frac{1}{2}अ}$ हें समीकरण $क्ष + य = ब$ या पूर्व समीकरणांत मिळवून आणि परस्परांची वजाबाकी करून हीं दोन समीकरणां उत्पन्न होतात .

$$\left\{ \begin{aligned} १. क्ष &= ब + \sqrt{ब + \frac{1}{2}अ} = ब + २\sqrt{(\frac{1}{2}ब) + (\frac{1}{2}अ)} \\ २. य &= ब - \sqrt{ब + \frac{1}{2}अ} = ब - २\sqrt{(\frac{1}{2}ब) + (\frac{1}{2}अ)} \end{aligned} \right. \text{अथवा}$$

(२१५)

• झणजे जमूळाची किमत जे \neq अज = ब या संक्षेप समीकरणात निघेल • जेव्हा क्ष = ज - ३प घे • तर ही क्षची किमत क्ष + पक्ष + कक्ष = र या समीकरणात इच्छिते मूळ होईल •

या प्रमाणे सांगितले समीकरणाचे एक मूळ निघाल्यानंतर सांगितले समीकरण पूर्वरीतीने एक घात कमी करून वर्ग समीकरण उत्पन्न होईल • त्याचे वर्ग पूरण रीतीने राहिली दोन मूळे उत्पन्न होतील •

टीप - जेव्हा अ किंवा क हा वेळाप्रकाशक ऋण आहे • आणि कें घन $\sqrt[3]{}$ वर्गाकून अधिक आहे तर हा प्रकार मूळ काढा यास प्रायशः अशक्त आहे •

उदाहरण • क्ष - ६ क्ष + १० क्ष = ८ या समीकरणाची वेगळाली मूळे काढा आहेत •

प्रथम • दुसरे पद घालवावयाकरिता त्याचा वेळाप्रकाशक

$$\left\{ \begin{array}{l} २क्ष = २ड + २\sqrt{(ड+क)} \\ २य = २ड - २\sqrt{(ड+क)} \end{array} \right\} \text{ २ दोन याणी भागून घन मूळ घेऊन }$$

$$\left\{ \begin{array}{l} क्ष = \sqrt{ड + \sqrt{ड+क}} \\ य = \sqrt{ड - \sqrt{ड+क}} \end{array} \right\} \text{ या दोहोची वेगळी वरचे सारणी कोष्टक आहेत जे जे सची किमत •}$$

आता वरचे समीकरणातील दोन दुसरी पदे समष्टेद कल्यापासून कळते • कि दुसरे सारणी कोष्टक प्रथम सारणी कोष्टकाचे किमती बराबर आहेत •

(२१६)

-६ आहे . याचा तृतीय भाग -२ हा आहे . याजकरिता क्ष = ज्ञ + २ हे घेता

$$\text{क्ष}^३ = \text{ज्ञ}^३ + ६ \text{ज्ञ}^२ + १२ \text{ज्ञ} + ८$$

$$-६ \text{क्ष}^३ = -६ \text{ज्ञ}^३ - २४ \text{ज्ञ} - २४$$

$$+ १० \text{क्ष} = + १० \text{ज्ञ} + २०$$

$$\text{ज्ञ}^३ \times - २ \text{ज्ञ} + ४ = ८$$

$$\text{अथवा } \text{ज्ञ}^३ \times - २ \text{ज्ञ} = ४$$

यांत अ = -२ आणि ब = ४ ए जकरिता क = -२ आणि ड = २ याजकरिता

$$\sqrt{\text{ड} + १(\text{ड} + \text{क})} = \sqrt{२ + १(४ - २)} = \sqrt{२ + १ \times २} = \sqrt{२ + २} \sqrt{१} = १.९७७७७७$$

$$\text{आणि } \sqrt{\text{ड} - १(\text{ड} + \text{क})} = \sqrt{२ - १(४ - २)} = \sqrt{२ - १ \times २} = \sqrt{२ - २} \sqrt{१} = ०.४२२२२२$$

नंतर या दोहोंची बेरीज ज्ञची किंमत आहे . सणजे ज्ञ = २ याजकरिता क्ष = ज्ञ + २ = ४ हे क्ष - ६ ज्ञ + १० क्ष = ८ या समीकरणांत क्षचे मूळ आहे .

दुसरीं दोन मूळें काढायकरिता २०७ व्या पृष्ठावरीलरीतीने भागाकार करावा . जसे

$$\text{क्ष} - ४) \text{क्ष}^३ - ६ \text{क्ष}^२ + १० \text{क्ष} - ८ (\text{क्ष}^३ - २ \text{क्ष} + २ = ०$$

$$\text{क्ष}^३ - ४ \text{क्ष}^२$$

$$\times - २ \text{क्ष}^२ + १० \text{क्ष}$$

$$- २ \text{क्ष}^२ + ८ \text{क्ष}$$

$$\times + २ \text{क्ष} - ८$$

$$+ २ \text{क्ष} - ८$$

$$\times \quad \times$$

आतां

(२१७)

आत्ता स्थळांतराने

$$\text{क्ष}^2 - २ \text{क्ष} = -२$$

वर्गपुगकस्थ -

$$\text{क्ष}^2 - २ \text{क्ष} + १ = -१$$

मूळ काढून

$$\text{क्ष} - १ = \pm \sqrt{-१}$$

स्थळांतराने

$$\text{क्ष} = १ \pm \sqrt{-१}$$

सणजे $\text{क्ष} = १ + \sqrt{-१}$ आणि $\text{क्ष} = १ - \sqrt{-१}$ हीं क्षचीं इत्थितीं दोन
मूळें होत -

दुसरें - $\text{क्ष}^2 - १ \text{क्ष} + २० \text{क्ष} = ३०$ या समीकरणांत वेगळा-
लीं मूळें काय आहेत -

$$\text{उत्तर } \text{क्ष} = ३ \text{ अथवा } = ३ + \sqrt{-१} \text{ अथवा } = ३ - \sqrt{-१}$$

तिसरें - $\text{क्ष}^2 - ७ \text{क्ष} + १४ \text{क्ष} = २०$ या समीकरणांत वेगळा-
लीं मूळें काय आहेत -

$$\text{उत्तर } \text{क्ष} = ५ \text{ अथवा } = ५ + \sqrt{-३} \text{ अथवा } = ५ - \sqrt{-३}$$

मरळ व्याज -

कोणत्याही मुदलाचें कितीही मुदतीने व्याज मुदल आणि
मुदती यांशीं समप्रमाणांत आहे - याजकरितां एकवर्षाचें एक रु-
पयाचें व्याज कोणत्याही मुदल आणि त्याचा मुदती वर्ष आणि वर्षाचें
अवयव हीं तीन परस्पर गुणून तो गुणाकार त्या मुदलाचें त्या मुद-
तीचें व्याज होईल - सणजे जर

र =

(२१८)

र = एकरूप्याचे एकवर्षाचे व्याजाचा दर असेल -

प = मुद्दल कर्ज असेल -

त = मुदतीची संख्या असेल -

अ = व्याज मुद्दल स्मरणजे व्याज आणि मुद्दल मिळोन राशि असेल -

परत = पचें त मुदतीचें व्याज हांडील - याजकरिता

$प + परत$ अथवा $प \times (१ + रत) = अ$ ही व्याज मुद्दल राशि -

या समीकरणापासून दुसरे समीकरण अन्यायामें उत्पन्न होतें जापाहून दुसरे पदांचा किमती समजांत येतील - आणि पुढें सांगतो याप्रमाणें त्यास एकत्र करितो -

प्रथम - $अ = प + परत$ हे व्याज मुद्दल -

दुसरे - $प = \frac{अ}{१ + रत}$ हे मुद्दल -

तिसरे - $र = \frac{अ - प}{पत}$ हा व्याजाचा दर -

चौथे - $त = \frac{अ - प}{चर}$ या मुदती -

उदाहरण - कोणत्याही सरळ व्याजाचे दरानें कोणतेंही मुद्दल दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या -

या उदाहरणांत प्रथम समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे - स्मरणजे - $अ = प + परत$ यांत $अ = २प$ - स्मरणजे - मुद्दलाची दुपट अचे स्थळी ठेविली पाहिजे - तर $२प = प + परत$ - अथवा $परत = प$ - अथवा $रत = १$ याजकरिता $त = \frac{१}{र}$

यांत

(३११)

यांत र हे एक रुपयाचे एक वर्षाचे व्याज आहे . याजकरिता स-
रळ व्याजात मुद्दल दुपट होण्यास त मुदती भागाकार आहे . जे को-
णतेही मुद्दल त्याच एक वर्षाचे व्याजात भागिले तो भागाकार . मुद-
ती भागाकार होय . अशात १०० रुपयांस १ वर्षाचे व्याज ५ रुपये
असल . तर मुद्दल दुपट होण्यास $\frac{100}{5} = 20$ वर्षे असतील . अथवा
चौथे समीकरणापासून मुदती सत्वर काढतील त = $\frac{अ-प}{प-र} = \frac{३५-५}{५-१} =$
 $\frac{३०}{४} = \frac{१५}{२}$ हे पूर्व प्रमाणे बराबर आहे .

चक्रवाट व्याज

जी पद सरळ व्याजांत येतात . क्षणजे .

प = मुद्दल

र = एक रुपयाचा एक वर्षाचे व्याजाचा दर .

अ = व्याज मुद्दल राम .

त = मुदती

यांशिवाय चक्रवाट व्याजांत दुसरे एक पद येते - क्षणजे
व्याजाचे दराचे गुणोत्तर ते हे आहे किं एक रुपयाचे एक मुदतीचे व्या-
ज मुद्दल - हें पद दाखवायाकरिता च अक्षर चिन्ह घ्यावे . क्षणजे -

च =

(२२०)

च = १ + २ . हैं एक रुपयाचें एक सुदतीचें व्याज सुदल दाखवितें . तेकां बेगळांत्ये सुदतीचें व्याज सुदल थारितीनें तपशील कर्ता कळतें जसें .

१ रुपया कोणत्येही सुदतीचे व्याज सुदलास आहे . तसें . कोणतेही सांगितलें सुदल . त्या सुदतीचे त्याचें व्याज सुदलास होईल . स्पणजे .

जसें १ रुपया : च :: प : पच . हैं एक वर्षाचें व्याज सुदल आहे .

आणि १ रुपया : च :: पच : पच^२ . हैं दुसरे वर्षाचें व्याज सुदल आहे .

तसें १ रुपया : च :: पच^२ : पच^३ . हैं तिसरें वर्षाचें व्याज सुदल आहे .

आणि इत्यादि .

व्याजकरितां सामान्यतः पच^३ = अ . हैं व्याज सुदल आहे . त सुदतीचें या समीकरणापामून हैं सामान्य समीकरण उत्पन्न होतें .

प्रथम . अ = पच^३ . हैं व्याज सुदल .

दुसरे . प = $\frac{अ}{च}$. हैं सुदल .

तिसरे . च = $\frac{अ}{च^२}$. हैं गुणोत्तर .

चवथे . त = $\frac{अ \cdot अ - अ \cdot प}{अ \cdot च}$

या पासून

(२२१)

यापासून कोणतेही एक पद निघेल . जर गव्हिली तीन पदं सांगी-
तलीं आहेत .

जेव्हा सगळें व्याजच करायाची इच्छा आहे . तेव्हा अ या व्याज
मुद्दलापासून प देें मुद्दल मात्र वजा करावें . म्हणजे याकी गव्हिली
तें व्याज .

उदाहरण . कोणतेही मुद्दल सांगितल्ये चक्रवाढ व्याजाचे
दरानें दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या . तर हें समजाया करि-
तां चवथें समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे . परंतु या प्रश्नाचे सं-
केतप्रमाणें अ=२प तेव्हा याप्रमाणें तपशील होईल .

$$त = \frac{ला० अ - ला० प}{ला० च} = \frac{ला० २प - ला० प}{ला० च} = \frac{ला० २}{ला० च}$$

अज्ञानें जर एक वर्षांत १०० रुपयांस व्याजाचा दर ५ रुपये असेल
ल . तर च = १ + ०.५ = १.०५, याजकरिता .

$$त = \frac{ला० २}{ला० १.०५} = \frac{२०१०००}{०२१०००} = १४.२०६० हे जवळ जवळ .$$

म्हणजे . कोणतेही मुद्दल १४ २/१० वर्षांत दुपट होतें . दर शेंकडा दर व-
र्षास पंचोत्रा व्याज चक्रवादीने असेल तर .

या प्रश्नापासून

(२२२)

या प्रश्नापासून आणि सरळ व्याजांत या सारखे प्रश्न जाहने त्यापासून वेगळाले सुटल दुपट होण्यास सरळ व्याजांत आणि चक्रबाद व्याजांत किती किती सुटती असाव्या ते कळायाम कोष्टक लिहितो -

दर		सरळ व्याज.	चक्रबाद व्याज.
२		५०	३२.००३५
२ ३	शेभरांस एक वर्षास	४०	२५.०००६
३	यादराचे व्याजांत	३३ ३	२३.४४९८
३ ३	एक रुपया किंवा दुसरे	२८ ५	२०.१४८८
४	कोणते ही सुटल दुपट	२५	१७.६९३०
४ ३	होईल या पुढील कोष्ट	२० ३	१५.०४०५
५	कांत मोगीतल्ये वर्षी	२० ३	१४.२०६७
६	नी किंवा सुटतीनी .	१६ ३	११.८९५७
७		१४ ३	१०.२४४८
८		१२ ३	८.००६५
९		११	८.०४३२
१०		१०	७.२७२५

या पुढील

(२२२)

या पुढील कोष्टकांचे साहाय्याने वेगळाल्ये दरानी वेगळाल्ये
मुदतीचे चक्रवार व्याजाचा हिंसाब कर यास फार सुगम पडेल -
एकरुपयाचें व्याज मुद्दल कितीही वर्षांचे संख्येने -

वर्ष	१	२	३	४	४ ३	५	६
१	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
२	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
३	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
४	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
५	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
६	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
७	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
८	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
९	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१०	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
११	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१२	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१३	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१४	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१५	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१६	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१७	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१८	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
१९	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
२०	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००

या कोष्टकांत

(२२४)

या कोष्टकांत सगळे घात क्षणजे चिधान विसाव्ये घातपर्यंत लिहिले आहेत. किंवा एकरुपयाचे व्याज सुद्धल यांचे काम हे आहे कि. कोणत्याही सुद्धलाचे व्याज किंवा व्याज सुद्धल कोणत्याही सुद्धतीचे करयाचे. जी सुद्धत वीस वर्षांचे आंत आहे.

उदाहरण. ५२३० रुपये सुद्धल यास दर साल दर शेकडा ५ रुपये व्याज प्रमाणे १५ वर्षांत चक्रवादीने व्याज सुद्धल रास किती होईल.

कोष्टकांत १५ चे ओळीत ५ यांचे दराग्याली एकरुपयाचे व्याज सुद्धल लिहिले आहे. ते २००७८९ यास सांगीत न्ये सुद्धलाने गुणून

$$\begin{array}{r} ५२३० \\ \times ६२३६७० \\ \hline ४९५७८ \end{array}$$

$$१०३९४५$$

$$\begin{array}{r} १००७२६४७० \\ \times २५८८० \\ \hline \end{array}$$

किंवा १००७२६४७० रु. पा. २. ५८ हे व्याज सुद्धल.

$$५२३०$$

$$५६४२ \dots २ \dots ५८ \text{ हे व्याज.}$$

प्रथमटीप. जेव्हा व्याजाचा दर वर्षाचे कांहीं भागावर आहे. जसे.

जसे अर्धवर्ष - पाववर्ष - इत्यादि - तेहोपण हीच गिनि लागत्ये परंतु असे आहे तर झऱ्या सुदती दाखवितो - आणि च तितक्या सुदतीचे व्याज सुदल -

दुसरी दीप - जेकां कोणत्येही सुदलाचे चक्रवादीने व्याज किंवा व्याज सुदल करची इच्छा आहे तेकां ते या पुढील रीती करून करावे -

प्रथमरीति - जेकां सुदत एक वर्षाचा कोणताही बराबर भाग आहे - पूर्वरीतीने एक रुपयाचे एकवर्षाचे व्याज सुदल काढावे - नंतर ती सुदत वर्षाचा कित्याचा भाग आहे तो अंक त्यास मूळप्रकाशक करून तितके मूळ घ्यावे - म्हणजे त्या सुदतीचे एक रुपयाचे व्याज सुदल जाले - यास सांगीतल्ये सुदलाने गुणावे - म्हणजे इच्छिले त्या सुदतीचे व्याज सुदल जाले -

दुसरी रीति - जेकां सुदत वर्षाचा कोणताही बराबर भाग नाही तेकां सांगीतल्ये सुदतीचे दिवस करावे - आणि एक रुपयाचे एक वर्षाचे व्याज सुदल आहे त्यास ३६५ हा अंक मूळप्रकाशक करून तितके मूळ घ्यावे - ते मूळ एक रुपयाचे एकदिवसाचे व्याज सुदल जाले - मग ते सांगीतल्ये सुदतीचे दिवस संख्या घात पर्यंत वाढवावे - म्हणजे एक रुपयाचे तितक्ये दिवसाचे व्याज सुदल जाले - नंतर यास सांगीतल्ये सुदलाने गुणावे - तो गुणाकार इच्छिले व्याज सुदल होईल - या कामाचा तपशील कसे समयी लागतंम बहुतेक उपगी पडेल -

प्राप्ति

प्राप्ति शब्द कामांत घेतात. ऐसाजे. जो पैसास आरंभ बराबर सुदतीवर होतो. जसा. कर्जाचे व्याज. घरभूमि इत्यादि कांचे भाडे. चाकरीचे वेतन. वर्षासन. आणि वाळपर्वेशी इत्यादि. हे सर्वलाभ सुदतीचे सुदतीस पावतात. परंतु बळकट रुत वर्षाचे सुदतीवर आहेत. यां सर्वलाभांस प्राप्ति असें म्हणतात.

प्राप्ति दोन प्रकारची आहे. वर्तमान आणि भविष्य. वर्तमान प्राप्ति म्हणजे जो पैसा हाती येण्यास आरंभ जाला आहे ती होय. भविष्य प्राप्ति म्हणजे पैसा हाती येण्यास आरंभ जाला नाही. परंतु काही सुदतीने किंवा काही प्रतिबंध असेल तो दूर जात्यावर निश्चित हाती येणार.

जेव्हा प्राप्ति कित्येक वर्षे अवरुद्ध आहे. म्हणजे पैसा पावला नाही. तीस अवरुद्ध प्राप्ति म्हणतात.

प्राप्तीचे भेद दोन आहेत. सावधि आणि निरवधि. सावधि प्राप्ति म्हणजे जा प्राप्तीस काळ मर्यादा आहे. ५ वर्षे. १० वर्षे. इत्यादि. निरवधि प्राप्ति म्हणजे जा प्राप्तीस काळ मर्यादा नाही. अखंड निरंतर चालणारी.

प्राप्तीचे व्याज सुद्धल म्हणजे अवरुद्ध प्राप्तीचे कितक्या वर्षाचे व्याज आणि सुद्धल याची बेरीज.

प्राप्तीची वर्तमान किंमत म्हणजे प्राप्तीचा आधार नवांत धरून

न जो पैका एकाएकी देण्यास घेण्यास योग्य आहे . तो होय .

अ - प्राप्ति

न = अवरुद्ध प्राप्तीची वर्षसंख्या .

च = एकरूप याचें एकवर्षाचें व्याज सुद्धल .

म = प्राप्तीचें व्याज सुद्धल .

व = प्राप्तीची वर्तमान किमत .

अ
च
म
व

आतां चरादींची वर्तमान किमत १ आहे . याजकरितां प्रमाणांन कोणतीही दुसरी राशि . जसां अ . याची किमत निघेल .

जसें - च : १ :: अ : $\frac{अ}{च}$. ही अची वर्तमान किमत . जी एक वर्षानंतर मिळेल .

आणि च : १ :: अ : $\frac{अ}{च}$. ही अची वर्तमान किमत . जी दोन वर्षानंतर मिळेल .

तसें याप्रमाणें पुढेही $\frac{अ}{च}$, $\frac{अ}{च}$, $\frac{अ}{च}$ इत्यादि . या सर्व अचा वर्तमान किमती ३ , ४ , ५ इत्यादि वर्षानंतर मिळतील याजकरितां या सर्वांची बेरीज .

हणजे $\frac{अ}{च} + \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च}$ इत्यादि .

किंवा $(\frac{अ}{च} + \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च}) \times अ$ ही बेरीज न पदापर्यंत नववर्षसंख्येचे प्राप्तीची वर्तमान किमत होईल . आणि निरवधि प्राप्तीची किमत या श्रेणीची अनंत पदे पर्यंत बेरीज आहे . परंतु सत्वर दिसतें किं ही श्रेढी भूमितिप्रमाणांत आहे . जीचें प्रथमपद $\frac{अ}{च}$ गुणोत्तर $\frac{अ}{च}$ आणि गळ १ आहे . याजकरितां या श्रेढीचें सर्वधन किंवा वर्तमान किमत .

व =

(३२८)

$$व = \frac{च-१}{१-१} \times अ = \frac{च-१}{च-१} \times अ$$

जेका प्राप्ति निरवधि आहे . तेका न गळ अनंत आहे . आणि च
ही अनंत आहे . याजकरिता हे पद $\frac{च-१}{१-१} = ०$ शून्य होते . यास्तव
 $\frac{च-१}{१-१} \times अ = ०$ आहे . यापासून कळते कि . पूर्वसमीकरणास
हे रूप होते . $व = \frac{च-१}{च-१}$ सणजे कोणतीही प्राप्ति एकरुपाचे एक व-
र्षाचे व्याजाचे भागून जो भागाकार निरवधि प्राप्तीची किंमत होतो .

अशाच जर व्याजाचा दर शेंभरास पांचोत्रा असेल तर
 $१०० अ \div ५ = २०$ अ हा निरवधि प्राप्तीची किंमत शेंकडा ५ रुप-
ये व्याजाचे दराने आहे . आणि $१०० अ \div ४ = २५$ अ ही निरवधि प्रा-
प्तीची किंमत शेंकडा ४ रुपये व्याजाचा दराने आहे . आणि $१०० अ \div ३ = ३३$ अ ही निरवधि प्राप्तीची किंमत ३ रुपये व्याजाचे दरा-
ने आहे . इत्यादि .

पुनः एकरुपयाचें नवर्षांत व्याज सुदृढ = च आहे . याजक-
रिता च-१ ही त्या सुदृढावर वृद्धी जाली . परंतु त्याचे एक वर्षाचे
व्याज किंवा प्राप्ति जी त्या वृद्धीवर आहे . सणजे च-१ याजक-
रिता

जसे च-१ : च-१ :: अ : स . सणजे

$स = \frac{च-१}{च-१} \times अ$ आतां अवरुद्धप्राप्तीस जे वेगळाले प्रकार लागता-
त ते या पूर्वसमीकरणापासून निघतील .

म =

(२२९)

$$म = \frac{व-१}{व-१} \times अ = वच^n$$

$$व = \frac{व-१}{व-१} \times \frac{अ}{व^n} = \frac{म}{व^n}$$

$$अ = \frac{व-१}{व-१} \times म = \frac{व-१}{व-१} \times वच^n$$

$$न = \frac{ला० म - ला० व}{ला० च} = \frac{मच - म + अ}{ला० अ}$$

$$ला० च = \frac{ला० म - ला० व}{न}$$

$$र = \left(\frac{१}{व} - \frac{१}{व^n} \right) \times \frac{अ}{व-१}$$

या शेवटील समीकरणांत र भविष्य प्राप्तीची वर्तमान किंमत प वर्षांनंतर आहे . ती दाखवितो . आणि हे या प्रमाणे उत्पन्न होते किं .

या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून त्यांत प आणि न वर्षे लिहावी .

$$हणजे \quad \frac{व-१}{व-१} \times \frac{अ}{व} - \frac{व-१}{व-१} \times \frac{अ}{व^n}$$

परंतु कोणत्याही प्राप्तीचे व्याज सुद्धा आणि वर्तमान किंमत कित्येक वर्षांची २१ वर्षे पर्यंत या पुढील दोन सारणी कोष्टकांचे साहाय्याने निघेल .

प्रथम

(२३०)
प्रथम कोष्ठक

एक रुपयाचे मातीचे चक्रवाट व्याजाने व्याज मुद्दल						
वर्षे	दरशेकडारु पये ३ प्र०	दरशेकडारु पये ३ ३ प्र०	दरशेकडारु पये ४ प्रमा०	दरशेकडारु पये ४ ३ प्र०	दरशेकडारु पये ५ प्र०	दरशेकडारु पये ६ प्रमा०
१	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००	१००००
२	२०३००	२०३५०	२०४००	२०४५०	२०५००	२०६००
३	३०७००	३०७६२	३०८२५	३०८७०	३०९२५	३०९७५
४	४१०७५	४११४०	४१२०५	४१२६०	४१३१५	४१३७५
५	५१४०९	५१४७५	५१५४०	५१५९५	५१६५०	५१७०५
६	६१६८४	६१७५०	६१८१५	६१८७०	६१९२५	६१९८०
७	७१९२०	७१९८६	७२०५१	७२०९६	७२१५१	७२१९६
८	८२१५६	८२२२२	८२२८७	८२३४२	८२३९७	८२४५२
९	९२३९२	९२४५८	९२५१३	९२५६८	९२६२३	९२६७८
१०	१०२६२८	१०२६८४	१०२७४०	१०२७९६	१०२८५२	१०२९०८
११	११२८५९	११२९१५	११२९७१	११३०२७	११३०८३	११३१३९
१२	१२३०९०	१२३१४६	१२३२०२	१२३२५८	१२३३१४	१२३३७०
१३	१३३३२१	१३३३७७	१३३४३३	१३३४८९	१३३५४५	१३३६०१
१४	१४३५५२	१४३६०८	१४३६६४	१४३७२०	१४३७७६	१४३८३२
१५	१५३७८३	१५३८३९	१५३८९५	१५३९५१	१५४००७	१५४०६३
१६	१६४०१४	१६४०७०	१६४१२६	१६४१८२	१६४२३८	१६४२९४
१७	१७४२४५	१७४३०१	१७४३५७	१७४४१३	१७४४६९	१७४५२५
१८	१८४४७६	१८४५३२	१८४५८८	१८४६४४	१८४७००	१८४७५६
१९	१९४७०७	१९४७६३	१९४८१९	१९४८७५	१९४९३१	१९४९८७
२०	२०४९३८	२०४९९४	२०५०५०	२०५१०६	२०५१६२	२०५२१८
२१	२१५१६९	२१५२२५	२१५२८१	२१५३३७	२१५३९३	२१५४४९
२२	२२५४००	२२५४५६	२२५५१२	२२५५६८	२२५६२४	२२५६८०
२३	२३५६३१	२३५६८७	२३५७४३	२३५७९९	२३५८५५	२३५९११
२४	२४५८६२	२४५९१८	२४५९७४	२४६०३०	२४६०८६	२४६१४२
२५	२५६०९३	२५६१४९	२५६२०५	२५६२६१	२५६३१७	२५६३७३
२६	२६६३२४	२६६३८०	२६६४३६	२६६४९२	२६६५४८	२६६६०४
२७	२७६५५५	२७६६११	२७६६६७	२७६७२३	२७६७७९	२७६८३५
२८	२८६७८६	२८६८४२	२८६८९८	२८६९५४	२८७०१०	२८७०६६
२९	२९७०१७	२९७०७३	२९७१२९	२९७१८५	२९७२४१	२९७२९७
३०	३०७२४८	३०७३०४	३०७३६०	३०७४१६	३०७४७२	३०७५२८
३१	३१७४७९	३१७५३५	३१७५९१	३१७६४७	३१७७०३	३१७७५९
३२	३२७७१०	३२७७६६	३२७८२२	३२७८७८	३२७९३४	३२८०००
३३	३३७९४१	३३८०००	३३८०५६	३३८११२	३३८१६८	३३८२२४
३४	३४८१७२	३४८२२८	३४८२८४	३४८३४०	३४८३९६	३४८४५२
३५	३५८४०३	३५८४५९	३५८५१५	३५८५७१	३५८६२७	३५८६८३
३६	३६८६३४	३६८६९०	३६८७४६	३६८८०२	३६८८५८	३६८९१४
३७	३७८८६५	३७८९२१	३७८९७७	३७९०३३	३७९०८९	३७९१४५
३८	३८९०९६	३८९१५२	३८९२०८	३८९२६४	३८९३२०	३८९३७६
३९	३९९३२७	३९९३८३	३९९४३९	३९९४९५	३९९५५१	३९९६०७
४०	४०९५५८	४०९६१४	४०९६७०	४०९७२६	४०९७८२	४०९८३८
४१	४१९७८९	४१९८४५	४१९९०१	४१९९५७	४१९९९३	४२००४९
४२	४२९९२०	४२९९७६	४३००३२	४३००८८	४३०१४४	४३०१९९
४३	४४०१५१	४४०२०७	४४०२६३	४४०३१९	४४०३७५	४४०४३१
४४	४५०३८२	४५०४३८	४५०४९४	४५०५५०	४५०६०६	४५०६६२
४५	४६०६१३	४६०६६९	४६०७२५	४६०७८१	४६०८३७	४६०८९३
४६	४७०८४४	४७०९००	४७०९५६	४७१०१२	४७१०६८	४७११२४
४७	४८१०७५	४८११३१	४८११८७	४८१२४३	४८१२९९	४८१३५५
४८	४९१३०६	४९१३६२	४९१४१८	४९१४७४	४९१५३०	४९१५८६
४९	५०१५३७	५०१५९३	५०१६४९	५०१७०५	५०१७६१	५०१८१७
५०	५११७६८	५११८२४	५११८८०	५११९३६	५११९९२	५१२०४८
५१	५२१९९९	५२२०५५	५२२१११	५२२१६७	५२२२२३	५२२२७९
५२	५३२२३०	५३२२८६	५३२३४२	५३२३९८	५३२४५४	५३२५१०
५३	५४२४६१	५४२५१७	५४२५७३	५४२६२९	५४२६८५	५४२७४१
५४	५५२६९२	५५२७४८	५५२८०४	५५२८६०	५५२९१६	५५२९७२
५५	५६२९२३	५६२९७९	५६३०३५	५६३०९१	५६३१४७	५६३२०३
५६	५७३१५४	५७३२१०	५७३२६६	५७३३२२	५७३३७८	५७३४३४
५७	५८३३८५	५८३४४१	५८३४९७	५८३५५३	५८३६०९	५८३६६५
५८	५९३६१६	५९३६७२	५९३७२८	५९३७८४	५९३८४०	५९३८९६
५९	६०३८४७	६०३९०३	६०३९५९	६०४०१५	६०४०७१	६०४१२७
६०	६१४०७८	६१४१३४	६१४१९०	६१४२४६	६१४३०२	६१४३५८
६१	६२४३०९	६२४३६५	६२४४२१	६२४४७७	६२४५३३	६२४५८९
६२	६३४५४०	६३४५९६	६३४६५२	६३४७०८	६३४७६४	६३४८२०
६३	६४४७७१	६४४८२७	६४४८८३	६४४९३९	६४४९९५	६४५०५१
६४	६५५००२	६५५०५८	६५५११४	६५५१७०	६५५२२६	६५५२८२
६५	६६५२३३	६६५२८९	६६५३४५	६६५४०१	६६५४५७	६६५५१३
६६	६७५४६४	६७५५२०	६७५५७६	६७५६३२	६७५६८८	६७५७४४
६७	६८५६९५	६८५७५१	६८५८०७	६८५८६३	६८५९१९	६८५९७५
६८	६९५९२६	६९५९८२	६९६०३८	६९६०९४	६९६१५०	६९६२०६
६९	७०६१५७	७०६२१३	७०६२६९	७०६३२५	७०६३८१	७०६४३७
७०	७१६३८८	७१६४४४	७१६५००	७१६५५६	७१६६१२	७१६६६८
७१	७२६६१९	७२६६७५	७२६७३१	७२६७८७	७२६८४३	७२६८९९
७२	७३६८५०	७३६९०६	७३६९६२	७३७०१८	७३७०७४	७३७१३०
७३	७४७०८१	७४७१३७	७४७१९३	७४७२४९	७४७३०५	७४७३६१
७४	७५७३१२	७५७३६८	७५७४२४	७५७४८०	७५७५३६	७५७५९२
७५	७६७५४३	७६७६००	७६७६५६	७६७७१२	७६७७६८	७६७८२४
७६	७७७७७४	७७७८३०	७७७८८६	७७७९४२	७७८०००	७७८०५६
७७	७८८००५	७८८०६१	७८८११७	७८८१७३	७८८२२९	७८८२८५
७८	७९८२३६	७९८२९२	७९८३४८	७९८४०४	७९८४६०	७९८५१६
७९	८०८४६७	८०८५२३	८०८५७९	८०८६३५	८०८६९१	८०८७४७
८०	८१८६९८	८१८७५४	८१८८१०	८१८८६६	८१८९२२	८१८९७८
८१	८२८९२९	८२८९८५	८२९०४१	८२९०९७	८२९१५३	८२९२०९
८२	८३९१६०	८३९२१६	८३९२७२	८३९३२८	८३९३८४	८३९४४०
८३	८४९३९१	८४९४४७	८४९५०३	८४९५५९	८४९६१५	८४९६७१
८४	८५९६२२	८५९६७८	८५९७३४	८५९७९०	८५९८४६	८५९९०२
८५	८६९८५३	८६९९०९	८६९९६५	८७००२१	८७००७७	८७०१३३
८६	८८००८४	८८०१४०	८८०१९६	८८०२५२	८८०३०८	८८०३६४
८७	८९०३१५	८९०३७१	८९०४२७	८९०४८३	८९०५३९	८९०५९५
८८	९००५४६	९००६०२	९००६५८	९००७१४	९००७७०	९००८२६
८९	९१०७७७	९१०८३३	९१०८८९	९१०९४५	९११००१	९११०५७
९०	९२१००८	९२१०६४	९२११२०	९२११७६	९२१२३२	९२१२८८
९१	९३१२३९	९३१२९५	९३१३५१	९३१४०७	९३१४६३	९३१५१९
९२	९४१४७०	९४१५२६	९४१५८२	९४१६३८	९४१६९४	९४१७५०
९३	९५१७०१	९५१७५७	९५१८१३	९५१८६९	९५१९२५	९५१९८१
९४	९६१९३२	९६१९८८	९६२०४४	९६२१००	९६२१५६	९६२२१२
९५	९७२१६३	९७२२१९	९७२२७५	९७२३३१	९७२३८७	९७२४४३
९६	९८२३९४	९८२४५०	९८२५०६	९८२५६२	९८२६१८	९८२६७४
९७	९९२६२५	९९२६८१	९९२७३७	९९२७९३	९९२८४९	९९२९०५
९८	१००४८६	१००५४२	१००५९८	१००६५४	१००७१०	१००७६६
९९	१०१७४७	१०१८०३	१०१८५९	१०१९१५	१०१९७१	१०२०२७
१००	१०२९८८	१०३०४४	१०३१००	१०३१५६	१०३२१२	१०३२६८

दुसरे

(२३१)

दुसरे कोष्टक

एकरुपयाचे घातीची चक्रवाद व्याजाने वर्तमान किंमत.						
वर्ष	दरशेकडारु पये १ प्रमा०	दरशेकडारु पये २ प्र०	दरशेकडारु पये ४ प्रमा०	दरशेकडारु पये ४ प्र०	दरशेकडारु पये ४ प्र०	दरशेकडारु पये ६ प्र०
१	००७०८	००६६२	००७०९	००७०९	००७०९	००७०९
२	१०११३	१०००३	१०००६९	१०००६९	१०००६९	१०००६९
३	२०२०६	२००९६	२०३०९	२०३०९	२०३०९	२०३०९
४	३०३०९	३०२०९	३०३०९	३०३०९	३०३०९	३०३०९
५	४०४०९	४०३०९	४०४०९	४०४०९	४०४०९	४०४०९
६	५०५०९	५०४०९	५०५०९	५०५०९	५०५०९	५०५०९
७	६०६०९	६०५०९	६०६०९	६०६०९	६०६०९	६०६०९
८	७०७०९	७०६०९	७०७०९	७०७०९	७०७०९	७०७०९
९	८०८०९	८०७०९	८०८०९	८०८०९	८०८०९	८०८०९
१०	९०९०९	९०८०९	९०९०९	९०९०९	९०९०९	९०९०९
११	१०१०९	१००९९	१०१०९	१०१०९	१०१०९	१०१०९
१२	१११०९	११०९९	१११०९	१११०९	१११०९	१११०९
१३	१२१०९	१२०९९	१२१०९	१२१०९	१२१०९	१२१०९
१४	१३१०९	१३०९९	१३१०९	१३१०९	१३१०९	१३१०९
१५	१४१०९	१४०९९	१४१०९	१४१०९	१४१०९	१४१०९
१६	१५१०९	१५०९९	१५१०९	१५१०९	१५१०९	१५१०९
१७	१६१०९	१६०९९	१६१०९	१६१०९	१६१०९	१६१०९
१८	१७१०९	१७०९९	१७१०९	१७१०९	१७१०९	१७१०९
१९	१८१०९	१८०९९	१८१०९	१८१०९	१८१०९	१८१०९
२०	१९१०९	१९०९९	१९१०९	१९१०९	१९१०९	१९१०९
२१	२०१०९	२००९९	२०१०९	२०१०९	२०१०९	२०१०९

कोणत्येही

कोणत्येही प्राप्तीचें कित्येक सांगीतत्ये वर्षांचें सांगीतत्ये व्याजाचे दरानें व्याज सुद्धल काढायाचें.

प्रथम कोष्टकांतून सांगीतत्ये वर्षांचें सांगीतत्ये व्याजाचे दरानें एक रुपयाचें व्याज सुद्धल काढावें. आणि तें सांगीतत्ये प्राप्तीनें गुणावें. तो गुणाकार सांगीतत्ये प्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें त्या दरानें व्याज सुद्धल होईल. त्याची उलट केली असतां वर्षे आणि दर निघेल.

उदाहरण . ५०० रुपये दर वर्षाची प्राप्ति कांहीं निमित्तानें २० वर्षे पर्यंत बंद राहिली असतां चक्रबाढ व्याज दर शेंकडा दर साल रुपये ३३ प्रमाणें तितक्या वर्षांचें व्याज सुद्धल किती होईल.

आतां प्रथम कोष्टकांत वर्षारवालीं २० चे ओळींत रुपये ३३ चे दरा रवालीं एकरुपयाचें व्याज सुद्धल २८.२७९७ आहे तें ५०० शें याणीं गुणून जाला गुणाकार १४१३९.८९ हा किंवा १४१३९ रुपये ३ पावले ४० रेंस हें इकिलें व्याज सुद्धल. हें उत्तर.

कोणत्येही सांगीतत्ये प्राप्तीची सांगीतलीं वर्षे पर्यंत सांगीतत्ये दरानें वर्तमान किमत काढायाची.

दुसरें कोष्टकांतून पूर्वप्रमाणें एकरुपयाची वर्तमान किमत काढावी. आणि ती सांगीतत्ये प्राप्तीनें गुणावी. तो गुणाकार सांगीतत्ये प्राप्तीची सांगीतलीं वर्षे पर्यंतची सांगीतत्ये दरानें वर्तमा-

न किंमत होईल .

उदाहरण . ५०० रुपये दर वर्षाची प्राप्ति वर्षे २० पर्यंत चालणार तिची दर साल दर शेंकडा रुपये ३ हे चक्रवाट व्याज यादरास वंर्तमान किंमत काय होईल .

आतां दुसरें कोष्टकांत वर्षारवालीं २० चे ओळींत रुपये ३ हे चे दरारवालीं एकरुपयाची वर्तमान किंमत १४.२१२४ आहे ती ५०० शें यांणीं गुणून जाला गुणाकार ७१०६.२ हा किंवा ७१०६ रुपये ० पाबले ८० रेंस ही इछिली वर्तमान किंमत आहे . हें उत्तर .

दुसरें . आजपासून १० वर्षांनंतर प्रतिवर्षी २०० रुपये प्राप्ति भाल्ल होणार . ती त्या दिवसापासून ११ वर्षे पर्यंत चालेल . अथवा आजपासून २१ वर्षांनीं बंद होईल . तर त्या प्राप्तीची वर्तमान किंमत दर शेंकडा दर वर्षास ४ रुपये चक्रवाट व्याजाचे दरानें काय होईल .

या सारिरव्ये उदाहरणांत दोन सुदतींचा बरोबर दोन प्राप्तींचा वर्तमान किंमती काढून त्यांची वजा बाकी करावी . म्हणजे याप्रमाणें होतें .

दुसरें कोष्टकांतून काढिल्ये दोन किंमतींची वजाबाकी करावी . आणि ती बाकी सांगितल्ये प्राप्तीनें गुणावी . तो गुणाकार इछिली वर्तमान किंमत होईल .

जसें

(२३४)

जसें कोष्टकांत २१ वर्षांची वर्तमान किमत १४२२२

आणि १० वर्षांची वर्तमान किमत

यांची वजाबाकी

८११०९

५९१८३

२००

११८३६६००

४

२६४००

१००

६४००००

तर ११८३ रुपये २ पावले ६४ रेंस इच्छिली वर्तमान किमत - हे
उत्तर .

PART II.

LOGARITHMS.

CONTENTS.

	PAGE.
Definition and Properties of Logarithms	1
To compute Logarithms	5
Description and Use of Logarithms	12
Multiplication by Logarithms	19
Division by Logarithms	21
Involution by Logarithms	25
Evolution by Logarithms	25

दुसरा भाग



लाग्रतमें



अनुक्रमणिका

	पृष्ठ
व्याख्या आणि लाग्रतमांचे गुण	१
लाग्रतमें उत्पन्न करायाची रीति	५
लाग्रतम कोष्टक कामांत घेण्याची रीति	१२
लाग्रतमानें गुणाकार करायाची रीति	१९
लाग्रतमानें भागाकार करायाची रीति	२१
लाग्रतमानें वर्गादिक करायाचें	२३
लाग्रतमानें वर्गादिमूळ काढायाचें	२५

लाघतंमाचें

कठिण हिंसाब सुगम होण्यास लाघतंमें केलीं आहेत.

तीं हें करितात कीं, भिळवणीनें च गुणाकार, वजाबाकीनें च भागाकार, संख्येचें लाघतं घातप्रकाशकानें गुणिल्यानें च घातादिवृद्धि, आणि संख्येचें लाघतं मूळप्रकाशकानें भागिल्यानें च वर्गादिमूळ

एवणजे लाघतंमें तशाच युक्तीनें उत्पन्न केलेल्या संख्या आहेत, आणि त्या दुसऱ्ये स्वाभाविक संख्यांशीं तशा संबद्ध ठेविल्या आहेत कीं प्रथमांची बेरीज आणि वजाबाकी दुसऱ्यांचे गुणाकाराशीं आणि भागाकाराशीं मिळेल.

अथवा सामान्यतः लाघतंमें गुणोत्तराचे संख्येंत घातप्रकाशक आहेत; अथवा गणितप्रमाणांत संख्यांची श्रेणी आहे, जी भूमितिप्रमाणांत दुसऱ्ये संख्यांची प्रतियोगी होत्ये जसें

$$\left\{ \begin{array}{l} ०, १, २, ३, ४, ५, ६, \text{ घातप्रकाशक अथवा लाघतंमें} \\ १, २, ४, ८, १६, ३२, ६४, \text{ भूमितिश्रेणी} \end{array} \right.$$

अथवा $\left\{ \begin{array}{l} ०, १, २, ३, ४, ५, ६, \text{ घातप्रकाशक अथवा लाघतंमें} \\ १, ३, ९, २७, ८१, २४३, ७२९, \text{ भूमितिश्रेणी} \end{array} \right.$

अथवा $\left\{ \begin{array}{l} ०, १, २, ३, ४, ५, \text{ घातप्रकाशक अथवा लाघतंमें} \\ १, १०, १००, १०००, १००००, १०००००, \text{ भूमितिश्रेणी} \end{array} \right.$

यांत स्पष्ट आहे कीं कोणत्याही भूमितिश्रेणी करितां घातप्रकाशक ए-

कच आहे : आणि याजकरितां एकच स्वाभाविक संख्येस लाग्रतंमाचा जाति पुष्कळ असतील, जशीं भूमितिश्रेणींचीं दुसरीं पदे देवळाळीं केलीं, जसें वरचे भूमितिश्रेणींत २, १, १० अथवा दुसरें कोणतेंही; आणि एक मध्यस्थापनानें सर्वसंख्या भूमितिश्रेणींत आणवतील, आणि त्यांम प्रमाणानें लाग्रतंमें देववतील, जरी पूर्णांक अथवा दशांश असतील.

आणखी या श्रेणींचे स्वभावापासून प्रकट आहे कीं जर कोणतेही दोन घातप्रकाशक एकत्र मेळविले तर त्यांची बेरीज त्या संख्येचा घातप्रकाशक होईल, जी संख्या भूमितिश्रेणींत त्या घातप्रकाशकांचे खालचे संख्यांचा गुणाकार आहे, जसें प्रथमश्रेणींत २ आणि ३ हे घातप्रकाशक मिळून ५ जाले; आणि ४ आणि ८ म्हणजे त्या घातप्रकाशकांचे खालचीं पदे परस्पर गुणून ३२ होताना म्हणजे ते ही संख्या आहे, जीचा घातप्रकाशक ५ आहे.

तशाचरीतीनें, जर कोणताही एक घातप्रकाशक दुसऱ्यांतून वजा केला, तर याकी त्या संख्येची घातप्रकाशक होईल, जी संख्या त्या दोन घातप्रकाशकांचे खालचे पदांचा भागाकार आहे, जसें घातप्रकाशक ६-घातप्रकाशक ४ = २; आणि या घातप्रकाशकांचे खालचीं पदे ६४ आणि १६ आहेत, त्यांचा भागाकार = ४ आहे, म्हणजे हीच संख्या आहे जीचा घातप्रकाशक २ आहे.

या कारणास्तवही, जर कोणत्याही संख्येचें लाग्रतंम आपल्या

घातप्रकाशकानें

(३)

घातप्रकाशकानें गुणिलें; तर गुणाकार त्या घाताचे लाग्रतंमा बरोबर होईल; जसें पूर्ववरचे श्रेणींत ४ याचा घातप्रकाशक अथवा लाग्रतंम २ आहे; आणि जर यास ३ नीं गुणिला तर गुणाकार = ६ होईल, आणि हें ६४ चें लाग्रतंम आहे. आणि ६४ चो होन्वा घन आहे.

आणि जर कोणत्याही संख्येचें लाग्रतंम तीनचे मूळप्रकाशका नें भागिलें, तर भागाकार त्या मूळाचे लाग्रतंमा बरोबर होईल. जसें ६४ याचा प्रकाशक अथवा लाग्रतंम ६ आहे; आतां जर यास २ नीं भागिला, तर भागाकार = ३ होईल; आणि हें ८ या संख्येचें लाग्रतंम आहे. तेव्हां हें ६४ या संख्येचें वर्गमूळ आहे.

जिं लाग्रतंम कें कांमंत फार उपयोगी आहेत त्यांस अशा भूमि निश्रेढीशीं संबद्ध केलीं कीं जा श्रेणीचीं पदे दशगुण वाढताना, जसें पूर्व तीन श्रेणीतील शेवटील कोष्टक; आणि सांप्रत बहुत करून पुस्तकांत जें लाग्रतंम कोष्टक आहेत ते अशा शीतीनें च उत्पन्न केलेले आहेत. या जातीचे लाग्रतंमाचें प्रसिद्ध चिह्न हेंच आहे कीं १० याचा घातप्रकाशक अथवा लाग्रतंम १ आहे; १०० यांचे २, १००० यांचे ३, इत्यादि. आणि दशांशांमध्ये १ याचें लाग्रतंम = -१ आहे, ०.१ याचें लाग्रतंम = २ आहे; ०.०१ याचें लाग्रतंम = ३ आहे, इत्यादि. कृशीहि लाग्रतंम उत्पन्न केलीं तरी त्या सर्वांत एकाचें लाग्रतंम ० शून्य आहे. यापासून निघतें कीं कोणतीही संख्या जी १ आणि १० यांचे मध्ये आहे तीचें लाग्रतंम ० आणि काही

अपूर्णक

अपूर्णांक अवयव होतील. तसें १० आणि १०० यांचे मधील कोण-
त्येही संख्येचें लाग्रतम १ आणि कांहीं अपूर्णांक अवयव होतील.
याप्रमाणें पुढेही आणि हें लाग्रतमाचें पूर्णांक स्मरण जे जांस लाग्र-
तम प्रकाशक स्मरणाना ते स्वल्पानें कळतात, याजकरितां पुस्तकांत
लिहिले नाहीत, परंतु काम करित्ये समयां व्यवहारांत घेतात.

लाग्रतमाचा दुसरा व्याख्याप्रकार हाच आहे कीं कोणत्येही
संख्येचें लाग्रतम दुसरें कोणत्येही संख्येचे घातप्रकाशकाचे बरोबर
आहे, जा संख्येचा घात यासांगीतल्ये संख्येचे बरोबर आहे; स्म-
रण जे, जर $n = r$, तर नहें नचें लाग्रतम आहे; यांत नधन किंवा ऋण
अथवा शून्य असेल, आणि रमूळ कोणतीही संख्या असेल, जशाशीती-
चें लाग्रतम कामांत आणविलें. जेव्हां $n = ०$, तेव्हां $n = १$ आहे, रमू-
ळाची कशीही किमत्त असो; हें दाखविते, कीं १ चें लाग्रतम सर्वदा
सर्वलाग्रतमाचें जातीमध्ये $= ०$ आहे, जेव्हां $n = १$, तेव्हां $n = २$ आहे;
यापासून दिसतें कीं रमूळ सर्वदा ती संख्या आहे, जीचें लाग्रतम $= १$
आहे सर्वलाग्रतम शितीमध्ये. जेव्हां रमूळ $= २७१०२८१०२८४५२$ इ-
त्यादि आहे तेव्हां हे परबलेत नसंख्यांचीं लाग्रतमें न प्रकाशक आहे-
त; स्मरण न संख्या अथवा (२७१०२८४५२) याचें हे परबलिक ला-
ग्रतम सर्वदा न आहे.

परंतु जेव्हां रमूळ $= १०$ आहेत, तेव्हां न संख्येचें सामान्य
लाग्रतम न प्रकाशक होतो! अशाशीतीनें कोणतीही संख्या १०,

अथवा

(५)

अथवा नू चें सामान्य लाग्रतंम नप्रकाशक आहे; स्त्रणोन १० च्या तौचघा-
न ओ सांगीतल्ये संख्येचें बरोबर आहे. स्त्रणोन १०० हा १० च्या वर्ग आहे,
याजकरिता त्यांचें लाग्रतंम = २ आहे; आणि १००० हा १० च्या घन आहे,
याजकरिता त्यांचें लाग्रतंम = ३ आहे. यापासूनही, जर $५० = १०^{१.६९८९७}$
तेव्हां ५० चें सामान्य लाग्रतंम = १.६९८९७ हें आहे. आणि सामान्यतः या प-
दामध्ये

स्त्रणजे	१०,	१०,	१०,	१०,	१०,	१०,	१०,	१०,	१०,
अथवा	१००००,	१०००,	१००,	१०,	१,	०.१,	०.०१,	०.००१,	०.०००१,
यांचींअनुक्रमे	}	४,	३,	२,	१,	०,	-१,	-२,	-३,
लाग्रतंम									

आणि ही रीति पूर्वसांगीतल्ये रीतीप्रमाणेच आहे.

कृत्य

१, २, ३, ४, ५ इत्यादि, यांतून कोणत्याही स्वाभाविक संख्येचें
लाग्रतंम काढयाचें.

प्रथम रीति.

१, १०, १००, १०००, १००००, इत्यादि, ही भूमितिश्रेणीचे, आणि
०, १, २, ३, ४, इत्यादि, ही गणितश्रेणी त्या भूमिति
श्रेणीस लाग्रतंम करितां ये. नंतर १ आणि १० अथवा १० आणि १०० अ-
थवा श्रेणीतील कोणत्याही त्या दोन संनिध पदाचें भूमिति मध्यप्रमाण काढ-
जांचे मध्ये इच्छिली संख्या आहे. यारीतीनें ही, काढिलेले भूमिति मध्यप्रमाण
आणि

(६)

आणि त्याचे जवळचें शेवटपद हीं घेउन त्यांचें दुसरें भूमिति मध्यप्रमाण काढ; आणि याप्रमाणें पुढेंही, जाचें लाग्रतंम इच्छिलें आहे तें पद निघेपर्यंत. अशीं जितकीं भूमिति मध्यप्रमाण पदें काढिलीं, तशीं तितकीं गणितश्रेढीचीं गणितमध्यप्रमाणपदें काढ लक्षणजे तीं त्या भूमितिमध्यप्रमाणपदांचीं अनुक्रमें लाग्रतंमें होतील.

उदाहरण

१ या संख्येचें लाग्रतंम काढायास इच्छिलें आहे.

एथे इच्छिली संख्या १ आणि १० यांचे मध्ये आहे, तेव्हां

प्रथम १० चा लाग = १ आणि १ चा ला = ०

याजकरितां $(१+०) \div २ = \frac{१}{२} = .५$ हें गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१० \times १} = \sqrt{१०} = ३.१६२२७७७$ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

याजकरितां ३.१६२२७७७ यांचें लाग्रतंम = .५ आहे.

दुसर्यानें १० चा ला = १ आणि ३.१६२२७७७ चा ला = .५

याजकरितां $(१+.५) \div २ = .७५$ हें गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१० \times ३.१६२२७७७} = ५.६२३४१३२$ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

लणोन ५.६२३४१३२ चा ला = .७५ आहे.

तिसर्यानें १० चा ला = १ आणि ५.६२३४१३२ चा ला = .७५

याजकरितां $(१+.७५) \div २ = .८७५$ हें गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१० \times ५.६२३४१३२} = ७.४९९९४२२$ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

लणोन ७.४९९९४२२ चा ला = .८७५ आहे

चौथ्यानें

(७)

चौथ्याने १० चा ला = १ आणि ७४९८९४२२ चा ला = ०७५,

याजकरिता $(१ + ०७५) \div २ = ०३७५$ हे गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१० \times ७४९८९४२२} = ८६५९६४३१$ हे भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

सुणोन ८६५९६४३१ चा ला = ०३७५ आहे

पांचव्याने १० चा ला = १ आणि ८६५९६४३१ चा ला = ०३७५,

याजकरिता $(१ + ०३७५) \div २ = ०६८७५$ हे गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१० \times ८६५९६४३१} = ९३०५७२०४$ हे भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

सुणोन ९३०५७२०४ चा ला = ०६८७५,

साहाय्याने ८६५९६४३१ चा ला = ०३७५ आणि ९३०५७२०४ चा ला = ०६८७५,

याजकरिता $(०३७५ + ०६८७५) \div २ = ०५३१२५$ हे गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{८६५९६४३१ \times ९३०५७२०४} = ८९७६८७१३$ हे भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

सुणोन ८९७६८७१३ चा ला = ०५३१२५ आहे

यारीतीने पुढेही करून, पंचवीस पर्याय जाल्यावर उत्पन्न होणे कीं

८९९९९९९८ चा ला = ०५४२४२५ हा आहे; आतां ही संख्या आणि ९ यांत

अंतर थोडे आहे सुणोन हेच लाग्रतंम ९ संख्येचें कामांत घेतात.

दुसरी रीति

तीचें लाग्रतंम इच्छितें आहे ती संख्या दाखवायास बघे; आणि ती-

च व संख्या एकाचें उणी दाखवायास अ घे, सुणजे असें कीं, ब-अ=१,

आतां असंख्येचें लाग्रतंम कळतें आहे; आणि अ+ब ही बेरीज दाखवाया-

स स घे.

१. तेका ०६०५००९६२० इत्यादि, या दशांशांस सचे किमतीनें भाग, आणि जो भागाकार येईल तो संभाळ ! नंतर संभाळिल्ये भागाकारास सचे वर्गानें भाग, आणि भागाकार येईल तो पूर्ववर्ती संभाळ ! पुनः या दुसऱ्या भागाकारास सचे वर्गानें भाग, आणि भागाकार येईल तो पूर्वप्रमाणें संभाळ ! आणि याप्रमाणेंच पुढें करित-चाल, स्तणजे उत्तरोत्तर भागाकार सचे वर्गानें भागावे, पुढें भागाकार येईनापर्यंत.

२. तेव्हां हे सर्व भागाकार अनुक्रमें एकाखातीं एक लिहि, स्तणजे पहिला भागाकार वर लिहि, आणि दुसरा आदिकरून अनुक्रमें त्याचैखातीं; नंतर त्यांस अनुक्रमें १, २, ५, ७, ९ इत्यादिविषम अंकांनीं भागाकार येतोपर्यंत अनुक्रमें भाग, स्तणजे पहिल्ये संभाळलेल्ये भागाकारास एकानें भाग, दुसऱ्यास तिहिनीं, तिसऱ्यास पांचांनीं, चौथ्यास सातानीं, इत्यादिरीतीनें पुढेंही.

३. या शेवटीं निघालेल्ये सर्व भागाकारांची बेरीज घे, नंतर ही बेरीज बःअ याचें लाग्रतंम जाली; याजकरितां चालाग्रतंमांत बपेक्षां एक उणी संख्या अचें लाग्रतंम सांगितलें आहे तें मेळीव, स्तणजे ही शेवटील बेरीज इतिल्ये बसंख्येचें लाग्रतंम होईल. अथवा बचा लाग = अचा ला + $\frac{n}{स} \times (१ + \frac{१}{२स} + \frac{१}{३स} + \frac{१}{४स} + \text{इत्यादि})$ यांत न = ०६०५००९६२० इत्यादि

उदाहरणें

प्रथम, २ या संख्येचें लाग्रतंम इतिलें आहे.

एथे इतिली संख्या २ = ब, त्यापेक्षां एकानें उणी संख्या १ = अ, या

संख्येचें

(९)

संख्येचें लाग्रतम ० शून्य आहे, आणि $२ + १ = ३ = स$ आहे, आणि याचा वर्ग $स^२ = ९$ आहेत, तेव्हां याप्रमाणें काम होईल.

३) ०८६८५८८९६४	१) ०८९५२९६५४ (०८९५२९६५४
९) ०८९५२९६५४	३) ३२९६९९६२ (१०७२३३२९
९) ३२९६९९६२	५) ३५७४४४० (७१४८८८
९) ३५७४४४०	७) ३९७१६० (५६७३७
९) ३९७१६०	९) ४४१२९ (४९०३
९) ४४१२९	११) ४९०३ (४४६
९) ४९०३	११) ५४५ (४२
९) ५४५	१५) ६१ (४
९) ६१	

$$\frac{३}{२} \text{ चें ला } = \frac{००१०२९९९५}{१०००००००}$$

$$१ \text{ चें ला } = \frac{०००००००००}{१००००००००}$$

$$२ \text{ चें ला } = \frac{००१०२९९९५}{१००००००००}$$

दुसरें, ३ या संख्येचें लाग्रतम काढायास इच्छिलें आहे.

एथे इच्छिली संख्या ३ = ब, त्यापेक्षां एकानें उणी संख्या २ = अ, त्यांची बेरीज अ + ब = स = ५, याचा वर्ग $स^२ = २५$, तेव्हां याप्रमाणें काम होईल.

५) ०८६८५८८९६४	१) १७३७१७७९३ (१७३७१७७९३
२५) ०१७३७१७७९३	३) ६९४८७१२ (२३१६२३७
२५) ६९४८७१२	५) २७७९४८ (५५५९०
२५) २७७९४८	७) ११११८ (१५८८
२५) ११११८	९) ४४५ (५०
२५) ४४५	११) १८ (२
२५) १८	

$$\frac{३}{२} \text{ चें ला } = \frac{१७६०९१२६०}{१००००००००}$$

$$२ \text{ चें ला } = \frac{००१०२९९९५}{१००००००००}$$

$$३ \text{ चें ला } = \frac{०४७१२१२५५}{१००००००००}$$

(१०)

तेव्हां या कारणास्तव संख्यांचे लाग्रतमांची बेरीज त्या संख्यांचे गुणाकाराचे लाग्रतमा बरोबर आहे; आणि त्या लाग्रतमांची वजाबाकी त्या संख्यांचे भागाकाराचे लाग्रतमाचे बरोबर आहे. तर पूर्व दोन काढिलेलीं लाग्रतमां आणि १० चें लाग्रतम यांपासून बहुतेक दुसरीं लाग्रतमां उत्पन्न होतील. जसें या पुढील उदाहरणांत सांगतो.

तिसरें उदाहरण.

यास्तव $२ \times २ = ४$, याजकरितां

२ चें ला . . . = ३०१०२९९९५ $\frac{३}{५}$

यांत २ चें ला . . . = ३०१०२९९९५ $\frac{३}{५}$

मिळवून बेरीज ४ चें ला . . . = ६०२०५९९९० $\frac{६}{५}$

चौथें उदाहरण.

यास्तव $२ \times ३ = ६$ याजकरितां

२ चा ला . . . = ३०१०२९९९५

यांत ३ चा ला . . . = ४०३९२९२५५

मिळवून बेरीज ६ चा ला . . . = ७०८९५९२५०

पांचवें

(११)

पंचवें उदाहरण.

यास्तव २ = ८ याजकरितां

२ चा ला = २०१०२९९५ $\frac{३}{२}$

यास ३ नीं गुणून

८ चा ला = १०२०९९८७

साहावें उदाहरण.

यास्तव ३ = ९ याजकरितां

३ चा ला = ४७७१२१२५४ $\frac{७}{२}$

यास २ नीं गुणून

९ चा ला = ९५४२४२५०९

सानवें उदाहरण

यास्तव $\frac{१०}{२}$ = ५ याजकरितां

१० चा ला = १०००००००००

यातून २ चा ला = २०१०२९९५ $\frac{३}{२}$

बजाकरून बाकी } = ६९८९७०००४ $\frac{३}{२}$

५ चा ला

आठवें

(१२)

आठवें उदाहरण

यास्तव $३ \times ४ = १२$ याजकरिता

३ चा ला = ४७७१२१२५५

यांत ४ चा ला = ६०२०५९९९९

मिळवून १२ चा ला = १०७९९८१२४६

आणि या सामान्यरीती प्रमाणें पुनः पुनः हिंसाब करून दुसऱ्या संख्या ७, ११, १३, १७, १९, २३, इत्यादि, यांचीं लाग्रतंमें निघतील, नंतर गुणाकारानें आणि भागाकारानें स्वत्यांत दुसरीं कोणती ही लाग्रतंमें काढितां येतील, अथवा कोष्टकांत लाग्रतंमें लिहिलीं आहेत तीं शुद्ध करितां येतील.*

लाग्रतंम कोष्टक कामांत घेण्याची रीति

एकापेक्षा अधिक संख्यांचीं लाग्रतंमें काढायाचा रीति पूर्वी सांगितल्या; आतां अपूर्ण पदांचीं लाग्रतंमें कशीं काढावीं हें दाखवायाचें आहे. या कामाकरितां पाहिलें पाहिजे कीं पूर्णांकांत भूमितिश्रेणीचीं पदे उजव्याकडून डाव्याकडे एकापासून वाढत जातात, तशीं अपूर्णांकांत डाव्याकडून उज

* याशिवाय दुसऱ्या अनेक युक्तींनीं गणितज्ञ लाग्रतंमें काढितात; परंतु त्या युक्ती गणिताचे बहु ग्रंथांचे अतिअभ्यासा वांचून समजान येणार नाहीत, याजकरितां त्या एथे लिहिल्या नाहींत.

व्येकडे

ज्येकडे एकापासून उतरत आतात. परंतु या श्रेणीलाचें लाग्रतम पूर्वप्रमाण आहे, त्यांत इतकाच भेदकीं हें ऋण आहे. यांतून दिसतें कीं १० चें ला = +१ आहे. तशेंशींतीनें $\frac{१}{१०}$ अथवा १ याचें ला -१ आहे; आणि १०० चें ला = +२ आहे; आणि $\frac{१}{१००}$ अथवा ०१ याचें ला = -२ आहे; आणि असेंच पुढेंही.

यापासून प्रकट होतें कीं सामान्यतः सरूपसर्वसंख्या पूर्णांक अथवा अपूर्णांक किंवा मिश्र आहेत, तथापि त्यांचें लाग्रतमोचें दशांशस्थळींचें अंक सरूपच आहेत, लाग्रतम प्रकाशकांत मात्र भेद आहे. आणि हा प्रकाशक धन किंवा ऋण होईल जसें त्या संख्येचें प्रथम अंकाचें स्थळ आहे, दशांशस्थळींचें अंक सर्वदा धनच आहेत.

जसें २६५१ याचें लाग्रतम = ३४२३४१० तर त्या संख्येचा $\frac{१}{१०}$ अथवा $\frac{१}{१००}$ किंवा $\frac{१}{१०००}$ इत्यादिचें लाग्रतम पुढें प्रमाणें होईल.

संख्या	लाग्रतम
२६५१	३४२३४१०
२६५१	३४२३४१०
२६५१	१४२३४१०
२६५१	०४२३४१०
२६५१	-१४२३४१०
०२६५१	-२४२३४१०
००२६५१	-३४२३४१०

यांत दिसतें, संख्येंत जितकीं पूर्णांक स्थळें आहेत त्यांहून एक उणा प्रकाशक होतो, अथवा, एकचें स्थळ सोडून तेथून डावेंकडे अथवा उजवेंकडे

कडे संख्येचा प्रथम अंक किती स्थळांवर आहे तितके स्थळांचा संख्या क प्रकाशक होतो; हा प्रकाशक सर्वदा लाग्रतमाचे दशांशचिन्हाचे ठाने कडे लिहावा.

सांगीतत्ये संख्येत जेव्हां पूर्णांक आहेत तेव्हां प्रकाशक धन होतो. जेव्हां संख्येत पूर्णांक नाहीत तेव्हां प्रकाशक ऋण होतो. त्याचें चिन्ह प्रकाशकाचे वर अथवा डावे कडे लिहितात. जसें जा संख्येत १, २, ३, ४, ५ तशीं पुढें पूर्णांक स्थळे आहेत, त्या संख्यांचे प्रकाशक ०, १, २, ३, ४ हे आहेत; म्हणजे पूर्वी सांगीतल्या प्रमाणें एक अंक उणा करून प्रकाशक होतो. आणि संख्येत अपूर्णांक आहेत तेव्हां त्याचा प्रथम प्रथम द्विमास्य नय अंक पुढें दशांशस्थळें आहेत त्याचा प्रकाशक सर्वदा नें -१ -२ -३ -४ कितीवें स्थळ हें दाखवितो.

या समयी स्मरणांत असावे, जरी प्रकाशक ऋण आहे, तरी सर्वदा लाग्रतम अपूर्णांक धन आहेत.

कोष्टकांतून कोणत्याही संख्येचें लाग्रतम काढावयाची रीति

पहिली, जेव्हां संख्या १०० चे आंत आहे, अथवा, संख्येत अंक स्थळे दोन आहेत, तेव्हां लाग्रतम कोष्टकपत्रकाचे प्रथम पृष्ठावर त्या संख्येचें लाग्रतम प्रकाशक मुळां ठीकर मिळतें. जसें ५ या संख्येचें लाग्रतम ०.६००००० आणि २२ या संख्येचें लाग्रतम १.३६१०२८ आणि ५० या संख्येचें लाग्रतम १.६९८००० याप्रमाणें स्पष्ट आहे.

दुसरी, जेव्हां संख्येत १०० हून अधिक ती १०००० चे आंत आहे. अथवा संख्येत तीन अथवा चार अंकस्थाने आहेत, तेव्हां लाग्र-
तंम कोष्टकांत संख्या शब्दाचे खाती तीन तीन अंकाचा ओळी आ-
हेत. त्यांत ते अंक पाहून त्या अंकाचे समोर लाग्रतंम लिहिले आहे
ते घ्यावे. संख्येत चौथा अंक असल्यास संख्या शब्दाचे समोर जे अ-
ंक आहेत त्यांत तो अंक पाहून त्या अंका खाती पूर्व तीन अंकांचे स-
मोरील कोष्टकांतले अंक घेऊन त्यांमधून्याखालचे ओळीत दोन अंक
अधिक आहेत त्यांत या कोष्टकावरचे पाहून ते दोन अंक प्रथम लाउ-
न त्यांचे मागे दशांश चिन्ह द्यावे; आणि पूर्व गतीप्रमाणे प्रकाशक
लिहावा, तें त्या संख्येचें प्रकाशक सद्धा लाग्रतंम जातें. जसें २५१
या संख्येचें लाग्रतंम २३९९६७४ हें आहे, म्हणजे कोष्टकांत दशांश
३९९६७४ निघतात त्यांचा प्रकाशक २ हा अंक केला. याचें कारण
संख्येत पूर्णांक स्थळें ३ आहेत. आणि ३४०९ या संख्येचें लाग्रतंम
१५३२६२७ हें आहे, म्हणजे ५३२६२७ हे दशांश कोष्टकांतून निघा-
ले, त्यांचा प्रकाशक १ केला; कारण, पूर्णांक स्थळें २ आहेत.

तिसरी, जेव्हां संख्येत अंकस्थळें चौहोंपैक्षा अधिक आहेत तेव्हां
प्रथम चार स्थळांचे अंकांचें लाग्रतंम पूर्व गतीनें काढावे; आणि त्याचे अव-
रें अधिक लाग्रतंम घेऊन त्या दोन लाग्रतंमांची व त्यांचे दोन संख्यांची वजा-
बाकी करून दोन वाक्या काढावा; नंतर याप्रमाणें त्रिराशितपशील करावा.

(१६)

जशी दोन संख्यांची वजावाकी

त्यांचे दोन लाग्रतमांचे वजावाकीस होत्ये

तसा संख्येतील बाकी राहिला अंक

त्याचे लाग्रतमास प्रमाण होतो

आतां हें इलाफळ लाग्रतम पूर्वदोन लाग्रतमांत जें लाहान आहे त्यांत मिळवून बेरीज घ्यावी; हा बेरीज सांगितले सर्वसंख्येचे लाग्रतम आला.

उदाहरण

३४००२६ या संख्येचे लाग्रतम काढावयाचे

३४०००० या संख्येचे लाग्रतम = ५३०६२७

३४९००० या संख्येचे लाग्रतम = ५३२७५४

वजा ९०० बाकी आणि वजा ९२७ बाकी

तेव्हां जसे १०० : ९२७ :: २६ : ३३ इलाफळ

हें इलाफळ ३३ लाग्रतम ५३०६२७ यास मिळवावे = ५३२६६० हें

३४००२६ या संख्येचे लाग्रतम आले.

चौथी, जेव्हां संख्येत काही पूर्णांक आणि काही अपूर्णांक अथवा सर्व अपूर्णांकच आहेत तेव्हां दशांश चिन्ह नाहीं असे मनांत आणून पूर्वरीतीने लाग्रतम काढावे. नंतर पूर्णांक अपूर्णांकरीतीने प्रकाशक धन अथवा ऋण वेईल तसा लिहावा.

पांचवी, जेव्हां संख्या व्यवहारी अपूर्णांक समजाति आहे, तेव्हां अंश आणि छंद यांचे लाग्रतम वेगळाले काढून छंदाचे लाग्रतम

अशाचे

अंशोंचे लाग्रतममन वजा करून बाकी काढावी; ही बाकी दशांशांचे लाग्रतम आहे. याजकरिता प्रकाशक ऋण होईल.

साहावी. जेव्हां संख्या भागानुबंधपूर्णांक आहे, तेव्हां त्या भागानुबंधपूर्णांकास विषम अंपूर्णांकाचे रूप देउन अंश छेदांचे लाग्रतम काढून पूर्वप्रमाणे वजाबाकी करावी.

उदाहरणे

प्रथम $\frac{२७}{११}$ यांचे लाग्रतम काढावयाचे.

अंश ३७ यांचा लाग = १५६०००

छेद १४ यांचा लाग = १९७३१२८

$\frac{२७}{११}$ यांचा लाग = $\frac{१५६०००}{१९७३१२८}$ हे उत्तर.

दुसरें. $१७ \frac{१५}{११}$ यांचे लाग्रतम काढावयाचे.

आता $१७ \frac{१५}{११} = \frac{२०५}{११}$ तेव्हा

अंश ४०५ यांचा लाग = २६०७४५५

छेद ११ यांचा लाग = १२६११२८

$१७ \frac{१५}{११}$ यांचा लाग = $\frac{२६०७४५५}{१२६११२८}$ जाता हे उत्तर.

सांगीतल्ये लाग्रतमापासून संख्या काढावयाची रीति.

ही संख्या कोष्टकापासून पूर्वर्चे उतर मार्गांनी उत्पन्न होत्ये, म्हणून सांगीतल्ये लाग्रतम कोष्टकांत शोधून त्याची संख्या काढावी. वतर व सांगीतल्याप्रमाणे प्रकाशकावरून त्या संख्येत दशांश चिन्ह करावे, म्हणजे

ती संख्या उत्पन्न जाती-

उदाहरणें याप्रमाणे

लाग्रतम १-५३२८०० यापामूनसंख्या = ३४११ उत्पन्न जाती

लाग्रतम -१-५३२८०० यापामूनसंख्या = ३४११ उत्पन्न जाती

परंतु जें लाग्रतम सांगितल्याचरावर कोष्टकांत मिळत नाही तेव्हां त्या लाग्रतमाहून कांहीं उणें व कांहीं अधिक ऐशीं दोन लाग्रतमें कोष्टकांतून काढून व त्या दोहोचा संख्या कोष्टकांतून काढून त्यांची वजाबाकी करावी आणि त्यांतील पुनंतर लाग्रतम सांगितल्ये लाग्रतमांत वजा करून बाकी काढावी; नंतर याप्रमाणें निगडितपणील करावा.

अशीं दोन कोष्टकांतील लाग्रतमांची वजाबाकी

त्यांचे संख्यांचे वजाबाकीस होत्ये-

तशी सांगितलें व पुनंतर लाग्रतम यांची वजाबाकी

मिळविल्यास प्रमाण होत्ये-

आतां हे इलाफळ पुनंतर संख्यांस मिळवावें ती बेरीज सांगितल्ये लाग्रतमांची संख्या होईल

उदाहरण

सांगितलें लाग्रतम १-५३२७०० याची संख्या काढवयाची-

आतां सांगितल्ये लाग्रतमाहून जवळचें अधिकतर व पुनंतर लाग्रतमें कोष्टकांत पुढें सांगतो याप्रमाणें आहेत-

अधिकतर

(१९)

अभिप्रेत ५३२३५४	याची संख्या ३४१०००	सांगीतले लाग्रतम ५३२३०८
५३२३५४	३४०९००	५३२३२७
१२७	१००	८९

तरजसे १२७ : १०० :: ८९ : ६४ हे इलाफळ.
तेव्हा हे ६४ पुनतर संख्येस मिळवून पूर्वी सांगितले गेलेले प्रकाशका-
प्रमाणे दशांशांचे घ्यावे म्हणजे सांगितले लाग्रतमाची संख्या
३४०९६४ आली.

ज्या प्रकाशक क्रम असलेला लाग्रतम या प्रमाणेच आहे-१५३२३०८
तर त्याची संख्या ३४०९६४ या प्रमाणे होईल.

लाग्रतमाने गुणाकार करावयाची रीति

गुण्य आणि गुणक यांची लाग्रतमे कोष्टकातून काढून त्यांची बेरीज
घ्यावी म्हणजे ती बेरीज गुणाकाराचे लाग्रतम जाईल नंतर त्या बेरीजेपा-
सून पूर्वरीतीने संख्या काढावी ती संख्या गुणाकार होईल.

लाग्रतम दशांशांची बेरीज घेत्ये. समयी शेवटीं हातीं अंक येईल
तो धून आहे याजकरिता प्रकाशकधन असल्यास त्यांत तो हातचा मिळ-
वून प्रकाशक ल्याहावा. तो प्रकाशक धन होईल. कदाचित् प्रकाशक क्र-
म असल्यास तो हातचा अंक त्यांत वजा करून बाकी राहील ती क्रम प्र-
काशक ल्याहावा. हातची बाकी राहील तर ती धन, आणि प्रकाशक बाकी

राहील

राहील तर तो कृण अथवा धन असेल त्याप्रमाणें लिहावा :

उदाहरणें

प्रथम २३१४ यांस ५०६२ याणी गुण दुसरे २५८१९२६ यांस ३४५७२९१

याणी गुण.

संख्या	लाग	संख्या	लाग
गुण्य २३१४ =	१३६४३६३	गुण्य २५८१९२६ =	०४११९४४
गुणक ५०६२ =	०७०४३२२	गुणक ३४५७२९१ =	०५३८७१६
गुणाकार ११७१३४७ =	<u>३०६८६८५</u>	गुण ८९२६४८ =	<u>०९५०६८०</u>

तिसरे ३००२ आणि ५९७१६ आणि ०३१४७२८ हेपरस्पर गुण
ने गुणाकार सांग :

संख्या	लाग
३००२ =	०५९१२८७
५९७१६ =	२७७६०९१
०३१४७२८ =	<u>-२४९७९३५</u>
गुणाकार ७१३३५३ =	<u>१८६५३१३</u>

टीप एथे कृण-२ आहेन ते धन दोहोंस रद करिताब, तेकां
हातया १ तो धन लिहिला.

चवथें ३५८६ आणि २१०४६ आणि ०८३७२ आणि
००२०४ हेपरस्पर गुणन गुणाकार सांग :

संख्या

(२१)

संख्या		लाग
३५८६	=	०५५४६१०
२१०४६	=	०३२३१७०
०८३७२	=	-१०२२८२९
००२९४	=	-२४६८३४७
गुणाकार ०१८५७६१८	=	-१२६८९५६

टीप. एथे हातचे आले २ ते भाजक प्रकाशक ऋण-२ आ-
हेत त्याणी रद्द केले, तेव्हां ऋण-१ बाकी राहिला तो लिहिला.

लाग्रतमानें भागाकार करावयाची

रीति

भाज्याचे लाग्रतमांत भाजकाचें लाग्रतम वजा करून बाकी राही-
ल ती भागाकाराचें लाग्रतम होईल. त्यापासून जी संख्या निघेल ती भा-
गाकार जाहला.

भाजकाचे प्रकाशकाचें रूप बदल करावें, रणजे धन असल्या-
स ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावें; परंतु दशांश वजा बाकीचे
शेवटास हातचा अंक असल्यास तो धनच आहे तेव्हां भाजक प्रकाशक
धन असल्यास त्यांत मेळवून मग रूप बदल करावें. तसें ऋण असल्या-
स हातचा अंक असेल तितका भाजक प्रकाशक रद्द करून प्रकाशकाची
बाकी राहिल तीचें रूप बदल करावें. भाज्य भाजकाचें प्रकाशक वर सांगी-
तल्या प्रमाणें बदल करून समान जाति आल्यास मिळवून ल्याहावे. मि

न जाति

(२२)

न जानि जाल्यास जितके कृण असतील तितके धन रद्द करून बाकी राहील ती कृण धन गाहून लिहावी.

उदाहरणें

प्रथम २४१६३ हे भाज्य ४५६७ या भाजकानीं भाग.

संख्या		लाग
भाज्य २४१६३	=	४३८३१५१
भाजक ४५६७	=	३ ६५१६३१
भागकार ५२६०७८	=	<u>०७३३५२०</u>

दुसरें ३७१४० हे भाज्य ५२३७६ या भाजकानीं भाग.

संख्या		लाग
भाज्य ३७१४०	=	१५६९९४७
भाजक ५२३७६	=	२७१९१३२
भागकार ०७२०७७	=	<u>-२८५०८१५</u>

तिसरें ०६३१४ हे भाज्य ००७२४१ या भाजकानीं भाग.

संख्या		लाग
भाज्य ०६३१४	=	-२८००३०५
भाजक ००७२४१	=	-३८५९७९९
भागकार ८७१९७९	=	<u>०९४०५०६</u>

एथे

(२३)

एथें दशांशवजावाकीने जेवदास हातच्या १ तो धन त्याणें ऋण-३ तून
१ रद केला तेकां वाकी-२ गहिरो ते बदल करितां धन आले ते भाज्याचे
ऋण-३ नीं रद केले. संपूर्ण प्रकाशक ० लिहिले.

चवथें १७४३८ हे भाज्य १२९४७६ या भाजकांनीं भाग.

संख्या

लाग

भाज्य १७४३८

— १८७१४५६

भाजक १२९४७६

— १११२१८९

भागकार ०५७४४७

— २७५९२६७

एथें भाजकप्रकाशक धन आहे तो बदल करून समान जाति भाज्य भाज-
क जाले. त्यांची वेरीज करून लिहिले.

टीप.

त्रिगुणीत सप्त व्यस्त पाहून कल्पिते गुण्य गुणां च लाग्रतमांची
वेरीज घेवून त्यांत आजकलाग्रतम वजा करवें वाकी राहील तें इजाफ-
लाचें लाग्रतम जालें, त्यापासून जी संख्या निघेल तें इजाफळ होय.

लाग्रतमानें वर्गादिक करावयाचें

जा संख्येचें वर्गादिक करावयाचें त्या संख्येचें लाग्रतम त्या वर्गा-
दिकाचे प्रकाशकांनीं गुणावें. तो गुणाकार त्या वर्गादिकाचें लाग्रतम
जालें नंतर त्याची संख्या काढावी. ती संख्या वर्गादिक होईल.

टीप. जेव्हां लाग्रतमप्रकाशक ऋण आहे आणि घनप्रकाशक
धन

(२४)

धन आहे तेव्हां गुणाकार करण होईल; परंतु लाग्रतंम दशांश गुणा-
कार मेळवणीचे शोवटास हातचा अंक असेल तो धन आहे तेव्हां तो
करण प्रकाशक गुणाकारांत वजा करून बाकी राहील ती करण अथवा
धन असेल ती पाहून तशी लिहावी.

उदाहरणे

प्रथम. २५७९१ यांचा वर्गकर-

संख्या	लाग
मूळ २५७९१	०४११४६८
वर्गप्रकाशक	२
वर्ग ६६५१७४	<u>०८२२९३६</u>

दुसरें. ३०७१४६ यांचा घनकर-

संख्या	लाग
मूळ ३०७१४६	०४८७३४५
घनप्रकाशक	३
घन २८९७५८	<u>१४६२०३५</u>

तिसरें. ००९१६३ यांचा चतुर्घातकर-

संख्या	लाग
मूळ ००९१६३	-२९६२०३८
चतुर्घातप्रकाशक	४
चतुर्घात ००००७०४९४	<u>-५८४८१५२</u>

(२५)

टीप. एथे हातचे ३ धन आहेत तेव्हां प्रकाशक - $२ \times ४ = - ८$ त्या
त धन ३ आहेत ते वजाकरून बाकी राहिले - ५, ते लिहिले.

एवथे १००४५ यांचा ३६५ घात कर.

संख्या	लाग
मूळ १००४५	०००१९५०
घनप्रकाशक	३६५
	<hr/>
	९३५०
	११७००
	५८५०
	<hr/>
३६५ घात ५१४९३२	<u>७११७५०</u>

लाग्रतमाने वर्गादिमूळ काढायचाचें.

दिल्ये संख्येचें लाग्रतम काढवें.

हें लाग्रतम मूळप्रकाशकांनीं भागावें, तें भागाकाराचें लाग्रतम जा-
लें; नंतर त्याची संख्या काढावी, ती संख्या वर्गादिमूळ होईल.

टीप. जेव्हां लाग्रतम प्रकाशक भाज्यस्थळीं ऋण आहे आणि
तो भाजकांनीं निःशेष उडत नाही तेव्हां तितके अंकांनीं वाढविला असतां
निःशेष उडेल तितके अंकांनीं वाढवून भागावा; नंतर वाढविले अंक ते-
व्हाटे दशक पुढील दशांशांत प्रथम स्थळावर अंक आहे त्यांत मेळवून
भाजकांनीं भागावा. याप्रमाणें पुढें करित जावें.

उदाहरणें

(२६)

उदाहरणें

प्रथम ३६५, यांचें वर्गमूळ काढ.

संख्या

लाग

वर्ग ३६५ २) ३५.६३२३

मूळ १९.१०४९६ १२८११४६ $\frac{1}{3}$

दुसरें १२३४५, यांचें घनमूळ काढ.

संख्या

लाग

घन १२३४५ ३) ४००१४०१

मूळ २३.१११६ १३६३८३ $\frac{1}{3}$

तिसरें २, यांचें १० घातमूळ काढ.

संख्या

लाग

१० घात २ १०) ०.३०१०३०

मूळ १.०७९७७३ ०.०३०१०३

चवथें १०४५, यांचें ३६५, घातमूळ काढ.

संख्या

लाग

३६५ घात १०४५ ३६५) ०.०१९११६

मूळ १.०००१२१ ०.००००५३ $\frac{1}{2}$

पांचवें

(२७)

पांचवें १०९३ यांचें काढ

संख्या

लाग

वर्ग ००९३ ३) - २९६८४८३

मूळ ३०४९५९ - १४८४३४९ $\frac{१}{२}$

टीप. या जागेवर भाजक ३ ते भाज्य-२ होत बराबर एक वेळ जातात म्हणून भागाकारस्थळी प्रकाशक - १ लिहिता.

साहाय्ये ३/०००४८ यांचें काढ

संख्या

लाग

घन ०००४८ ३) - ४६९२४९

मूळ ००८०९७३ - २८९७४७

टीप. या जागेवर भाजक ३ ऋण-४ होत बराबर न जातात म्हणून वाढवून ६ केले त्यांत ३ बराबर २ वेळा गेले, तेव्हां वाढविले २ ते २ दशाक त्यांस दशांश प्रथमस्थळीचे ६ मेळवितां ०६ आले जात ३ आठवेळ जातात. पुढें याचप्रमाणें करावें.

सातवें ३१४१६ X ८२ X $\frac{१३}{२१}$ लायतं मानें काय होतात.

आठवें ००२१६ X ७५१३ X $\frac{१३}{२१}$ लायतं मानें काय होतात.

नववें जसे १२४९ : ३५८ : १०४६ : लायतं मानें काय होतात.

दाहावें जसे १७२४ : $\sqrt{\frac{१३}{२१}}$: ६९७७ : ला.

PART III.

ELEMENTS OF GEOMETRY.

CONTENTS.

	PAGE.
Definitions and Remarks	1
Axioms	18
Theorems	14
Of Ratios and Proportions—Definitions	100
Theorems	103
Of Planes and Solids—Definitions	136
Theorems	140
Problems	175

तिसरा भाग

भूमि नीचें आदिकारण

अनुक्रमणिका

	पृष्ठ
व्याख्या	१
प्रत्यक्षें	१३
सिद्धान्त	१४
गुणोत्तर आणि प्रमाण — व्याख्या	१००
सिद्धान्त	१०३
पातळी आणि भरिवाचा — व्याख्या	१३६
सिद्धान्त	१४०
कृत्यें	१३५

श्री

भूमिति.

व्याख्या.

१ बिंदू स्पर्णजे तोच होय. जास स्थितिमात्र आहे. महत्त्व आणि माप नाही. स्पर्णनच त्यास लांबी रुंदी आणि जाडी नाही.

२ रेषा स्पर्णजे तीच होय. जीस लांबी मात्र आहे. जाडी आणि रुंदी नाही.

३ पानळी स्पर्णजे अवकाश अथवा दोन मापांची आकृति होय. तीं दोन मापें लांबी आणि रुंदी. परंतु जाडी बांचून.



४ पिंड अथवा भरीव स्पर्णजे तीन मापांची आकृति होय. तीं मापें लांबी रुंदी आणि ओंडी अथवा उंची.



५ रेंघा स्पर्णजे त्याच होत. सरळ अथवा बांकडी किंवा मिश्र. मिश्र स्पर्णजे सरळ आणि बांकडी या दोनीं जीत एकत्र मिळाल्या आहेत.

(२)

६ सरळरेष तीच होय. जी एक शेवटा पासून दुसरें शेवटाचे दिशेस समोर गेली आहे. अथवा दोन विंदूंमध्ये जी सर्वांहून लाहान अंतर मापिले.

जेव्हां पुढें कोठेही रेष इतकेंच सांगेल तेव्हां तेथे सरळ रेष जाणावी.

७ वांकडीरेष तीच होय. जी एक शेवटा पासून दुसरें शेवटाकडे समोर न गेली म्हणजे ती दिशा बदल करून गेली आहे.

८ रेषा त्याच होत. जा समांतर अथवा तिकिस अथवा लंब अथवा स्पर्श आहेत.

९ समांतररेषा त्याच होत. जांत लंबांतर सर्वत्र बराबर आहे. आणि कितीही वाढविल्या तरी एक दुसरीशीं मिळत नाही.

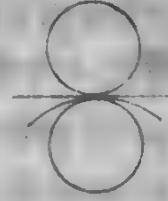
१० तिकिसरेषा त्याच होत. जांत अंतर अधिक उणें आहे. आणि उणें आहे तिकडे अधिक वाढविल्या असतां त्यांचीं टोंकें एकत्र मिळतात.

११ लंबरेष तीच होय. जी सरळ रेषेवर उभी असतां तिचें शिर एक बाजूपेक्षा दुसरें बाजूवर.

(३)

बाजूवर अधिक झोंकत नाहीं. अथवा तिचे दो
हों बाजूकडील दोन कोन बराबर होताने.

१३ स्पर्शरेषा अथवा स्पर्शबिंदू तेंच होय.
जी बर्तुळावर अथवा कोण त्याही बांकडेयेरेषेवर
किती वाढविली तरी छेदिल्या बांचून बर्तुळास
स्पर्शमान करित्ये.



१३ कोन सृणजे दोन दिशांस गेलेल्ये दोन रे
षांचीं टोंकें एकत्र मिळताने ती. अथवा त्या रेषां
चा झोंक अथवा अंतर होय.



१४ कोन दोन प्रकारचे आहेत. काटकोन आणि निर्कसकोन.
त्यांत निर्कसकोनाचे दोन भेद आहेत. लघु आणि विशाळ.

१५ काटकोन तोंच होय. जो एकरेषेवर दुस
री लंबरेषा केल्यापासून आला. अथवा त्या लंबा
चे दोन बाजूंस बराबर दोन कोन आले. ते काट
कोन.



१६ निर्कसकोन तोंच होय. जो दोन निर्कस रे
षांपासून आला. आणि तो काटकोनाहून ला
हान किंवा सोटा असतो.



१७ लघुकोन काटकोनाहून लाहान आहे.

१८ विशाळकोन काटकोनाहून सोटा आहे.

(४)

१९ पातळी दोन प्रकारची आहे सरळ आणि बांकडी.

२० सरळपातळी तीच होय जी जबर सरळरेघ फिरवून फिरवून कशीही ठेविली तरी सर्वत्र सारखी लागत्ये. अथवा सरळरेघेचे दोन बिंदू पातळीस स्पर्श करितात. तसे सर्व बिंदू स्पर्श करील ती सरळपातळी. आणि जी अशी नव्हे ती बांकडी पातळी.

२१ सरळपातळीस मर्यादा दोन आहेत. सरळरेघ. किंवा बांकडीरेघ.

२२ जा सरळपातळीस मर्यादा सरळरेघ आहे. तीस बाजू अथवा कोन यांचे संख्येप्रमाणे अनेक नामें होताना. कारण. तीस जितक्या बाजू तितकेच कोन आहेत. त्यांची संख्या सर्वोद्द न थोड्या अशा तीन.

२३ जा आकृतीस बाजू अथवा कोन तीन आहेत. तीस त्रिकोण म्हणतात. त्या त्रिकोणास बाजू आणि कोन यांचे गुणाप्रमाणे वेगळालीं नामें होताना.

२४ समबाजू त्रिकोण नोच होय. जाचा तीन बाजू बराबर आहेत.



(५)

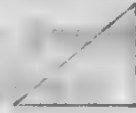
२५. समद्विबाजू त्रिकोण तोच होय. जाचा दोन बाजू बराबर आहेत.



२६. विषमबाजू त्रिकोण तोच होय. जाचा तीन बाजू परस्पर विषम आहेत.

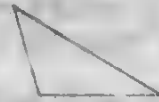


२७. काटकोन त्रिकोण तोच होय. जाचा एक कोन काटकोन आहे.

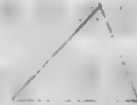


२८. दुसरे त्रिकोण तिर्कस कोन त्रिकोण आहेत. लघु कोन त्रिकोण अथवा विशाल कोन त्रिकोण.

२९. विशाल कोन त्रिकोण तोच होय. जाचा एक कोन विशाल कोन आहे.



३०. लघु कोन त्रिकोण तोच होय. जाचे तीनही कोन लघु कोन आहेत.



३१. जा आकृतीस चार बाजू अथवा चार कोन आहेत. त्या आकृतीस चौबाजू अथवा चौकोन म्हणतात.

३२. समांतररेषा चौकोन तेच होय. जाचे बाजूंचे दोनही जोड समांतररेषा आहेत. आणि त्यास यात्रमाणें नांवें होतात. काटकोन चौकोन. चौरस. रांबस आणि रांबाचूद.

(६)

३३ काटकोन चौकोन तेंच होय. जा स
मांतर बाजू चौकोनांत एक कोन काटकोन
आहे.



३४ चौरस तेंच होय. जें समबाजू चौको
न आहे. म्हणजे जाची लांबी आणि रुंदी
बराबर आहे.



३५ रांबायद तेंच होय. जें तिकस कोन
समांतररेष चौबाजू आहे.



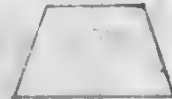
३६ रांबस तेंच होय. जें रांबायद चारी
बाजू बराबर पण तिकस कोन आहे.



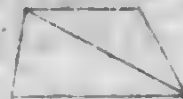
३७ त्रापीज्यंम तेंच होय. जाचा चारही
बाजू समोरासमोरचे रेषांशी समांतररेषा
नाहींत.



३८ त्रापीज्यायद तेंच होय. जाची बाजू
त बाजूंचा एक जोड समांतररेषा आहेत.



३९ कर्णरेष तीच होय. जी सरळरेष
समोरासमोरचे दोन कोन सांधित्ये.



४० जा पातळीस चौहोंपेक्षां अधिक बाजू आहेत. तीसला मान्यतः बहुबाजू स्मरणतात. आणि त्या पातळीस बाजू आणि कोन यांचे संख्येवरून वेगळ्यां विशेष नावे आहेत.

४१ पंचकोन बहुकोन तें होय. जास पांच बाजू आहेत. षट्कोणास ६ बाजू. सप्तकोनास ७ बाजू. अष्टकोनास ८ बाजू. नवकोनास ९ बाजू. दशकोनास १० बाजू. एकादशकोनास ११ बाजू. द्वादशकोनास १२ बाजू आहेत.

४२ समबहुकोन तें होय. जाचा सर्वबाजू व सर्वकोन बराबर आहेत. आणि जाचा यासारख्या बराबर नाहीत. तें विषम बहुकोन होय.

४३ समबाजूत्रिकोण तीनसमबाजूंची समपातळी आहे. आणि चौरस त्यासारखीच चारबाजूंची समपातळी आहे.

४४ कोणतीही आकृती समबाजू होय. जेव्हां तिचा सर्व बाजू बराबर आहेत. तसे सर्वकोन बराबर आहेत. ती समकोन होय. जेव्हां हीं दोनीं बराबर आहेत. तेव्हां समपातळी जाती.

४५ वर्तुळ समपातळी ती होय. जीस मर्यादा यांकडीरेष आहे. जारेषेस परिघ स्मरणतात. तो परिघ मध्यबिंदूपासून सर्वत्र सारखे अंतरानें आहे. त्या बिंदूस वर्तुळ मध्य स्मरणतात.

केवळ परिघासही बहुधा वर्तुळ स्मरणतात.



(८)

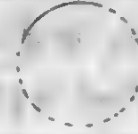
४६ त्रिज्या तीव्र होय. जीरेष मध्यविंदू
वासून परिघपर्यंत केली आहे.



४७ वर्तुळाचा व्यास तोच होय. जीरेष
मध्य छेदून पारगेली. तीचे दोनही शेवट परि
घावर आहेत.



४८ वर्तुळाचा कौस तोच होय. जो परिघा
चा भलता एक तुकडा आहे.



४९ ज्या सरळरेष आहे. जी कौसाचे दोनी
शेवट सांधिल्ये.



५० खंड. वर्तुळाचा भलता एक तुकडा
आहे. जास मर्यादा कौस आणि ज्या आहे.



५१ अर्धवर्तुळ म्हणजे वर्तुळाचे अर्ध अ
थवा खंड जास मर्यादा कौस आणि व्यास
आहे.



कोणे वेळेस अर्धपरिघास अर्धवर्तुळ
म्हणतात.

५२ सेकतोर तोच होय. जाची मर्यादा कौ
स आणि दोन त्रिज्या आहेत.

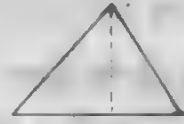


(९)

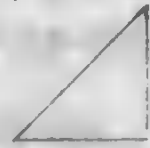
५३ वर्तुळपाद सेकतोर आहे. ज्याचा कोस परिघाचा चौथा भाग आहे. आणि त्याचा दोन त्रिज्या परस्परान्वर लंब आहेत.



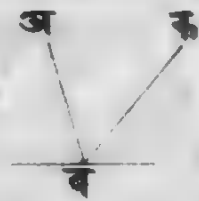
५४ कोणत्येही आकृतीची उंची तीच होय. जो शिरोपासून समोरचे बाजूवर लंब केला आहे. जा बाजूस पाय खणतात.



५५ काटकोन त्रिकोणांत काटकोना समोरचे बाजूस कर्ण खणतात. आणि राहिले दोन बाजूंस बाजू खणतात. केव्हां भूज कोटी असंही.



५६ जेव्हां कोणताही कोन तीन अक्षरांनी विहित करितात. एक अक्षर कोनस्थळीं आणि दोन अक्षरें कोनरेखांचे शेवटांवर. तो कोन सांगले समयी कोनस्थळींचें अक्षर मध्ये उच्चारवें.



५७ सर्व वर्तुळमात्रांचे परिघाचे ३६० भाग मानिले त्यांस अंश खणतात. एक अंशाचे ६० भाग मानिले त्यांस कळ खणतात. एक कळेचे ६० भाग मानिले त्यांस विकळ खणतात. याप्रमाणे पुढेही जाणावे.

(१०)

५८ कोनावें माप कोणत्येही वर्तुळाचे कौसावर आहे. जा वर्तुळाचा मध्यकोन बिंदू आणि तो कोस कोनरेषांचे मध्ये आहे. त्या कौसावर जितके अंश आहेत ते कोनावें माप होय.



५९ रेषा किंवा ज्या वर्तुळ मध्यापासून सम दूर स्पर्शतात. जर वर्तुळ मध्यापासून त्यांजवर केलेले लंब बराबर आहेत.



६० जा सरळ रेषेवर मध्यापासून केलेला लंब दुसऱ्याहून अधिक लांब आहे. ती सरळ रेषा मध्यापासून दुसऱ्यापेक्षा अधिक दूर स्पर्शतात.

६१ वर्तुळ खंडांतर कोन तोच होय. जो खंडाचे कौसावर कोणत्येही स्पर्शापासून कौसाचे शेवटांपर्यंत दोन रेषांनीं होतो.



६२ वर्तुळ खंडावर कोन तोच होय. जो त्याचे समोरचा अथवा सल्लमेंट कौसावर कोणत्येही स्पर्शापासून त्या कौसाचे शेवटांपर्यंत दोन रेषांनीं होतो.

(११)

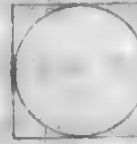
६३ परिघकोन तीव्र होय. जाचा कोनबिंदू परिघावर आहे. आणि मध्यकोन तीव्र होय. जाचा कोनबिंदू वर्तुळ मध्यस्थळी आहे.



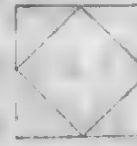
६४ एक सरळ रेषाकृती वर्तुळांत केली अथवा तिचे भोंवते संलग्न वर्तुळ केलें. जेव्हां तिचे सर्व कोन परिघावर आहेत.



६५ एक सरळ रेषाकृती वर्तुळा भोंवती संलग्न केली. अथवा वर्तुळ त्यांत केलें. जेव्हां आकृतीचा सर्व बाजू वर्तुळ परिघास स्पर्शितान.



६६ एक सरळ रेषाकृती दुसऱ्या सरळ रेषाकृतीचे आंत केली अथवा तिचे भोंवती संलग्न केली. जेव्हां तिचे सर्व कोन दुसऱ्या आकृतीचे बाजूंवर ठेविले आहेत.



६७ छेदनरेष तीव्र होय. जी वर्तुळ परिघास आंतून स्पर्शित दुसऱ्याकडे परिघ छेदून पार बाहेर गेली आहे.



६८ दोन त्रिकोण अथवा कोणत्याही दोन सरळ रेषाकृती पर

स्पर्

स्वर सम बाजू लक्षणतात. जेव्हां एकाचा सर्व बाजू दुसऱ्याचे सर्व बाजूंशीं अनुक्रमें प्रत्येकीं बराबर आहेत. आणि त्यांस परस्पर सम कोन लक्षणतात. जेव्हां एकाचे सर्व कोन अनुक्रमें दुसऱ्याचे सर्व कोनांशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत.

६९. एकरूपाकृती त्याच होत. जा परस्पर सम कोन असून सम बाजू आहेत. अथवा एकीचा सर्व बाजू आणि सर्व कोन दुसऱ्याचा सर्व बाजू आणि सर्व कोन यांशीं प्रत्येकीं अनुक्रमें बराबर आहेत. असें कीं एक आकृती दुसऱ्या आकृतीवर ठेविली असतां एकीचा सर्व बाजू दुसऱ्याचा सर्व बाजूनीं सर्वांशीं ढांकिल्या जातील. यानंतर त्या दोन आकृती असोन एकच आकृती आहे असें दिसण्यांत येईल.

७०. सरूपाकृती त्याच होत. जेव्हां एकीचे सर्व कोन अनुक्रमें दुसऱ्याचे सर्व कोनांशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत. आणि कोनांचा बाजू प्रमाणांत आहेत.

७१. कोणत्याही आकृतीची परिमिती तीच होय. जी तिचे सर्व बाजूंची मिळून बेरीज आहे.

७२. निश्चित नेंच होय. जें कांहीं करणें अथवा केल्याचा ताळा दाखविणें. तें निश्चित दोन प्रकारचें आहे. कृत्य आणि सिद्धांत.

७३. कृत्य नेंच होय. जें कांहीं करायास सांगितलें.

- ७४ सिद्धान्त तोच होय. जो कांहीं केल्याचा ताळा.
 ७५ लिंम तेंच होय. जें कांहीं पूर्वी सांगितलें. किंवा सिद्ध केले.
 पुढें येणार तें सगम आया साधीं.
 ७६ कुरलरी तीच होय. जो पूर्वील प्रत्यय आला अथवा सिद्धा-
 तापासून जो प्रत्यय प्राप्त आला.
 ७७ स्कोलंम स्रणजे टीप. पूर्वी सांगितल्ये पुरः करणावर
 स्रणजे. त्या कृत्यावरील अवांतर विशेष.

प्रत्यक्ष प्रमाणें.

- १ जा वस्तू दुसऱ्ये एक वस्तूशीं प्रत्येक सम स्रणजे बरो
 वर आहेत तर त्या सर्व वस्तू परस्पर बराबर आहेत.
- २ समांत सम मेळविले तर बेरीज सम होत्ये.
- ३ समांतून सम वजा केले तर सम बाकी राहतात.
- ४ समांत विषम मेळविले तर बेरीज विषम येत्ये.
- ५ विषमांतून सम वजा केले तर विषम बाकी राहतात.
- ६ जा वस्तू प्रत्येकीं दुसऱ्ये एक वस्तूचे दुपट आहेत. त्या
 सर्व परस्पर बराबर आहेत.

(१४)

७ जा वस्तू प्रत्येकीं दुसर्यें एक वस्तूचे अर्धा बरोबर आहेत.
त्या सर्व परस्पर बराबर आहेत.

८ कोणतीही वस्तू तिचे सर्व तुकड्यांचे बेरिजे बराबर आहे.

९ जा वस्तू सर्वांशीं परस्पर मिळतात अथवा सारिखी जागा
भरितात त्या एकरूप आहेत.

१० सर्व काटकोन परस्पर बराबर आहेत.

११ जांचें माप अथवा कौस बराबर आहे. ते सर्व कोन पर-
स्पर बराबर आहेत.

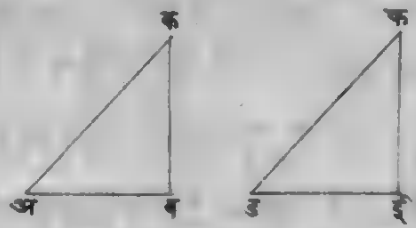
प्रथम सिद्धांत.

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू व अंतर कोन
दुसऱ्याचा दोन बाजू व अंतर कोन यांशीं बराबर असतील
तर ते दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम होतील.

अ

(१५)

अबक आणि डईफ या दोन त्रिकोणांमध्ये जर
अक बाजू डफ बाजूचे बरा
बर आणि बक बाजू ईफ
बाजू बराबर आणि क अंत
रकोन फ अंतरकोनाचे बराबर
असेल तर हे दोनी त्रिकोण ए
करूप अथवा सर्वांशीं बराबर
होतील.



आतां मनांत आण किं अबक त्रिकोण डईफ त्रिको
णावर ठेविला अशा रीतीने किं क कोन बिंदू फ कोन बिंदूशीं
बराबर मिळेल आणि अक बाजू तिचे बराबरीचे डफ बा
जूशीं मिळेल तेव्हां क कोन आणि फ कोन (बरसांगीतले
प्रमाणे) बराबर आहेत तेव्हां बक बाजू ईफ बाजूवर येई
ल आणि अक बाजू (बरसांगीतले प्रमाणे) डफ बाजू बरा
बर येईल तेव्हां ब कोन बिंदू ई कोन बिंदूशीं मिळेल याजकरि
तां अब बाजू डई बाजूस मिळेल म्हणोन हे दोन त्रिकोण एकर
रूप आहेत आणि त्यांचे बाकी अवयव प्रत्येकीं अनुक्रमें बरा
बर मिळतात. (१ प्रत्यक्षप्र०) म्हणजे अब बाजू डई बाजू बरा
बर अ कोन ड कोन बराबर आणि ब कोन ई कोन बराबर
हें सिद्ध जालें.

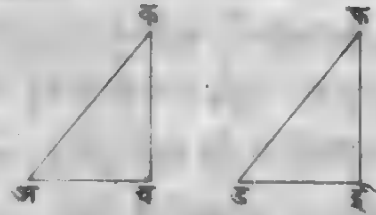
दुसरा

(१६)

दुसरा सिद्धांत.

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन व अंतर बाजू दुसऱ्याचे दोन कोन व अंतर बाजू यांशीं अनुक्रमेण बराबर असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्यांचा बाकी बाजू व बाकी कोन बराबर. म्हणजे ते सर्वांशीं सम होतील.

अबक आणि डईफ या दोन त्रिकोणांत जेव्हां असेल. किं अ कोन ड कोनाचे बरोबर आणि ब कोन ई कोनाचे बरोबर आणि अब बाजू डई बाजूचे बराबर. तेव्हां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत.



आतां मनांत आण किं अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर आणून ठेविला. अशरीतीने किं अब बाजू तिचे बराबरीचे डई बाजूवर बराबर येईल आणि अ कोन ड कोनाचे बराबर (वर सांगितलेप्रमाणे) असेल तर अक बाजू डफ बाजूवर येईल तसें ब कोन ई कोनाचे बराबर असल्यास बक बाजू ईफ बाजूवर येईल. यावरून अबक त्रिकोणाचा तीनही बाजू डईफ त्रिकोणाचे तीन बाजूंवर बराबर येतील. याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप.

(१ प्र० प्र०) दुसऱ्या दोन बाजू अक आणि बक ह्या दुसऱ्याचा दो-

न

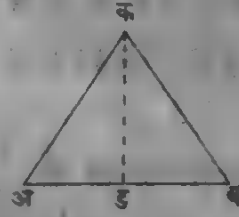
(१७)

न बाजू दुफ आणि दुफ यांचे बराबर. बाकी राहिला क कोन दुसऱ्याचे राहिल्या फ कोनाचे बराबर आहे. हें सिद्ध जालें.

तिसरा सिद्धांत.

सम द्विबाजू त्रिकोणांत पायाकडील कोन बराबर आहेत. अथवा जर कोणत्याही त्रिकोणांत दोन बाजू बराबर असतील तर त्यांचे समोरासमोरचे कोन बराबर होतील.

जर अबक त्रिकोणांत
अक आणि बक या दोन बाजू
बराबर असतील. तर ब कोन
अ कोनाचे बराबर होईल.



आतां मनांत आण किं क कोन दुभागिला अथवा त्याचे बराबर कड रेघेनें दोन तुकडे केले. असे किं. अकड कोन बकड कोना बराबर जाला.

तेव्हां अकड आणि बकड या दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू व अंतरकोन दुसऱ्याचा दोन बाजू व अंतरकोन यांचे बराबर आहेत. कोणत्या तर. अक बाजू बक बाजूचे बराबर अकड कोन बकड कोनाचे बराबर. आणि कड बाजू दोघां स समान याज करितां हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं

सम

(१८)

सम होत. (सि.प्र.०) यावरून अ कोन व कोनाचे बराबर हें सिद्ध जालें.

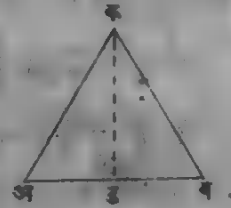
प्रथम कुरलरी. यावरून जीरेघ समष्टि बाजू त्रिकोणांचे शि-
र कोनास दुभागित्ये ती पायास दुभागित्ये. ती त्याजवर लंब आ-
हे.

दुसरी कुरलरी. यावरून कळतें किं. सर्व समबाजू त्रिको-
ण समकोन अथवा त्यांचे तीन कोन बराबर आहेत.

चवथा सिद्धांत.

जेव्हां त्रिकोणांत दोन कोन बराबर आहेत. तेव्हां त्यांना
समोरासमोरचा बाजूही बराबर होताना.

अबक त्रिकोणांत अ को-
न व कोना बराबर आहे. तर
अक बाजू वक बाजू बराबर
होईल.



आतां मनांत आण. किं. अब बाजू वक खुणेनें दुभागिली
अशीकिं. अड आणि वड बराबर जाले. आतां कड सांध.
सणजे त्या त्रिकोणाचे अकड आणि वकड ऐसे दोन त्रिकोण
होतील. आणि मनांत आणकिं अकड त्रिकोण वकड त्रिको-
णा

(१९)

णावर देविला असा किं अडु बाजू बडु बाजूवर पडेल.

अडु बाजू (वरसांगीतलेप्र०) बडु बाजू बराबर आहे.
तेव्हा अ विंदू व विंदूशीं मिळतो. आणि डु विंदू डु विंदूशीं मि
ळतो. आणि अ कोन (वरसांगीतलेप्र०) व कोनाचे बराबर आ
हे. तेव्हा अकरंघ व करंघेवर पडेल. आणि डुक बाजू दोनही
त्रिकोणांस साधारण आहे. याजकरितां अक बाजूना क शेवट
वक बाजूचे क शेवटाशीं मिळेल. यावरून अक बाजू वक बाजू
बराबर आहे. हे सिद्ध.

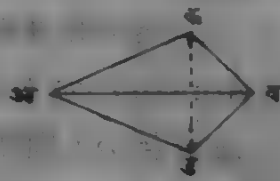
कुरलरी. यांतून निघते किं. हर एक त्रिकोण सम कोन अस
ल्यास तो समबाजूही आहे.

पांचवा सिद्धांत.

जेव्हा दोन त्रिकोणांत एकाचा तीन बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचे
तीन बाजूंचे बराबर आहेत. तेव्हा ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत
अथवा. एकाचे तीन कोन दुसऱ्याचे तीन कोनां बराबर आहेत.

अबक आणि अबड.

ऐसे दोन त्रिकोण असल्यास जाणा
तीन बाजू अनुक्रमें परस्पर बराब
र. म्हणजे. अब बाजू अब बा



अ

(२०)

जू बराबर. अक - अड बराबर. आणि बक - बड बराबर आहे. तेव्हां हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्यांचे तीन कोन अनुक्रमे परस्पर बराबर. म्हणजे. बराबर बाजूंचे समोरचे कोन बराबर. म्हणून बअक कोन बअड. कोनाबराबर. अबक कोन अबड कोनाचे बराबर. आणि क कोन ड कोना बराबर होईल.

आतां मनांत आण किं. हे दोन त्रिकोण यांची सर्वां हून लांब आणि परस्पर बराबर अशी जी बाजू तिणे जोडिले आहेत. आतां कडु सरळ रेषे करून सांध.

अकड त्रिकोणांत अक बाजू (वरसांगीतले प्र०) अड बाजू बराबर. तेव्हां अकड कोन (३ सि० प्र०) अडक कोना बराबर आहे. याचरीती प्रमाणें बकड त्रिकोणांत बक बाजू बड बाजू बराबर आहे. याजकरितां बकड कोन बडक कोना बराबर. तेव्हां (२ प्र० प्र०) सममिळवणीनें मेळवितां अकड कोन आणि बकड कोन यांची बेरीज अकड आणि बडक या दोन कोनांचे बेरीजे बराबर आहे. म्हणून सर्व अ. क. व हे तीन कोन सर्व अड. व या तीन कोनांचे बराबर आहेत.

नंतर दोन त्रिकोणांमध्ये (वरसांगीतले प्र०) अक आणि बक या दोन बाजू अनुक्रमे अड आणि बड या दोन बाजूंचे बराबर. आणि यांचे अंतर कोन अक व आणि अड व हे बराबर आहेत. याजकरितां (१ सि० प्र०) अबक आणि अडब हे दोन त्रिकोण

एक

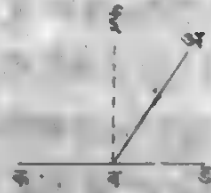
(२१)

एकरूप आहेंत. आणि त्यांचे दुसरे सर्व कोन अनुक्रमें बराबर आहेत. स्पष्ट जे. ब अक कोन आणि ब अड कोन बराबर. तसें अबक कोन अबड कोना बराबर आहे हें सिद्ध.

साहावा सिद्धांत.

जेव्हां एक सरळ रेषा दुसऱ्या सरळ रेषेवर भिळत्ये अथवा तीस छेदित्ये. तेव्हां त्या स्थळीं दोन कोन होतात. त्यांची बेरीज दोन काटकोना बराबर आहे.

अब रेषा कडु रेषेवर निळाती असल्यास अबक आणि अबड हे दोन कोन भिळोन दोन काटकोना बराबर आहेत. स्पष्ट न प्रथम (१० व्या प्र०) जेव्हां अबक आणि अबड हे दोन कोन परस्पर बराबर असतील तेव्हां दोनही काटकोन होतील.



परंतु जर हे दोन कोन परस्पर बराबर नाहींत तर मनांत आण कीं ईब रेषा कडु रेषेवर लंब केला. तेव्हां (१० व्या प्र०) ईबक आणि ईबड हे दोन काटकोन आहेत. आणि (८ प्र० प्र०) ईबड कोन ईबअ

आणि

(२२)

आणि अबड या दोन कोनांचे बेरिजे बराबर आहेत. याजकरितां ईबकं-
ईबंअ आणि अबड हे तीन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आ-
हेत.

परंतु (८ प्र० प्र०) ईबक आणि ईबंअ हे दोन कोन मिळोन
अबक कोना बराबर आहेत. याजकरितां अबक आणि अबड
हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत. हे सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. यावरून उलट पाहता जर अबक आणि
अबड हे दोन कोन अबरेपेचे दोन बाजूचे मिळोन दोन काटकोना ब-
राबर आहेत. तर यांतून निघतें किं कव आणि बड मिळून कड एक
सरळरेषा आहे.

दुसरी कुरलरी. यावरून कड रेपेचे एक बाजूवर व बिंदू स्थळीं
कितीही कोन असले तरी ते सर्व मिळोन दोन काटकोनांचे बराबर आ-
हेत.

तिसरी कुरलरी. यावरून कड रेपेचे दुसरे बाजूवर व बिंदू
स्थळीं कितीही कोन असले तरी ते सर्व मिळून दोन काटकोनांचे बराब-
र आहेत. याप्रमाणें पाहतां कोणत्या एक बिंदूवर चहुंकडून किती ए-
करेघाणीं जे कोन होऊं शकतील. ते सर्व मिळून चार काटकोनां बराबर
आहेत.

चवथी कुरलरी. यावरून
(५७ व्या० प्र०) फ बिंदूवर किती



एक

(२३)

एक सरळरेषांनीं जे काय कोन होउं सकतात. त्यांचें माप त्या बिंदू मध्याचे बाहेरील हावर्तुळ परिघ दाखवितो. तस्मान् वर्तुळपरिघ चार काटकोनांचें माप आहे. याजकरितां अर्धवर्तुळ अथवा एकशें ऐशी अंश दोन काटकोनांचें माप आहे. आणि वर्तुळपाद अथवा नव्वद अंश एक काटकोनांचें माप आहे.

सातवासिद्धांत.

जे व्हां दोन सरळरेषा परस्परांस छेदितान. ते व्हां समोरासमोरेचे कोन बराबर होतान.

अब आणि कड या दोन

सरळरेषा ई बिंदूवर परस्परांस छे

दीत असल्यास अईक आणि

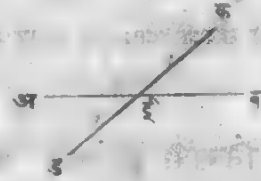
बईड हे दोन कोन परस्पर बराबर

होतील. आणि अईड - कईब हे दोन कोन परस्पर बराबर होतात.

ह्मणोन (६सि०प्र०) कईरेष अब रेचेवर मिळोन अईक

-बईक हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.

याप्रमाणें बईरेष कड रेचेवर मिळून बईक - बईड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.



याजकरितां

(२४)

याज करितां (१ प्र० प्र०) अईक - बईक या दोन कोनांची वेरीज बईक - बईड या दोन कोनांचे वेरिजे बराबर आहं.

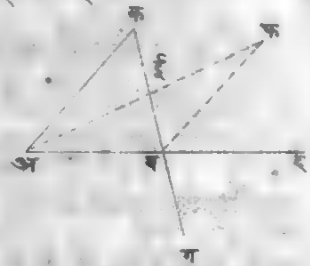
आणि बईक कोन जो दोहोंमध्ये साधारण आहे तो या दोन वेरिजांतून बजा केला तर (२ प्र० प्र०) बाकी राहिल्या अईक कोन बाकी राहिल्या बईड कोना बराबर होईल.

आणि याचरीतीने दाखविला जातो कीं अईड कोन बईक कोना बराबर आहे. हे सिद्ध.

आठवा सिद्धान्त.

कोण त्या ही त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली तर बाहेरील कोन कोण त्या ही आंतील समोरचे कोनाहून मोठा होतो.

अबक त्रिकोणाची अब बाजू दुपर्यंत वाढविली. तेव्हां बाहेरील क बाह कोन आंतील समोरचा अ कोन अथवा क कोन याहून मोठा आहे.



आतां मनांत आण कीं बक बाजू ई स्थळावर दुभागिली आणि अईरेष करून वाढविली अशी कीं ईफ - अई बराबर जाली.

नंतर

नंतर फव सांध.

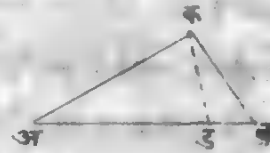
तेव्हा अईक आणि वईफ या दोन त्रिकोणामध्ये (वरसांगी.प्र०) अई बाजू = ईफ बाजू. आणि कई बाजू = वई बाजू. आणि या बाजूंचे समोर समोरचे अंतर कोन (७ सिद्धांताप्र०) ई कोना बराबर आहेत. या जकरितां हे दोन त्रिकोण (१ सिद्धांताप्र०) सर्वांशी बराबर आहेत. या पासून क कोन = ईवफ कोन आहे. परंतु क बट कोन ईवफ कोनापेक्षां स्मोटा आहे. या जकरितां बाहेरील क बट कोन क अंतर कोनाहून स्मोटा आहे.

या रीतीने क व बाजू ग पर्यंत वाढवून अब दुभागिली असतां अब ग अथवा त्याचे बराबर क बट कोन अ कोनाहून स्मोटा आहे असें दाखविलें जातें.

नववा सिद्धांत.

सर्व त्रिकोणांची अति स्मोटी बाजू. अति स्मोटी कोना समोर आहे. आणि अति स्मोटा कोन. अति स्मोटी बाजू समोर आहे.

अब क त्रिकोण असल्यास जात अब बाजू अक बाजू हून स्मोटी आहे. अति स्मोटी अब बाजूचे समोरचा कोन अक ब तोला हान



बाजू

बाजू अक तिचे समोरचे लाहान अबक कोनाहून सोटा आहे.

स्नणोन अतिसोद्ये अब बाजूवर अक चे बराबर अड करून कडु सांध. तेव्हां बकडु त्रिकोण आला. आणि बाहेरील अडक कोन (८ सि० प्र०) आंढील ब कोनाहून सोटा आहे. परंतु अड आणि अक बराबर आहेत. याज करितां (३ सि० प्र०) अकडु कोन ब कोनाहून सोटा आहे. जेव्हां अक ब कोनाच्या तुकडा अकडु कोन ब कोनाहून सोटा आहे. तेव्हां अक ब कोन ब कोनाहून सोटा असा वा खरा हें सिद्ध.

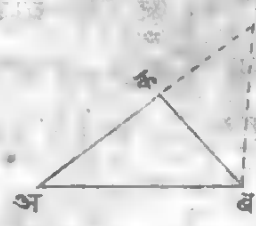
याचे उलट. जेव्हां क कोन ब कोनाहून सोटा आहे. तेव्हां त्याचे समोरची अब बाजू ब कोनाचे समोरचे अक बाजूहून सोटी आहे.

स्नणोन जर अब बाजू अक बाजूहून सोटी नाही. तेव्हां तिचे बराबर अथवा तिजपेक्षां लाहान आहे. परंतु बरोबर असल्यास (३ सि० प्र०) क कोन ब कोना बराबर असला पाहिजे. एथे (वरसां० प्र०) तो नाही. तेव्हां बरोबर नाही. आणि क कोन ब कोनाहून एथे (वरसां० गीत ले प्र०) लाहान होउं सकत नाही. यावरून अब बाजू अक बाजूचे बराबर किंवा तिजहून लाहान नाही. तर तिजहून सोटी आहे. हें सिद्ध.

दाहाया सिद्धान्त.

कोण त्याही त्रिकोणांत दोन बाजूंची बेरीज तिसर्या बाजूहून अधिक आहे.

अबक त्रिकोण असेल तर त्याचे कोण त्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसर्या बाजूहून अधिक होईल. जसें अक + कब. अब बाजूहून अधिक होईल.



म्हणोन अक वाढीव. अशी किं कद. कब चे बरोबर अथवा अद. अक + कब चे बरोबर होईल. आणि बूढ सांध.

तेव्हां (कृत्यानें) कद. कब चे बरोबर. याजकरितां (३. सि० प्र०) द कोन कब द कोना बरोबर आहे. परंतु अब द कोन कब द कोना हून सोटा आहे. तेव्हां द कोना हून पण सोटा आहे. आणि (२. सि० प्र०) त्रिकोणाची अति सोटी बाजू अति सोटो कोनासमोर असत्ये. तस्मात् अब द त्रिकोणांत अद बाजू अब बाजूहून सोटी आहे. परंतु अद (कृत्यानें) अक. कद यांचे अथवा अक. कब यांचे बेरीजे बरोबर आहे. याजकरितां अक + कब. अब बाजूहून सोटी आहे हे सिद्ध.

कुरलरी. दोन बिंदूंचे मध्ये अति थोडें अंतर तेच होय.

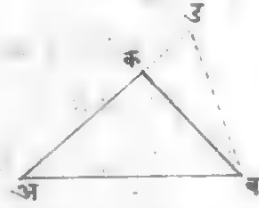
जे

जे त्या बिंदूस एक सरळरेष सांधिल्ये.

अकरावा सिद्धांत.

कोण त्याही त्रिकोणांत दोन बाजूंची बजावा की तिसर्या बाजूहून लाहान आहे.

अबक त्रिकोण असेल तर त्याचे दोन बाजूंची बजावा की तिसर्या बाजूहून लाहान आहे. जसें अब - अक - बक या तिसर्या बाजूहून लाहान आहे.



सुणोन अक लाहान बाजू उ पर्यंत वाढीव. अशी किं अउ सोद्ये अब बाजू बराबर होईल. आणि कउ. अब - अक चे बाकी बराबर होईल. आतां बउ सांध. सुणजे (कृत्यानें) अउ बाजू अब चे बरोबर. याज करितां (३ सि० प्र०) उ आणि अब उ हे दोन कोन परस्पर बराबर. परंतु कब उ कोन अब उ कोनाहून लाहान आहे. तेव्हां त्याचे बराबरीचे उ कोनाहून ही लाहान आहे. आणि (२ सि० प्र०) त्रिकोणाची अति लोटी बाजू अति लोठ्ये कोनास मोर आहे. तेव्हां बक उ त्रिकोणांत कउ बाजू बक बाजूहून लाहान आहे. हे सिद्ध.

बारावा सिद्धांत.

जेव्हां एक सरळरेष दोन समांतररेषांस छेदित्ये तेव्हां व्यु-
त्क्रम कोन बराबर करित्ये.

ईफ रेष अब आणि कड
या दोन समांतररेषांस छेदील. तर
अईफ कोन त्याचे ईफड व्युत्क्रम
कोना बराबर होईल.



सिद्धांत जर हे दोन कोन बराबर नाहींत. तर यांतून एक दुसऱ्या
हून सोटा निश्चय असेल. तेव्हां मनांत आण किं. ईफड सोटा
आहे. आणि दुसरे मनांत आण किं. फवरेष केली आहे. अशी
किं. तुकडा अथवा ईफब कोन अईफ कोना बराबर आला. आणि
फवरेष अब रेषेवर बस्यला वर मिळेल.

आतां बईफ त्रिकोणाचा बाहेरील अईफ कोन (८ सि. प्र०.)
त्याचे आतील समोरचा ईफव कोनाहून सोटा आहे. आणि (क
त्यानें) हे दोन कोन परस्पर बराबर. यांतून निघतें किं हे दोन कोन
एक सम रीतीचे बराबर आहेत आणि नाहींत. तर हें परम अशक्य.
याजकरितां ईफड कोन त्याचे अईफ या व्युत्क्रम कोनाशी बराबर
नाहीं असें नाहीं. तर हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

कुरलरी. यांतून निघतें किं अनेक समांतररेषा आहेत.

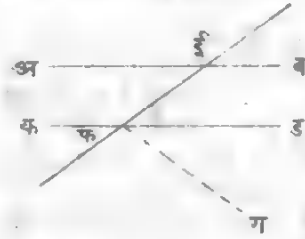
यांतून

त्यांतून एकी वर जी सरळरेषा खेच आहे. ती सर्व समांतर रेषां वर लंब व आहे.

तेरावा सिद्धांत.

जेव्हा एक सरळरेषा दोन रेषांस छेदून दोन व्युत्क्रम कोन वरा वर करित्ये. तेव्हा त्या दोन समांतर रेषा आहोत.

जर ईफ रेषा अब कडु या रेषांस छेदून अईफ आणि ईफड हे दोन व्युत्क्रम कोन परस्पर वरा वर करित्ये. तर अब कडु समांतर रेषा होतील.



स्मरण त्या दोन रेषा समांतर नसतील तर मनांत आणकिं फग रेषा अब रेषेशीं समांतर रेषा आहे. या प्रमाणें अब फग समांतर असोन (१२ सि० प्र०) अईफ कोन त्याचे व्युत्क्रम ईफग कोना वरा वर आहे. परंतु (११ वरसांगील प्र०) अईफ कोन ईफड कोना वरा वर आहे. यापासून निघते (१२ प्र० प्र०) ईफड कोन ईफग कोना वरा वर. स्मरण जे एक तुकडा सर्वा वरा वर हें होणें परम अशक्य. या जकरितां कडु वाचून दुसरी रेषा अब शीं समांतर होण्यास अशक्य आहे. हें सिद्ध.

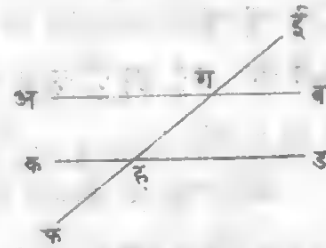
कुरलरी

कुरलरी. ना कित्ये करेघा एकरेघे वर लेव आहेंत. त्या सर्व परस्पर समांतर आहेंत.

चौदावा निहांत.

जेव्हां एकरेघ दोन समांतर रेखांम छेदित्ये. तेव्हां बाहेरील कोन त्याचे आंतिल्याचे समोरचा त्याच बाजूचे कोना बराबर आहे. आणि त्याच बाजूचे दोन आंतिल कोन मिळोन दोन काट कोना बराबर आहेंत.

जर ईफुरेघ अब कड या समांतर रेखांम छेदित्ये. तर ईग व कोन त्याचे आंतिल्याचे समोरचा त्याच बाजूचा गहड कोना बराबर होईल. आणि त्याच बाजूचे आंतिल दोन कोन बगह आणि गडह मिळून दोन काट कोनां बराबर आहेंत.



अब आणि कड या दोन रेखा समांतर आहेंत. स्पष्टून (१२ सि० प्र०) अगह कोन त्याचे गहड व्युक्रम कोना बराबर आहे. परंतु (७ सि० प्र०) अगह कोन त्याचे समोरचे ईग व कोना बराबर आहे. याजकरितां (१ प्र० प्र०) ईग व कोन गहड कोना

ना

ना बराबर आहे. हे सिद्ध.

नंतर ईग व आणि वग ह हे दोन कोन (६) मि. प्र. दोन काटकोना बराबर आहेत. आतां व बर दाखविला गेला किं. ईग व कोन ग ह ड कोना बराबर आहे. याजकरितां वग ह आणि ग ह ड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत. हे सिद्ध.

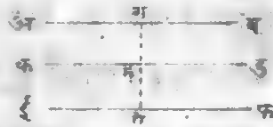
प्रथम कुरलरी. आतां याचे उलट. जेव्हां एकरेष दुसऱ्या दोन रेखांस छेदून तिचे एक बाजूचे आंतील दोन कोन बराबर होताना तेव्हां त्या दोन रेखा परस्पर समांतर आहेत.

दुसरी कुरलरी. जेव्हां एकरेष दुसऱ्या दोन रेखांस छेदित्ये. आणि त्याचे आंतील तिचे एक बाजूचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां हून उणे आहेत. तेव्हां त्या दोन रेखा समांतर नाहीत. आणि त्या बाढविल्या असतां परस्पर मिळतील.

पंधरावा सिद्धांत.

जा सरळरेखा कोणत्याही एकरेषाशी समांतर आहेत. तर त्या सर्वही परस्पर समांतर आहेत.

अब आणि कड या दोन रेखा ईफ रेखाशी समांतर असतील. तर अब आणि कड या रेखा परस्पर



समां

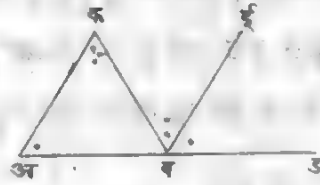
स्पर समांतर होतील.

गए लंब ई फरे घेवर असल्यास गऐ रेघ (१० सि० कुरल
श०) अब कडु यांवरही लंब होईल. याज करितां (१३ सि० कु०
प्र०) अब कडु या दोन रेघा समांतर आहेत. हे सिद्ध.

सोळावा सिद्धांत.

जे व्हां त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली ते व्हां बाहेरील कोन
आंतील समोरासमोरचे दोन कोनांचे बेरिजे बराबर होतो.

अब क त्रिकोणांत अब
बाजू उपर्यंत वाढविली तर क बडु
बाहेरील कोन आंतील अ आणि
क या समोरासमोरचे दोन कोना
चे बेरिजे बराबर आहे.



आतां मनांत आण किं बडु रेघ अक रेघेशीं समांतर केली.
आतां बक रेघ अक आणि बडु या दोन समांतर रेघांस मिळत्ये.
ते व्हां (१२ सि० प्र०) क कोन आणि क बडु त्याचाच व्युत्क्रम कोन
हे दोन परस्पर बराबर आहेत. आणि अड रेघ अक आणि बडु
या दोन समांतर रेघांस छेदित्ये ते व्हां (१४ सि० प्र०) त्या रेघेचे ए
क बाजूचे आंतील व बाहेरील अ कोन आणि ई बडु हे दोन कोन.

बराबर

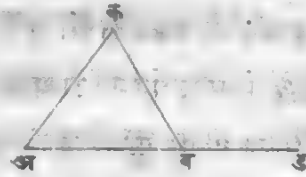
(३४)

बराबर आहें. याज करितां बरोबर सममिळवणीनें अ आणि क या दोन कोनांची बेरीज कबडू आणि ई बडु या दोन कोनाचे बेरिजेचे अथवा (२ प्र० प्र०) बाहेरील सगळ्या कबडु कोनाचे बरोबर आहे. हें सिद्ध.

सत्रावा सिद्धांत.

कोण त्याही सरळरेषे त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज दोन काट कोना बराबर आहे.

अबक सरळरेषे त्रिकोण असेल तर अ + ब + क ही तीन कोनांची बेरीज दोन काट कोना बराबर होईल.



सुणोन अब बाजूड पर्यंत वाढविली. तेव्हां बाहेरील कबडु कोन (१६ सि० प्र०) अ + क या आंतील समोरासमोरचे दोन कोनाचे बेरिजे बराबर आहे. या दोन बरोबर्या यांत आंतील बकोन प्रत्येकांत मेळीव. तेव्हां अ + क + ब ही तीन आंतील कोनांची बेरीज (२ प्र० प्र०) अबक + कबडु याजबळचे दोन कोनाचे बेरिजे बराबर होईल. परंतु (६ सि० प्र०) याजबळचे दोन कोनांची बेरीज दोन काट कोना बराबर आहे. याजवरून ही त्रिकोणांत अ + ब + क ही ती

(३५)

नकोनांची बेरीज (१ प्र० प्र०) दोन काट कोनां बराबर आहे. हे सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. जर एक त्रिकोणाचे दोन कोन अनुक्रमेण दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोनां बराबर आहेत. तर त्याचा तिसरा कोन ही त्या दुसऱ्याचे तिसर्या कोना बराबर होईल. तेव्हां (१ प्र० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर सम कोन आहेत.

दुसरी कुरलरी. जर एके त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाचे एके कोना बराबर आहे. तर त्याचे सहिल्ये दोन कोनांची बेरीज (१ प्र० प्र०) दुसऱ्याचे सहिल्ये दोन कोनांची बेरीज बराबर होईल.

तिसरी कुरलरी. जर एक त्रिकोणांत एक काट कोन असेल तर बाकी दोन कोनांची बेरीज एक काट कोना बराबर होईल. आणि ते प्रत्येक लघु कोन अथवा काट कोनाहून उणे असतील.

चवथी कुरलरी. सर्व त्रिकोणांत दोन कोन लाहान. तेव्हां ते लघु कोन अथवा काट कोनाहून उणे आहेत.

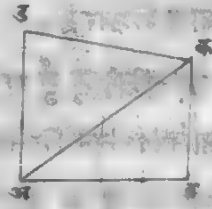
अठरावा सिद्धांत.

कोण त्याही सरळरेषेची कोनांत त्याचे आतील चार कोनांची बेरीज चार काट कोनां बराबर आहे.

अबकड

(३६)

अब कट चौकोन असेल
तर अ + ब + क + ड ही आंतील
चार कोनांची बेरीज चार काट को
ना बराबर होईल.



आता त्यांत अक कर्ण रेघ कर. अशी किं. त्या चौकोनाचे
अबक आणि अडक ऐसे दोन त्रिकोण होतील. तेव्हां त्या दोन
त्रिकोणांत एकेक त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज (१० सि० प्र०)
दोन काटकोना बराबर आहे. याज करितां (२ प्र० प्र०) दोनही त्रि-
कोणाचे सर्व कोनांची बेरीज जी चौकोनाचे चार कोनांची बेरीज
आहे तीच. ती निश्चय चार काटकोनां बराबर आहे. हे सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. या पासून कळतें किं. जर चौकोनाचे तीन
कोन काटकोन असतील. तर चवथाही कोन काटकोनच असेल.

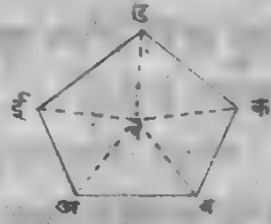
दुसरी कुरलरी. जर चार कोनांतून दोन कोनांची बेरीज दो-
न काटकोनां बराबर असेल. तर राहिल्ये दोन कोनांची बेरीज ही
दोन काटकोनां बराबर होईल.

एकुणिसावा सिद्धांत.

कोणत्याही सरळ रेषा कुंतीत तिचे आंतील सर्व कोनांची
बेरीज त्या आकृतीचे दुपट बाजू संख्येंत चार उणे इतक्या काट
कोनां

कोनां बराबर आहे.

अबकडुई एक सरळरेषा
कृती असेल. तर तिचे आंतील को
नांची $अ + ब + क + ड + ई$.
ही बेरीज या आकृतीचे दुपट वा
जूसंख्येत चार उणे इतक्या काट
कोनां बराबर आहे.

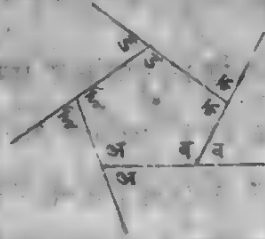


सणोन आकृतीचे आंत कोटेदी प स्थळ कल्पून तेथून प अ
प ब. याप्रमाणें आकृतींत कोन आहेत तितक्या रेषा कर. अशा
किं. वाजू आहेत तेवढे त्रिकोण होतील. आतां त्यांत प्रत्येक त्रि
कोणाचे तीन कोनांची बेरीज (१७० सि० प्र०) दोन काटकोनां बराबर
आहे. याजकरितां सर्वत्रिकोणाचे कोनांची बेरीज वाजू संख्येचे दु
पट काटकोनां बराबर आहे. परंतु प स्थळा भोंवते सर्व त्रिकोणाचे
कोन आहेत खरं पण ते आकृतीचे आंतील कोन नव्हेत. याजक
रितां त्यांची बेरीज (६ सि० २ कु० प्र०) चार काटकोनां बराबर आहे.
सणोन पूर्व बेरीजेंत हे चार काटकोन वजा केले पाहिजेत. यापासून
निघतें किं. सरळरेषाकृती बहुकोनाचे आंतील कोन मात्रांची बेरीज
जसें $अ + ब + क + ड + ई$ ही बेरीज आकृतीचे वाजू संख्येचे दु
पटीत चार उणे करून जी वाकी राहिल तितक्या काटकोनां बराबर
आहे. हे सिद्ध.

विसावा सिद्धान्त.

कोणत्येही सरळरेषाकृतीचा सर्वबाजू बाहेर वाढविल्यापासून बाहेर जे कोन होतात. त्या बाहेरील सर्व कोनांची बेरीज चार काट कोनां बराबर आहे.

अ. ब. क. ड. ई हे कोन
कोणत्येही सरळरेषाकृतीचा बाजू
वाढविल्यापासून बाहेरजाले अ
सतील. तर त्यांची बेरीज अ +
ब + क + ड + ई ही चार काट
कोनां बराबर होईल.



म्हणजे या आकृतीतील हरेक बाहेरील कोन व त्याचे आंतील कोन यांची बेरीज (६सि.प्र०) दोन काट कोनां बराबर आहे. जसे अ + अ. आणि आकृतीस जितक्या बाजू तितकेच आंत आणि तितकेच बाहेर कोन आहेत. याजकरितां सर्व आंतील व बाहेरील कोनांची बेरीज आकृतीचे बाजू संख्येचे दुपट काट कोनां बराबर आहे. परंतु सर्व आंतील कोनांची बेरीज आणि चार काट कोन हे (१२सि.प्र०) बाजू संख्येचे दुपट काट कोनां बराबर आहेत. याजकरितां सर्व आंतील आणि बाहेरील कोनांची बेरीज सर्व आंतील कोन आणि चार काट कोन यांचे बेरीजे बराबर आहे. म्हणजे

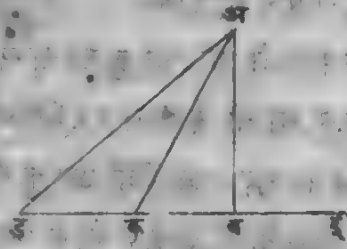
सर्व

सर्व आंतील कोन आणि बाहेरील कोन यांची बेगीज (१ प्र० प्र०) सर्व आंतील कोन आणि चार काट कोन यांचे बराबर आहे. या बेरिसेंतून आंतील सर्व कोन वजा कर. म्हणजे बाहेरील कोनाचे माप (३ प्र० प्र०) चार काट कोनां बराबर आहे. हे सिद्ध.

एकविसावा सिद्धांत:

सांगीतल्ये बिंदूपासून सरळ रेषेवर सर्वोहून लाहान जीरेष होत्ये तोचलंब होय. आणि त्या बिंदूपासून त्या सरळ रेषेवर जा रेषा होतील. त्यांत लंबाजवळची रेषा जा दुसऱ्या लंबापासून दूर रेषा आहेत. त्या सर्वोहून लाहान होईल.

जर अब अक अड रे
षा सांगीतल्ये अ बिंदूपासून उई
रेषेवर केल्या असतील. अशा कि
जात अब. उई वर लंब आहेत
अब लंब अक रेषेहून लाहान
होईल.



आणि अक रेषा अड रेषेहून लाहान होईल. याप्रमाणे पु
ढेंही.

म्हणोन व कोन काट कोन आहे. तेव्हा (१९७ सि० ३ कुर० प्र०)
क कोन लघु कोन आहे. याजकरिता व कोनाहून उणा होय. परंतु

(४०)

(१सि० प्र०) अति लाहान बाजू अति लाहान कोना समोर आहे. या
जकरितां अव बाजू अक बाजूहून लाहान आहे.

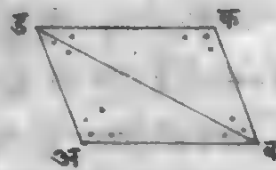
पुनः अक व कोन लघु कोन आहे. तेव्हां (६सि० प्र०) अ
कड कोन विगाळ कोन होईल. या जकरितां (१०सि० ३ कु० प्र०)
डु कोन लघु कोन आहे. स्पर्श कोन कोनाहून लाहान. आणि अ-
तिलाहान बाजू अति लाहान कोना समोर असत्ये तेव्हां अक बा-
जू अडु बाजूहून लाहान आहे हे सिद्ध.

कुरलरी. लंब सर्व रेषांहून लाहान अंतराची रेषा आहे. जा रे-
षा सांगीतल्ये बिंदूपासून सरळरेषेवर करितां येतील.

याविस्वाया सिद्धांत.

कोणत्येही समांतर बाजू चौ कोनांत समोरासमोरचा बाजू
आणि समोरासमोरचे कोन द्वे परस्पर बरोबर आहेत. आणि कर्ण
रेषा त्या चौ कोनास दोन त्रिकोणांनीं बराबर दुभागिल्ये.

अब कड समांतर बाजू
चौ कोन असेल. आंत वडु कर्ण
रेषा आहे. तर त्याचा समोरासमो-
रचा बाजू व समोरासमोरचे कोन
बराबर होतील. आणि वडु कर्ण



रेषा

रेष त्या चौकोनाचे बराबर दोन भाग अथवा त्रिकोण करित्ये.

स्त्रणोन (३२ व्या० प्र०) अब डुक या बाजू परस्पर समांतर आहेत. आणि अड वक याही समांतर आहेत. आणि बड रेष त्यांस मिळत्ये याजकरितां (१२ सि० प्र०) व्युत्क्रम कोन बराबर आहेत. स्त्रणजे अबड कोन कडब कोना बराबर आहे. आणि अडब कोन कवड कोना बराबर. स्त्रणोन या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसऱ्याचे दोन कोना बराबर आहेत. याजकरितां (१७ सि० १ कु० प्र०) त्यांचे तिसरे कोनही परस्पर बराबर आहेत. स्त्रणजे अ कोन क कोना बराबर. आणि हे कोन समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन आहेत.

पुनः जर अबड कडब या दोन बराबर कोनांशीं कवड अडब हे दोन बराबर कोन मिळतील. तर (२ प्र० प्र०) त्यांची बेरीज बराबर होईल. स्त्रणजे सर्व अबक कोन सर्व अडक कोना बराबर आहे. आणि हे सर्व समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन आहेत हे सिद्ध.

पुनः हे दोन त्रिकोण समकोन आणि प्रत्येकांची एक बाजू बराबर आहे. स्त्रणजे बड बाजू दोहोंस साधारण आहे. याजकरितां (२ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्यांचे सर्व अवयव बराबर आहेत. स्त्रणजे अब बाजू तिचे समोरचे डुक बाजू बराबर. आणि अड बाजू तिचे समोरचे वक बाजू बराबर. आणि सर्व

अबड

अब डु त्रिकोण सर्व बडु क त्रिकोण चे बराबर आहे. हें सिद्ध.

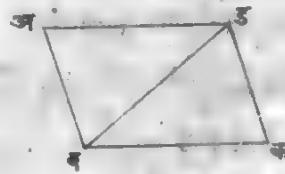
प्रथम कुरलरी. यापासून निघने किं. जा समांतर बाजू चौकोनांत एक कोन काट कोन आहे. तर बाकी राहिले तीन कोन काट कोन होतील. आणि समांतर बाजू चौकोन काट कोन चौकोन होईल.

दुसरी कुरलरी. यातून निघने किं. कोण त्याही समांतर बाजू चौकोनाचे जवळ जवळ चे कोनांची बेरीज दोन काट कोनां बराबर आहे.

तेविसावा सिद्धांत.

जा चौकोनांत समोरासमोर चा बाजू बराबर आहेत. ते समांतर बाजू चौकोन आहे. म्हणून समोरासमोर चा बाजू समांतर आहेत.

अब कडु चौकोन असेल. जा चा समोरासमोर चा बाजू बरोबर आहेत. म्हणजे अब बाजू डुक बाजू बराबर. आणि अड बाजू बक बाजू बराबर. तेव्हां या बराबरी चा बाजू परस्पर समांतर होतील. आणि ही आकृती



समांतर

समांतर बाजू चौ कोन आहे.

स्त्रणोन त्यांत बडु कर्णरेष कर. तेव्हां (वरसांगीतलेप्र०)
अबडु क बडु हे दोन त्रिकोण परस्पर सम बाजू आहेत. याजक
रितां (५५ सि० प्र०) परस्पर सम कोन ही आहेत. स्त्रणजे. त्याचे को-
न अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां (१३ सि० प्र०)
समोरासमोरचा बाजू समांतर आहेत. स्त्रणजे अब बाजू डक
बाजूशीं समांतर. आणि अडु बाजू बक बाजूशीं समांतर. आणि
ही सर्व आकृती समांतर बाजू चौ कोन आहे. हे सिद्ध.

चौविसावा सिद्धांत.

समांतर आणि बरोबर दोन रेषांचे समोरासमोरचे शेवट जा
रेषा सांधितात. त्या दोन रेषा परस्पर समांतर आणि बरोबर आ-
हेत.

अब डक या दोन रेषा परस्पर समांतर आणि बरोबर अ-
सतील. तर त्यांचे समोरासमोरचे शेवट सांधितात जा अडु बक
रेषा त्यांही समांतर आणि बरोबर होतील. आतां (वरचे आकृती
वर दृष्टी ठेव)

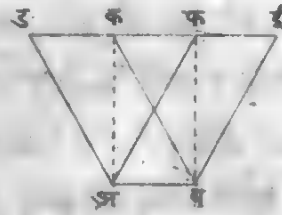
स्त्रणोन बडु कर्णरेष कर. (वरसांगीतलेप्र०) अब डक
या दोन रेषा परस्पर समांतर तेव्हां (१३ सि० प्र०) अबडु कोन
त्याचे

त्याचे बडूक व्युत्क्रम कोना बराबर आहे. याज करितां या दोन त्रिकोणांत दोन बाजू आणि अंतर कोन बराबर स्पर्शजे. अब बाजू उक बाजूचे बरोबर. बडू बाजू दोहोंस साधारण. आणि अबडू अंतर कोन बडूक अंतर कोनाचे बरोबर. याज करितां या दोन त्रिकोणांचा याकी राहिल्या बाजूंच कोन हे सर्व अवयव (११ सि० प्र०) परस्पर बरोबर. स्पर्शजे. अडू बाजू बक बाजूचे बराबर. आणि (१२ सि० प्र०) या दोन बाजू परस्पर समांतर आहेत. हे सिद्ध.

पंचविंशतिसिद्धांत.

समांतर बाजू चौ कोन आणि त्रिकोण हीं जर एकच पायावर आहेत एकच समांतर रेखांचे जोडाचे आंत. तर ते सर्व समांतर बाजू चौ कोन परस्पर बराबर. आणि तसे त्रिकोणही परस्पर बराबर आहेत.

अब कडू अब ईफ हे दोन समांतर बाजू चौ कोन असतील. आणि अब क अब फ हे दोन त्रिकोण असतील अब या एकच पायावर. आणि अब डई या एकच समांतर रेखांचे जोडामध्ये. तर अब कडू हा समांतर बाजू चौ कोन



चौ कोन

चौकोन अबईफ या समांतर बाजू चौकोन बराबर होईल. आणि अबक त्रिकोण अबफ त्रिकोणा बराबर होईल.

२३. लणोन दुईरेष अफ बई या दोन समांतर रेषांस छेदिले. तसेंच अड बक या दोन समांतर रेषांस छेदिले. तेव्हां (१४ सि. प्र०) ईकोन अफडे कोना बराबर आहे. आणि दुकोन बकई कोना बराबर आहे. याज करितां (१७ सि. १ कु. प्र०) अडफ बकई हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत. आणि अड बक या समांतर बाजू चौकोनाचा समोसमोराचा बाजू (२२ सि. प्र०) परस्पर बरोबर आहेत. त्याच या दोन त्रिकोणाचा बाजू आहेत. याज करितां हे दोन त्रिकोण (२ सि. प्र०) एकरूप अथवा यांचे सर्व अवयव अनुक्रमें बराबर आहेत. जर अब ईड या सर्वस्थळांतून हे दोन समत्रिकोण पर्यायेन वजा केले तर (३ प्र. प्र०) एकीकडे. अबईफ हें समांतर बाजू चौकोन. आणि दुसऱ्याकडे अबकड या समांतर बाजू चौकोना बराबर राहील. हे सिद्ध.

आणि अबक अबफ हे दोन त्रिकोण एकच अब पायावर आहेत. आणि समांतर रेषांचे एकच जोडाचे आंत आहेत. ते परस्पर बरोबर होत. कारण (२२ सि. इतं प्र०) हे दोन त्रिकोण वर सांगितले समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर आहेत. हे सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. सर्व समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण जोडा पाया आणि उंची बरोबर. ते समांतर बाजू चौकोन परस्पर

बराबर

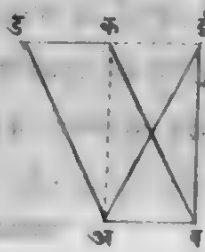
बराबर. आणि तसे त्रिकोण ही परस्पर बराबर. स्तणजे. उंची आ-
णि समांतर रेखांचे लंबांतर हे एकच आहे. जे लंबांतर (१२ व्या प्र-
सर्वत्र बराबर आहे.

दुसरी कुरलरी. जेव्हा समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण
आहेत. जांब्या पाया आणि उंची बराबर एकच. तेव्हा ते समांतर
बाजू चौकोन परस्पर आणि तसे त्रिकोण ही सर्व परस्पर बराबर आहेत.
स्तणजे. एक आकृती दुसरी आकृतीचे पायाचे बाजूवर ठेविली अस-
तां पाया बरोबर. स्तणजे. सर्वत्र पाया मिळेल. अथवा. एकच होईल.
आणि तसे दोन आकृतींस एकच पाया असोन सांगितल्या प्रमाणें
उंची बराबर आहे. तर त्या दोन आकृती बराबर आहेत.

सविसावा सिद्धांत.

जर एक समांतर बाजू चौकोन आणि एक त्रिकोण ऐसे ए-
कच पायावर असतील समांतर रेखांचे एकच जोडामध्ये. तर तो
समांतर बाजू चौकोन त्या त्रिकोणाचे दुपट. अथवा. तो त्रिकोण
त्या चौकोनाचे अर्धा बराबर होईल.

अबकडु समांतर बाजू
चौकोन असेल. आणि अबई
त्रिकोण असेल. एकच अब



पायावर

(४७०)

पायावर. अब दुई या समांतर रेखांचे एकच जोडा मध्ये. तर
अबकड हा समांतर रेखांची कोन अबई त्रिकोणाचे दुपट. अथ
वा. त्रिकोण त्या समांतर बाजूंची कोनाचे अर्धा बराबर होईल.

स्पर्शोन्मूळ समांतर बाजूंची कोनांत एक कर्णरेषा कर. जी रेखा
(२२सि.प्र०) त्यांची कोनास बराबर दोन त्रिकोणांनीं दुभागिल्ये.
आतां अबक अबई हे दोन त्रिकोण एकच पायावर समांतर रेखांचे
एकच जोडा मध्ये आहेत. याज करितां (२५सि.प्र०) दोनीं बराबर
आहेत. परंतु. अबक त्रिकोण (२२सि.प्र०) अबकड समांतर
बाजूंची कोनाचे अर्धा आहे. याज करितां अबई त्रिकोण त्याचे
बरोबर आहे. तोही अबकड. समांतर बाजूंची कोनाचे अर्धा बरा
बर आहे. हे सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. एक त्रिकोण समांतर बाजूंची कोनाचे अर्धा
आहे. जे कां त्यांचा पाया एक आणि उंची बरोबर. स्पष्ट जे. उंची आ-
णि समांतर रेखांचे जोडाचे लंबांतर एकच आहे. जें. लंबांतर.
(९ व्या.प्र०) सर्वत्र बराबर आहे.

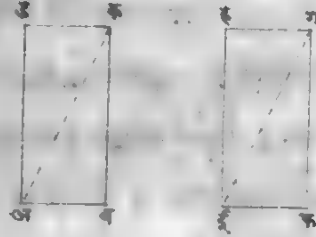
दुसरी कुरलरी. जर समांतर बाजूंची कोनाचा पाया कोणत्या
त्रिकोणाचे पायाचे अर्धा असेल. आणि त्या दोहोंची उंची बराबर
अथवा. त्रिकोणाचा पाया समांतर बाजूंची कोनाचे पायाचे दुपट.
असो न उंची. बरोबर असेल. तर त्या दोन आकृती बराबर आहेत.
त.

समाविष्टा वा

सत्ताविसावा सिद्धान्त.

जे काट कोन चौ कोन बराबर रेखांत आहेत. ते सर्व परस्पर बराबर आहेत.

बड आणि फह हे दोन काट कोन चौ कोन असतील. आ एका चा अब बक या बाजू अनुक्रमेण दुसऱ्याचे ईफ फग बाजूंचे बराबर आहेत. तर बड काट कोन चौ कोन फह काट कोन चौ कोनाचे बराबर होईल.



स्वणोन त्या दोन काट कोन चौ कोनांत अक ईग ऐशा दोन कर्ण रेखा कर. त्या प्रत्येकांस बराबर दोन दोन त्रिकोणांनी दुभागितील. आतां अबक ईफग या दोन त्रिकोणांमध्ये (बरसांगीत ले प्रमा०) एकाचा अब बक या बाजू आणि आंतील ब कोन. दुसऱ्याचा ईफ फग बाजू आणि आंतील फ कोन यांचे बराबर आहेत. याज करितां (१सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर बराबर. परंतु हे बरोबर दोन त्रिकोण आप आपल्ये काट कोन चौ कोनाचे अर्धे आहेत. अर्धा काट कोन चौ कोन अथवा ते त्रिकोण प्रत्येक बरोबर आहेत. याज करितां (६ प्र० प्र०) बड फह हे दोन काट कोन चौ कोन परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

कुरलरी

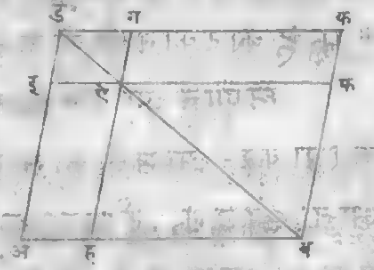
(४९)

कुरलरी सर्व चौरस जे बराबर रेघांत आहेत. ते सर्व पर-
स्पर बराबर आहेत. कारण सर्व चौरस काट कोन चौ कोनाची जात
आहेत.

अष्टाविसावा सिद्धांत.

कोण त्याही समांतर बाजू चौ कोनाचे कर्णरेषेचे दोहोंकडे जे
समांतर बाजू चौ कोन कांण्डमेंट आहेत. ते सर्व कांण्डमेंट परस्पर ब-
राबर आहेत.

अक समांतर बाजू चौ को-
न असेल जात बटु कर्णरेष आहे.
ईएफ रेष अब अथवा डक
शी समांतर आणि गऐह रेष
अडु शी अथवा बक शी समांतर
अशी किं. अऐ ऐक हे दोन स



मांतर बाजू चौ कोन ईग हफ या दोन समांतर बाजू चौ कोनाचे
कांण्डमेंट जाले. तर अऐ कांण्डमेंट ऐक कांण्डमेंटाचे बरोबर आहे.

सुणोन (२२ सि. प्र०) डब कर्णरेष अक ईग हफ या
तीन समांतर बाजू चौ कोनास बराबर दुभागिल्ये. तेव्हां ड अब स-
र्वत्रिकोण डकब या सर्वत्रिकोणाचे बराबर. आणि डईऐ ऐहव
हे दोन अवयव अनुक्रमें आपआपल्ये डगऐ ऐफव या दोन अ-
वयवांचे

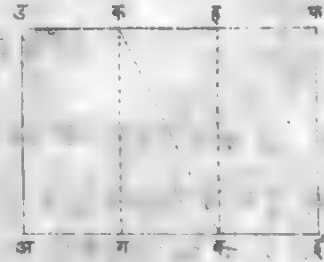
(५०)

ययशांचे बरोबर आहेत. याज करितां राहिले दोन अवयव असे
एक हे (२५ म. प्र०) परस्पर बरोबर आहेत. हे सिद्ध.

एकूणतिसावा सिद्धांत.

एक त्रापीज्या यद अवयवा त्रापीज्य म. जात दोन बाजू समां-
तर आहेत. तें समांतर बाजू चौकोनाचे. अर्धा बरोबर आहे. या
समांतर बाजू चौकोनाचा पाया. त्याचे दोन समांतर बाजूंचे बेरिजे
बरोबर आहे. आणि उंची त्या समांतर बाजूंचे लांबांतरा बरोबर
आहे.

अबकड एक त्रापीज्या
यद असेल जात अब. डक या
बाजू परस्पर समांतर आहेत.
आतां अग वाढवून डक. चे बरा-
बर बड्क कर. अशी किं. अईरंघ
त्रापीज्या यदाचे दोन समांतर बा-



जूंचे बेरिजे बरोबर होईल. आतां डक ही वाढीव. आणि ईफ गक
बहु या तीन अड शी समांतर रेखा कर. नंतर अफ समांतर बाजू
चौकोन जाला. जायी उंची अबकड त्रापीज्या यदाचे उंची बरा-
बर आहे. आणि जाचा अईपाया त्रापीज्या यदाचे दोन समांतर
बाजू

(५१)

चे बेरिजे बराबर आहे. आतां हें सिद्ध करायाचें किं. अब कडु चा पी ज्याचद अई फडु समांतर बाजू चौ कोनाचे अर्धा बराबर आहे.

आतां (२५ सि० २ कु० प्र०) त्रिकोण अथवा समांतर बाजू चौ कोन परस्पर बराबर. जे व्हां त्याचा पाया आणि उंची बराबर. याज करितां दुग समांतर बाजू चौ कोन हई समांतर बाजू चौ कोना बराबर. आणि क ग व त्रिकोण क ह व त्रिकोणा बराबर आहे. याज करितां ब क रेघ अफ समांतर बाजू चौ कोना स व राबर दोन अवयवानीं दुभागिल्ये. आणि अब कडु चा पी ज्याचद अफ चे अर्धा आहे. हें सिद्ध.

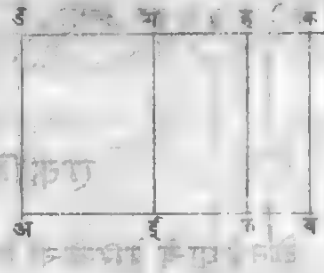
तिसावा सिद्धांत.

जे काट कोन चौ कोन एक अखंड रेघ आणि कशी ही भाग लेल्ये दुसरे खंड रेघेचे तुकडे यांत होतात. त्या सर्वांची बेरीज त्याच दोन अखंड रेखांत जो काट कोन चौ कोन होतो. त्याचे बराबर आहे.

अड एक अखंड रेघ असेल. आणि दुसरी अब खंड रेघ अई ईफ फ व तुकडे याणीं भागिली. तर अड अब रेखांत जो काट कोन चौ कोन होतो. तो अड अई. अड ईफ.

अड

अड फ व . या रेखांत जे काट कोन चौकोन होतात . त्या सर्वांचे बेरिजे बराबर आहे . हें लिहिण्याची शक्ती . अड . अब = अड . अई + अड . ईफ + अड . फ व



ह्मणोन एक काट कोन चौकोन कर . अड अब या अखंड रेखांशी . आणि ईग फ व हे दोन अव वरलेब अथवा अड शी समानर रेखा कर . कारण . (२२ सि . प्र ०) या दोन रेखा अड चे बराबर आहेत . तेव्हां हा सर्व एक काट कोन चौकोन . अग ई व फ व . या तुकड्यां करून केला आहे . परंतु . हेला हान काट कोन चौकोन अड अई . ईग ईफ . फ व फ व . या रेखांत आहेत . परंतु . ईग फ व रेखा अड चे बराबर . तेव्हां अड अई . अड ईफ . अड फ व . या रेखांत होतात . त्यांचे बराबर आहे . या ज करितां अड . अब हा काट कोन चौकोन दुसऱ्या काट कोन चौकोनाचे बेरिजे बराबर . जसे . अड . अई . अड . ईफ . अड . फ व . हे सिद्ध .

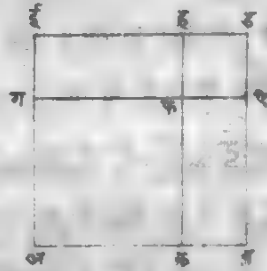
कुरलरी . जर एक सरळ रेषेचे दोन तुकडे केले आहेत . त्या अखंड रेषेवर जो चौरस किंवा वर्ग होतो . तो . त्या सरळ रेषेचे तुकड्यांवर त्याच अखंड रेषे करून जे काट कोन चौकोन होतात .

त्याचे

त्यांचे बेरिजे बराबर आहे.

एकतिसावा सिद्धांत.

दोन रेषांचे बेरिजेचा वर्ग त्या दोन रेषांचे वर्गांचे बेरिजेहून अधिक आहे. त्या दोन रेषांचा जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे दुपटीने अथवा एक अखंड रेषेचा वर्ग त्याच रेषेचे दोन तुकड्यांचे वर्गांची बेरीज त्याच तुकड्यांचे काटकोन चौकोनांचे दुपटीने अधिक इतक्या बराबर आहे.



अब रेष कोणत्याही अक कब या दोन रेषांची बेरीज असेल. तर अब रेषेचा वर्ग या अक कब रेषांचे वर्गांचे बेरिजेने अधिक अक कब रेषांचे काटकोन चौकोनांची दुपट इतक्या बरोबर आहे. म्हणजे. $अब^2 = अक^2 + कब^2 + २ अक \cdot कब$.

म्हणजे अब रेषेवर अब दुई चौरस अथवा वर्ग कर. आणि अक खंडावर अक फग चौरस कर. नंतर कफ आणि गफ वाटीव. दुसऱ्या दोन बाजूंवर ह आणि ऐ स्थळापर्यंत.

कह गऐ या दोन रेषा (२२ सि. प्र. १) अब अथवा बड या वर्ग बाजूंचे बराबर आहेत. याजकरितां परस्पर बरोबर. यांतून

कफ

कफ गफ या अफ चौरसाचा बाजू वजा कर. तेव्हां फह फऐ चेबरोबर राहिली. आणि फह फऐ त्याचे समोरचे उह उऐ चेबरोबर आहेत. कारण. समांतर बाजू चौकोनाचा समोरा समोराचा बाजू आहेत. यांतून कळते किं. हऐ आकृती समबाजू आहे. आणि (२२सि०१कु०प्र०) त्या आकृतीचे सर्व कोन काटकोन आहेत. याजकरितां हऐ आकृति फऐ रेघेचा अथवा त्याचेबरोबर कब रेघेचा वर्ग आहे.

आतां ईफ आणि फब या दोन आकृती दोन काटकोन चौकोनांबराबर आहेत. जे एक आणि कब रेघांत होतात. कारण. गफ फक यारेषा एक चेबराबर आहेत. आणि फह अथवा फऐ. कब चेबरोबर आहे. परंतु. सर्व वर्ग अड चार आकृती मिळून जातेला. म्हणजे. अफ फड हे दोन वर्ग आणि ईफ फब हे दोन काटकोन चौकोन मिळोन. अब चेवर्गाबरोबर आहे. जे एक कब यांचा वर्ग अधिक एक कब यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें होतिसु.

कुरलरी. यांतोन निघतें किं. जर कोणतीही रेघ बराबर दोन तुकड्यांनीं दुभागिली. तर त्या अखंड रेघेचा वर्ग त्याच रेघेचे अर्धाचे वर्गाचे चौपट आहे.

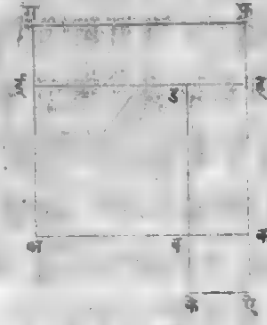
वृत्तिसावा सिद्धांत.

दोन रेखांचे वजाबाकीचा वर्ग. त्यांचे वर्गांचे वरिजेहून उणा आहे. त्या रेखांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीने.

कोणत्याही अक बक या दोन रेखा असतील. जोंची वजाबाकी अब आहे. तर अब चा वर्ग. अक आणि बक चे वर्गाहून उणा होईल. अक. बक यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीने.

सणजे. $अब^2 = अक^2 + बक^2 - २$

अक. बक.



सणोन अब वजाबाकीवर अबडई चौरस अथवा वर्ग कर. आणि अक रेखेवर अक फग चौरस अथवा वर्ग कर. नंतर ईडु रेख ह पर्यंत वाढीव. आणि डब हक वाढवून केऐ रेख कर. अशी किं. बक रेखेवर बऐ चौरस होईल.

आतां दिसते किं अडु वर्म अफ बऐ या दोन वर्गाहून उणा आहे. ईफ डऐ या दोन काटकोन चौकोनांनीं. परंतु. गफ रेख अक रेखेचे बराबर आहे. आणि गई अथवा फह दुसरे बक रेखेचे बराबर आहे. याजकरितां ईफ काटकोन चौकोन. जो ईग गफ रेखांत होतो. तो. अक बक रेखांतील काटकोन चौकोन

कोना

(५६)

कोना बराबर आहे.

पुनः फह कए अथवा बक अथवा हड चे बराबर आहे. साधारण अवयव हक मिळून सर्व हए. सर्व फक चे बराबर. अथवा त्याचे बरोबरीचे अक रेषेचे. याजकरितां दुए आकृति अक बक रेषांतील काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

यांतून निघतें किं. ईफ दुए या दोन आकृती. अब बक रेषांतील दोन काटकोन चौकोनांचे बरोबर आहेत. याजकरितां अब चा वर्ग अक. बक चे वर्ग हून उणा आहे. अक. बक या काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें. हें सिद्ध.

त्रेतिसा वा सिद्धान्त.

दोन रेषांची बेरीज व त्या रेषांची वजाबाकी यांत जो काटकोन चौकोन होतो. तो त्याच रेषांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे.

अब अक या दोन विषम रेषा असतील. तर अब अक यांचे वर्गांची वजाबाकी एक काटकोन चौकोना बराबर होईल. जो त्यांची बेरीज व वजाबाकी यांत केला. स्त्रणजे. अब - अक =
अब + अक. अब - अक.



स्त्रणजे

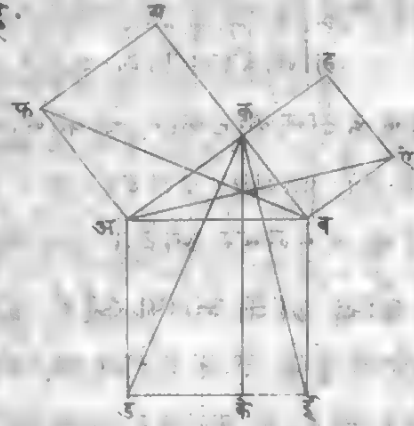
स्मरणेन अब रेघेवर अब दुई वर्ग कर. आणि. अक रेघेवर
अक फग वर्ग कर. दुब वाढीव. अशी किं बह. अक चे बराबर
होईल. हरे. अब शीं अथवा ई दु शीं समांतर कर. आणि फ क
दोहों कडे ऐ आणि के पर्यंत वाढीव.

आतां दिसतें किं. अड अफ या दोन वर्गांची वजा बाकी ईफ.
के व हे दोन काट कोन चौ कोन आहेत. परंतु. ईफ ब्र ऐ ह परस्पर
बरोबर. कारण. बराबर रेघांत आहेत. असे किं. ई के बह या दोनां
अक चे बराबर आहेत. आणि गई कव चे बरोबर. आणि या दो
न अब अक आणि अई अग यांची वजा बाकी आहेत. याज
करितां ईफ. के व हे दोन काट कोन चौ कोन के व ब ऐ या दोन काट
कोन चौ कोनां बरोबर. अथवा. के ह चे बराबर. स्मरणेन के ह काट
कोन चौ कोन अड अफ वर्गांचे वजा बाकी बरोबर आहे. परंतु.
के ह काट कोन चौ कोन या दोन रेघांत आहे. एक दुह स्मरणे.
अब आणि अक यांची बेरीज. दुसरी कड. स्मरणे अब आणि
अक यांची वजा बाकी. याज करितां अब अक यांचे वर्गांची व-
जा बाकी एक काट कोन चौ कोनां बराबर आहे. जो त्यांची बेरीज
आणि वजा बाकी यांत होतो. हे सिद्ध.

चौतिसावा सिद्धांत.

कोण त्याही काट कोन त्रिकोणांत कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरीजे बराबर आहे.

अबक एक काट कोन त्रिकोण असलं जातं क कोन काट कोन आहे. तर अब कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजू अक बक यांचे वर्गांचे बेरीजे बराबर होईल.
म्हणजे $अब^2 = अक^2 + बक^2$



म्हणून अब रेषेवर अड्डे वर्ग कर आणि अक बक रेषांवर अग व ह हे दोन वर्ग कर. नंतर क के. अड्डे शीं अथवा यड्डे शीं समांतर कर आणि अ ए व फ कडु कडू या रेषांनी सांध.

आतां अक रेणू क ग क व या दोन रेषांस मिळत्ये. अशी किं. दोहोंकडे दोन काट कोन होतात. याज करितां (६ सि० १ कु० ३०) या दोन रेषा मिळून एक वर्ग रेष होत्ये. आणि फ अक ड अब हे दोन कोन वर्गांचे कोन अथवा काट कोन आहेत. म्हणून परस्पर बराबर. या दोन बराबर कोनां शीं साधारण ब अक कोन मेळीव. म्हणजे फ अब सर्व कोन अथवा बेरीज क अड्डे सर्व कोनाचे अ-

थवा

यवा बेरिजेचे बरोबर परंतु फअ रेघ आपल्ये वर्गाचे दुसरे अक बाजूचे बराबर आहे. आणि अब रेघ आपल्ये वर्गाचे दुसरे अड बाजूचे बराबर आहे. याप्रमाणे फअ अब या दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील फअ ब कोन कअ अड या दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील कअड कोन हीं एक मेकाचीं अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. लणोन (१सिद्हांताप्र०) अफ ब हा त्रिकोण अकड या त्रिकोणाचे बराबर आहे.

परंतु अग वर्ग अफ ब त्रिकोणाचे दुपट आहे. कारण (२६सि०प्र०) या दोन आकृती एकच अफ पायावर आहेत. आणि फअ ग ब या समांतर रेखांचे एकच जोडामध्ये. याप्रमाणे अके हा काट कोन चौकोन अकड या त्रिकोणाचे दुपट आहे. कारण एकच अड पायावर अक के क या समांतर रेखांचे एकच जोडामध्ये आहेत. आणि (६प्र०प्र०) जावस्तू प्रत्येक दुसरे एक वस्तूचे दुपट आहेत त्या सर्व परस्पर बराबर. याजकरितां अग वर्ग अके समांतर बाजू चौकोनाचे बराबर आहे.

याचरीतीनें हेही सिद्ध होतें किं. बहु वर्ग बके समांतर बाजू चौकोनाचे बराबर आहे.

याजकरितां अग बहु हे दोन वर्ग मिळून अके बके या दोन समांतर बाजू चौकोनां बराबर आहेत. अथवा त्यांचे सगळे अर्ध वर्गाबराबर. लणजे त्रिकोणाचे दोन लाहान बाजूंचे वर्गाची बेरीज

(६०)

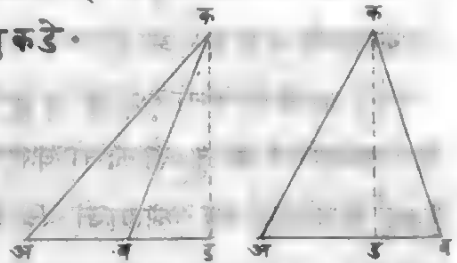
बेरीज लोटये बाजूंचे वर्गा बराबर आहे. हें सिद्ध.
प्रथम कुरलरी. यांतून निघतें किं. काट कोन त्रिकोणाचे कोण-
त्येही लाहान बाजूचा वर्ग (३ प्र० प्र०) कर्ण आणि दुसरी लाहान बाजू
यांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे. अथवा (३३ सि० प्र०) कर्ण
आणि राहिली दुसरी बाजू यांची बेरीज आणि वजाबाकी यांत जो
काट कोन चो कोन होतो त्याचे बराबर आहे.

दुसरी कुरलरी. यांतून निघतें कीं. दोन काट कोन त्रिकोणांत
एकाचा होन बाजू दुसऱ्याचे दोन बाजू बराबर असतील तर त्यांची
तिसरी बाजूही बराबर होईल. आणि ते दोन काट कोन त्रिकोण पर-
स्पर एकरूप होतील.

पेंसतिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत दोन बाजूंचे वर्गांची वजाबाकी पायाचे
दोन खंडांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे. दोन खंडे स्पर्शजे त्रिकोणा
चे शिरापासून पायावर जो लंब केला आहे. त्यापर्यंत पायाचे दोन
खंडांपासून दोन अंतरें अथवा तुकडे.

कोणताही अबक त्रिकोण
असेल जात कडरेष अब पाया
वर लंब आहे. तर अक बक या
दोन बाजूंचे वर्गांची वजाबाकी



अड

अड बड या दोन खंडांचे वर्गांचे वजाबाकी बरोबर आहे. म्हणजे.

$$अक - बक = अड - बड.$$

म्हणजे अकड काटकोन त्रिकोणांत $अक = अड + कड$
आणि बकड काटकोन त्रिकोणांत $बक = बड + कड$ } (३४ सि० प्र०)

वाजकरितां अक आणि बक यांची वजाबाकी.

$$\left. \begin{array}{l} अड + कड \\ बड + कड \end{array} \right\} \text{ यांचे वजाबाकी बरोबर आहे. }$$

या हां होत कड वर्ग साधारण आहे तो सोडून. अक आणि बक यांची वजाबाकी अड आणि बड यांचे वजाबाकी बरोबर आली. हे सिद्ध.

कुरलरी. जो काटकोन चौकोन कोणत्याही त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजाबाकी यांत होतो. तो (३३ सिद्धांत प्र०) शिरापासून जो लंब केला आहे त्यापर्यंत पायाचे दोन शेवटांपासून दोन अंतरांची अथवा दोन खंडांची बेरीज आणि त्यांची वजाबाकी या दोन रेखांचे काटकोन चौकोना बरोबर आहे. अथवा. या बरोबर आहे. एक काटकोन चौकोन जो पुढे सांगतो यारेखांत होतो. एकरेषाचा आणि दुसरीरेषाचा यांचे पूर्वेक खंडांची वजाबाकी. जेव्हा लंब त्रिकोणांत पडतो तेव्हा. आणि जेव्हा लंब त्रिकोणाचे बाहेर पडतो तेव्हा या यांचे पूर्वेक खंडांची बेरीज. म्हणजे $अक + बक$. $अक - बक = अड + बड$. $अड - बड$. अथवा $अक + बक$. $अक - बक = अब$. $अड - बड$ दुसरे आकृतींत जेव्हा लंब त्रिकोणांत पडला आहे.

आणि

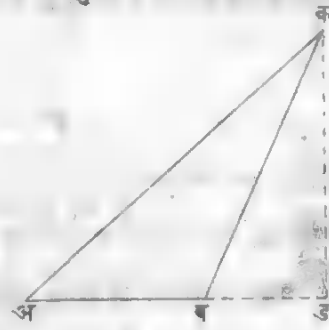
(६२)

आणि अक + बक • अक - बक = अब • अड + बड • दुसऱ्या
आकृतीत जेव्हा लंब त्रिकोणाचे बाहेर पडला आहे.

उत्तिसावा सिद्धांत.

कोण त्याही विशाल कोन त्रिकोणांत विशाल कोनाचे समोरचे
बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरिजेहून अधिक आहे. कशा-
नेतर. याचा आणि विशाल कोनापासून लंब पर्यंत जें अंतर आहे त्या
दोन रेषांत जो काट कोन चौ कोन होतो त्याचे दुपटीने.

अबक एक त्रिकोण असे
ल जात ब विशाल कोन आहे. आ-
णि अड पाया वाढवून त्यावर
कड लंब आहे. तर अक बाजूचा
वर्ग अब बक या दोन बाजूंचे वर्गां
हून अब बड यांचे काट कोन चौ
कोनाचे दुपटीने अधिक आहे. म्हणजे. $अक^2 = अब + बक +$



२ अब • बड.

म्हणजे अखंड अड रेषेचा वर्ग (११ मि. प्र०) तीचे अब बड
या खंडांचे वर्ग त्याच खंडांचे काट कोन चौ कोनाचे दुपटीने अधिक इत-
क्या बराबर आहे. जर या दोन बरोबरीं बर कड वर्ग मिळेल तर (२ प्र० प्र०)

अड

(६३)

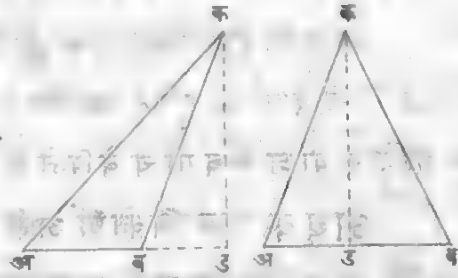
अड कड यांचे वर्गांची बेरीज अब वड कड यांचे वर्गांची बेरीज अब वड यांचे काट कोन चौ कोनाचे दुपटीने अधिक इतक्याचे बरोबर आहे.

परंतु (१४ सि० प्र०) अड कड यांचा वर्ग अक चे वर्गा बरोबर आहे. आणि वड कड यांचा वर्ग बक चे वर्गा बरोबर आहे. याजक रितां अक चा वर्ग अब बक यांचे वर्गांची बेरीज अब वड यांचे काट कोन चौ कोनाचे दुपटीने अधिक इतक्याचे बरोबर आहे. हे सिद्ध.

सनतिसावा सिद्धांत.

कोण त्याही त्रिकोणांत लघु कोना समोरचे बाजूचा वर्ग पाया आणि दुसरी बाजू यांचे वर्गांचे बेरीजेहून उणा आहे. पाया आणि लघु कोनापासून लंबपर्यंत जें अंतर आहे त्या दोन रेखांचे काट कोन चौ कोनाचे दुपटीने.

अबक एक लघु कोन त्रिकोण असेल. जांत अलघु कोन आहे. आणि अब पाया वर कड लंब आहे. तर बक चा वर्ग अब अक या दोहोंचे वर्गाहून.



अब अड यांचे काट कोन चौ कोनाचे दुपटीने उणा आहे. म्हणजे.

बक = अब + अक - २ अब • अड. प्रथम आकृतीत (१६ सि० प्र०)

अक = बक + अब + २ अब • वड. या दोन बरोबर्यांत अब चा वर्ग

(६४)

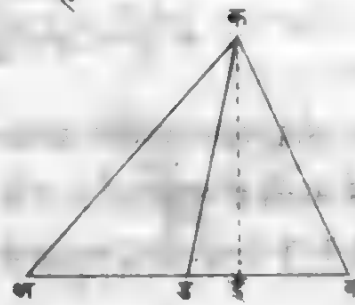
वर्ग में की व. तर (२ प्र. प्र०) अब + अक = बक + २ अब + २
अब. बड. अथवा अब + अक = बक + २ अब. अड. (३. सि.
प्र०) अथवा बक = अब + अक - २ अब. अड. हैं सिद्ध.

पुनः दुसरे आकृतिंत (३४ सि. प्र०) अक = अड + डक.
आणि (३१ सि. प्र०) अब = अड + बड + २ अड. डब.
याज करितां (२ प्र. प्र०) अब + अक = बड + डक + २ अड + २ अड. डब
अथवा अब + अक = बक + २ अड + २ अड. डब. (३४ सि. प्र०)
अथवा अब + अक = बक + २ अब. अड.
अथवा बक = अब + अक - २ अब. अड. हैं सिद्ध.

अठतिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत जीरेष शिरापासून पायाचे मध्यापर्यंत
केली तिचे वर्गाची दुषट आणि अर्धे पायाचे वर्गाची दुषट मिळून दु-
सर्वा दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे.

अबक एक त्रिकोण असेल
आणि त्यांत शिरापासून अब पाया
चे दु मध्यापर्यंत कटुरेख केली. अशी
कि. पायास बराबर अड डब या दोन
खंडांनीं दुभागित्ये. तर अक कब
या वर्गा. कडु बडु या दोहोंचे वर्गांचे दुषटी बराबर आहे.



स्वणजे

(६५)

स्रणजे अके + कबे = २ कडे + २ डबे

स्रणान अंबपायावर कडू लंब कर आतां अडक या विशाळ कोन त्रिकोणांत जांतडु विशाळ कोन आहे (३६ सि. प्र०) अक आबर्ग अड कड यांचे (अथवा बड कड यांचे) वर्गीहून याचरेपांतील काट कोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक आहे २ अड • डई (अथवा २ बड • डई) आणि डबक यालघु कोन त्रिकोणांत जांत लघु कोन ड आहे (३७ सि. प्र०) बके = बडे आणि कडे याहून पूर्वी सांगितल्ये काट कोन चौकोनाचे दुपटीनें उणा आहे याज करितां अके आणि बके मिळोन त्या पूर्व बेरीजेचे दुपट आहेत जांत अधिक जाति आणि उन जाति काट कोन चौकोन वाढ होतात

स्रणजे अके = बडे + कडे + २ बड • डई (३६ सि. प्र०)

आणि बके = बडे + कडे - २ बड • डई (३७ सि. प्र०)

बेरीजे अके + बक = २ बडे + २ कडे हें सिद्ध

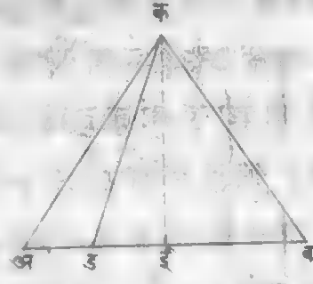
एकुण चाळिसा वा सिद्दांत

समष्टि बाजू त्रिकोणांत कोणती एकरेघ शिरावा सून पायावर कोणत्येही स्थळापर्यंत केली तीचा वर्ग आणि पायाचे दोन खंडांचा काट कोन चौकोन मिळून जें होतें तें त्याचे एक सम बाजूचे

वर्ग

वर्गा बरोबर आहे.

अबक एक समद्विबाज त्रिकोण असेल. आणि त्यांत शिरापासून पायावर कोण त्याही स्थळांकडुं रेघ केली आहे. तर अक बाजूचा वर्ग. कडुचा वर्ग



आणि अडु डब यांचा काटकोन चौकोन एक वमिळोन जें होतें त्याचे बरोबर आहे. म्हणजे. $अक^2 = कडु^2 + अडु \cdot डब$.

म्हणोन कडु रेघ कर. अशीकिं. शिरकोन दुभागील. तर ही रेघ (३सि० १कु० प्र०) पायास दुभागित्ये. आणि त्याजवर लंब आहे. याजकरितां अडु बरोबर डब जाला.

परंतु अकडु त्रिकोणांत जांतडु विशालकोन आहे. (३६सि० प्र०)

अक^२ या बरोबर = $कडु^2 + अडु^2 + २अडु \cdot डड$.

// अथवा = $कडु^2 + अडु \cdot अडु + २डड$ (३०सि० प्र०)

// अथवा = $कडु^2 + अडु \cdot अडु + डड$

// अथवा = $कडु^2 + अडु \cdot वड + डड$

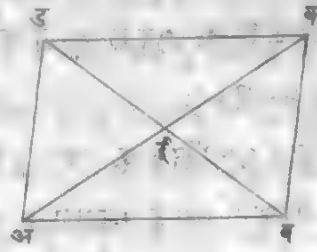
// अथवा = $कडु^2 + अडु \cdot डब$ हें सिद्ध.

==

(६०)

चाळिसावा सिद्धांत.

कोण त्याही समांतर बाजूंची कोनांत कर्णरेषा परस्परांस दु-
भागितात. आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज त्यांचे चार बाजूंचे वर्गांचे
बेरीजे बराबर आहे.



अब कड एक समांतर
बाजूंची कोन असेल जांतील कर्ण
रेषा ई स्थळावर परस्परांस दुभा-
गितात. तर अई ईक बराबर आणि

बई ईड बराबर होतील. आणि अक बड यांचे वर्गांची बेरीज
अब बक डक डअ यांचे वर्गांचे बेरीजे बराबर होईल.
सणजे अई = ईक आणि बई = ईड.

आणि अक + बड = अब + बक + कड + डअ.

सणोन अई व डईक हे दोन त्रिकोण परस्पर सम कोन आ-
हेत. कारण. समोरासमोरचे कोन ई स्थळावर (७सि०प्र०) बरोबर
आणि अक बड या दोन रेषा अब डक या रेषांस मिळतात. या-
जकरितां ब अई कोन डकई कोना बराबर आणि अबई कोन कडई
कोना बराबर आहे. आणि (२२सि०प्र०) अब बाजू डक बाजूचे
बराबर आहे. याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि
(२सि०प्र०) त्यांचा राहिल्या बाजू अनुक्रमानें परस्पर बराबर

आहेत

(६८)

आहेत स्तणजे अई = ईक आणि बई = ईड

पुनः ई स्थळावर अक दुभागिला याजकरितां (१८सि०प्र०)

$$अड + डक = २ अई + २ डई$$

याचरीतीनें अब + बक = २ अई + २ बई (अथवा)

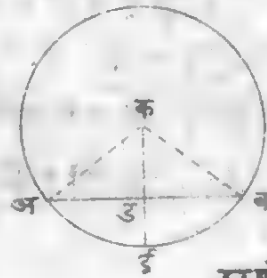
$$२ डई याजकरितां अब + बक + कड + डअ = ४ अई + ४ डई (२प्र०प्र०)$$

परंतु (२१सि०कु०प्र०) एक अखंड रेघेचा वर्ग तिचे अर्धाचे वर्गाचे चौपट आहे स्तणोन अक = ४ अई आणि बड = ४ डई याजकरितां अब + बक + डक + डअ = अक + बड (१प्र०प्र०) हे सिद्ध.

एकेताळिसावा सिद्धांत

जर एकरेघ वर्तुळ मध्याचे पारजातुन अथवा त्यापासून केली ती त्या वर्तुळांतल कोणत्येही ज्यास दुभागित्ये तेव्हां तीरेष त्या ज्यावर लंब होईल अथवा जर तीरेष ज्यावर लंब असेल तर ज्या आणि ज्याकौस यांस दुभागील

कोणत्येही वर्तुळांत अब ज्या असेल आणि कडरेष क वर्तुळ मध्यापासून त्या ज्यावर केली ती दु स्थळावर ज्यास दुभागित्ये तर अबरेघेवर ती कडरेष लंब होईल.



स्तणोन

(६९)

स्नगोन क अ क ब ऐशा दोन त्रिज्या कर अकडु आणि ब कडु या दोन त्रिकोणांत क अ (४४ व्या० प्र०) क ब चे बराबर आहे. कडु बाजू दोहोंत साधारण आणि (वरसांगीत ल्या प्र०) अडु डु ब चे बराबर आहे. याप्रमाणें दोनीं त्रिकोणा बा तीनही बाजू अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. याज करितां (५२ सि० प्र०) त्यांचे तीनही कोन अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. या पासून निघतें किं अडु क कोन बडु क कोना बराबर आहे. स्नगोन (११ व्या० प्र०) हे दोनही कोन काट कोन आहेत. आणि कडु रंघ अब रेघेवर लंब आहे.

पुनः जर कडु अब वरलंब असेल तर अब ज्या डु स्थळावर दुभागिला जाईल. अथवा अडु डु ब चे बराबर होईल. आणि अई ब कोस ई स्थळावर दुभागिला जाईल. अथवा अई ई ब चे बराबर होईल.

स्नगोन (वरसांगीत ल्या प्र०) क अ क ब त्रिज्या कर. ते कां अ क ब त्रिकोणांत क अ बाजू क ब चे बराबर आहे. याज करितां (३२ सि० प्र०) त्यांचे समोरा समोरचे अ कोन आणि ब कोन हे परस्पर बराबर आहेत. आतां अ कडु आणि ब कडु या दोन त्रिकोणांत अ कोन ब कोना बराबर आहे. आणि (११ व्या० प्र०) डु स्थळा वरील दोनीं कोन परस्पर बराबर आहेत. याज करितां (१७ सि० १ कु० प्र०) त्यांचे राहिले निसरे कोन परस्पर बराबर आहेत. आणि दोन त्रिकोणांत कडु बाजू साधारण आहे. याज करितां

(७०)

(२सि०प्र०) अड बाजू डब बाजूचे बराबर आहे

आणि पुनः अकई कोन बकई कोना बराबर आहे स्पणो

न (५७ व्या० प्र०) अई कोस पूर्व दोन कोनां तून प्रथमास सापितो

तो बई कोसा बराबर आहे जो बई कोस दुसर्ये कोनास सापितो

कारण बरोबर कोसास बरोबर साप पाहिजे हें सिद्ध

कुरलरी यांतून निघतें किं कोणतीही रेषा जी कोणत्याही ज्या

वर लंब असोन त्या ज्यास दुभागित्ये ती रेषा त्या वर्तुळा मध्याचे पा

र जाईल

बेताळिसा वा सिद्धान्त.

एके वर्तुळांत जा एक बिंदूपासून परिघपर्यंत दोहोंपेक्षां अ-

धिक बराबर रेषा कर्तें येतात तो बिंदू वर्तुळा मध्य होईल

अबक एक वर्तुळ असेल

त्यातील कोणताही ड बिंदू असेल

त्यापासून परिघपर्यंत डअ डब

डक या तीन रेषा केल्या त्या बराबर

र असतील तर तो ड बिंदू वर्तुळा

चा मध्य होईल



स्पणोन त्यांत अब बक या दोन ज्या कर आणि त्यांस ई

आणि

(११)

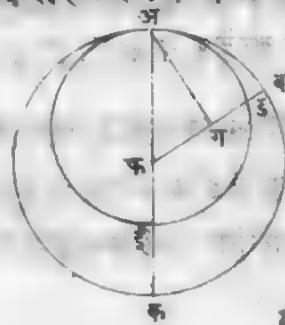
आणि फ स्य कांवर अनुक्रमें दुभाग में नर डई डफ लांघ
 आतां डअई डबई या दोन त्रिकोणांत (कसां गीत ल्या प्र०)
 डअ बाजू डब बाजू बराबर आणि सांगीत ल्या प्रमाणें अई बाजू
 डूब बे बराबर आणि डई बाजू दोनही त्रिकोणांस साधारण आहे
 याज करितां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि (५१ सि० प्र०)
 त्यांचे दोन ई कोन परस्पर बराबर सणोन (११ व्या० प्र०) डई अब
 ज्याचे मध्यावर कंब आहे याज करितां (५१ सि० कु० प्र०) डई रेष
 वर्तुळ मध्याचे पार जात्ये

याचरीतीनें दाखवितां येतें किं डफ रेष ही मध्याचे पार जात्ये
 याज करितां ड बिंदू वर्तुळाचा मध्य आहे आणि डअ डब डक या
 तीन बराबर रेषा त्या वर्तुळाचा विज्या आहेत हें सिद्ध

त्रैताळिसा वा सिद्धांत

जर दोन वर्तुळें आंतोन परस्पर स्पर्शितात तर तें स्पर्शस्थळ व
 त्या दोन वर्तुळांचे मध्य ऐशीं तीन स्थळें एकच सरळ रेषेंत येतील

अबक आणि अडई हीं
 दोन वर्तुळें जर आंतोन अस्थळावर
 परस्पर स्पर्शितात तर अ बिंदू आणि
 दोन वर्तुळांचे मध्य बिंदू ऐशीं तीन स्थ
 लें एके सरळ रेषेंत येतील



सणोन

(७२)

स्वर्णो न अ व क व र्त्तु वाचा मध्यविंदूफ असेल आणि त्या
वेळार अफ क व्यास कर जिर दुसर्वा व र्त्तु वाचा मध्यविंदू अ क
रेषे ते येण्यास अशक्य समजतात आणि किं तो व र्त्तु मध्य दुसर्वा
ग स्थळावर आहे मंतर त्या वेळार फ ग रेषे कर अशी किं दोन ही
व र्त्तु वांचे परिघांस दु आणि व या स्थळावर उडील आणि अ ग
संघ

आतां अफ ग नि कोणांत (१० सि० प्र०) फ ग ग अ या दो-
न बाजूंची बेरीज तिसर्या अफ बाजूहून अधिक आहे अथवा
निचे बराबरीचे फ व निचे हून अधिक आहे साधारण अवयव
फ ग तां या दोहोंतून वजा कर स्वर्णजे बाकी राहिला ग अ तुकडा
बाकी राहिल्या ग व तुकड्याहून अधिक होईल परंतु ग विंदू आंती
ल व र्त्तु वाचा मध्य मनांत आणिला यास व त्याचा दोन त्रिज्या ग
अ आणि ग दु परस्पर बराबर आहेत याज करितां ग दु ही ग व
हून अधिक होईल परंतु अ दु र्दी आंतील व र्त्तु अ आहे स्वर्णो न ग दु
ग व हून अवश्य लाहता आहे अशा ने ग दु ग व हून अधिक आ-
णि उणी ही गोष्ट परम अवश्य याज करितां ग मध्य विंदू अफ क
रेषेचे बाहेर कदापि होत नाही हे सिद्ध

चौबेता बी स

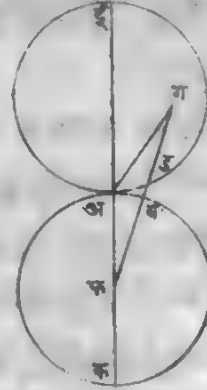
(७३)

चौवेताळिसावा सिद्धान्त

जर दोन वर्तुळां परस्पर बाहेर स्पर्शतात तर त्यांचा स्पर्शबिंदू व त्यांचे मध्यबिंदू ऐशीं तीन स्थळां एके सरळ रेषेत येतील.

अबक आणि अडई हीं.

दोन वर्तुळां जर बाहेर अस्थळावर परस्पर स्पर्शतील तर अस्थबिंदू आणि दोन वर्तुळांचे मध्यबिंदू ऐशीं तीन स्थळां एके सरळ रेषेत येतील.



सुणोन अबक वर्तुळाचा मध्यबिंदू फ असेल त्याचे पार अफक व्यास कर आणि त्यास दुसऱ्या वर्तुळाचे ई स्थळापर्यंत वाढीव जर दुसऱ्या वर्तुळाचा मध्यबिंदू ई फ रेषेत येण्यास अशास्व तर मनांत आण किं तो स्थळांतरीं ग बिंदूवर आहे तेव्हां अग आणि फग रेखाकर अशा किं दोनीं वर्तुळांस ब आणि ड या स्थळांवर छेदितील.

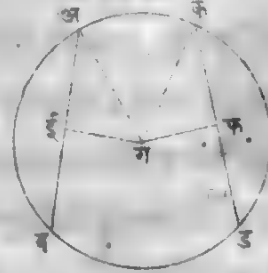
आतां अफग त्रिकोणांत (१० सि० प्र०) अफ आणि अग या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या फग बाजूहून अधिक आहे परंतु फ आणि ग हे दोन बिंदू दोन वर्तुळांचे मध्य आहेत यास्तव गअ आणि

आणि गडु या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर आणि अफ फ व
या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर या पासून ग अ आणि अफ यांची
बरीज गडु आणि बफ यांचे बेरिजे बराबर आहे यावरून गडु
आणि बफ यांची बेरीज गफ हून अधिक होत्ये हें परम अशक्य
याज करितां ग मध्य बिंदू फ रेघेचे बाहेर कदापि होत नाही हें सि-
द्ध.

पंचेताळिसावा सिद्धांत

कोणत्याही वर्तुळांत जा ज्या मध्यापासून बराबर अंतरानें
आहेत त्या सर्व परस्पर बराबर आणि जा ज्या परस्पर बराबर आहे-
त त्या सर्व वर्तुळ मध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत

अब आणि कडु कोणत्या
ही दोन ज्या असतील अशा किं ग
मध्य बिंदू पासून बराबर अंतरानें
तर त्या दोनही परस्पर बराबर
आहेत



ह्मणोन ग अ आणि ग क या दोन त्रिज्या कर आणि ग डी
गफ हे दोन लंब कर जे ग मध्य बिंदू पासून बराबर अंतर दारववि-
तात

आतां

(७५)

आतां ग अई आणि ग क फ या दोन काटकोन त्रिकोणांत ग अ बाजू ग क बाजू बराबर आणि गई ग फ चे बराबर आणि ई काटकोन फ काटकोना बराबर याज करितां हे दो त्रिकोण (३४ सि० २ कु० प्र०) एकरूप आहेत आणि एकाची तिसरी अई बाजू दुसऱ्याचे तिसर्ये क फ बाजू बराबर आहे परंतु (४१ सि० प्र०) अवरेष अई चे दुपट आहे आणि कटुरेष क फ चे दुपट आहे याज करितां (६ प्र० प्र०) अवरेष कटु चे बरोबर आहे हें सिद्ध पुनः जर अब ज्या कटु ज्याचे बराबर असेल तर त्या दोन ज्यांचीं वर्तुळमध्यापासून अंतरें गई आणि ग फ हीं बराबर होतील

स्त्रणोन (सांगीतल्या प्र०) अवरेष कटु चे बराबर आहे तेव्हां एकीचें अई अर्ध दुसरीचे क फ अर्धाचे बराबर आहे आणि ग अ ग क या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर आणि ई काटकोन फ काटकोना बराबर आहे याज करितां ग अई आणि ग क फ या दोन त्रिकोणांत (३४ सि० २ कु० प्र०) एकाची राहिली तिसरी बाजू दुसऱ्याचे राहिल्ये तिसर्ये बाजू बराबर आहे स्त्रणजे गई अंतरं ग फ अंतराचे बराबर आहे हें सिद्ध

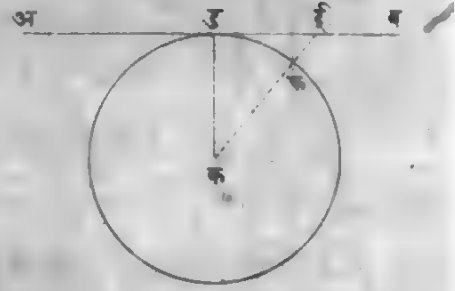
शेताळिसा वा .

(७६)

शेताळिसा वा सिद्धांत.

जीरेष त्रिज्याचे बाहेरील शेवटावर लंब आहे ती त्या वर्तुळास स्पर्शरेष आहे

जर अडब सरळ रेष कडु वर्तुळ त्रिज्याचे बाहेरील शेवटावर लंब असेल तर अबरेष वर्तुळास दुस्थळावर स्पर्श मात्र करील



स्पर्शाने दुसऱ्या कोणत्याही बिंदूपासून अबरेषेत वर्तुळ मध्यापर्यंत ईफ करेघ कर अशी किं वर्तुळ परिघास फ स्थळावर छेदील आतां कडु ई त्रिकोणांत (वरसांगीत ल्या प्र०) उ काटकोन आहे याजकरितां (१७ सि० ३ कु० प्र०) ई लघु कोन आहे स्पर्शाने उ कोनाहून उणा आहे परंतु (९ सि० प्र०) अति लोटी बाजू अति लोटे कोनासमोर आहे याजकरितां क ई बाजू कडु बाजूहून लोटी आहे अथवा त्याचे बराबरीचे कफ हून लोटी आहे यापासून निघतें किं ई बिंदू वर्तुळाचे बाहेर आहे आणि याप्रमाणें सर्व दुसरे बिंदू जे अबरेषेवर आहेत ते वर्तुळाचे बाहेर आहेत याजकरितां सगळीरेष वर्तुळाचे बाहेर आहे वर्तुळास दुस्थळावर मात्र स्पर्श करिते

सत्येताळिसावा सिद्धान्त

जेव्हां एक रेघ वर्तुळास स्पर्शमान करित्ये तेव्हां त्या स्पर्श बिंदूपासून वर्तुळमध्य पर्यंत एक त्रिज्या केली ती त्या स्पर्श रेघेवर लंब आहे

जर अब रेघ वर्तुळ परिघास दु बिंदूवर स्पर्श करील तर कटु त्रिज्या अब रेघेवर लंब होईल

सुणोन अब रेघ सर्वांशीं दु बिंदूशिवाय वर्तुळ परिघाचे बाहेर आहे आणि जशी कटु रेघ क मध्य बिंदूपासून अब रेघेवर केली तशा दुसऱ्या सर्वरेषा अब रेघेस लागू यास वर्तुळ परिघाचे बाहेर गेल्या पाहिजेत याज करितां कटु रेघ सर्वांहून लाहान आहे जा क बिंदूपासून अब रेघेवर होताना त्या सर्वांहून याज करितां (२१ सि० प्र०) कटु रेघ अब रेघेवर लंब आहे हे सिद्ध.

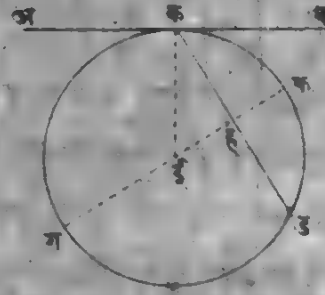
कुरलरी यांनोन उलट निघनें किं जी रेघ वर्तुळ परिघाचे स्पर्श स्थळापासून केली ती वर्तुळमध्य छेदून पार जाईल

अठ्येताळिसावा सिद्धान्त

वर्तुळाची स्पर्शरेषा आणि ज्या या दोन एकत्र मिळून जो अंश त कोन होतो तो त्या ज्या कोनाने अर्धनें मापिला जातो जर

(७८)

नंतर अब रेख वर्तुळाची
स्पर्शरेख असेल आणि कोणती
ही कड ज्या क स्पर्शबिंदूपासून
केली आहे तर बकड कोन कफड
कोसाचे अर्धानें मापिला जातो
आणि अकड कोन कगड कोसा
चे अर्धानें मापिला जातो



संणोन ईक त्रिज्या स्पर्शबिंदूपर्यंत कर आणि ज्या रेखेवर
ह स्यबी ईक त्रिज्या लंब कर

आतां ईक त्रिज्या कड ज्यावर लंब आहे संणोन (४१ सि० प्र०)
ती कफड कोसास दुभागिले याजकरितां कफ कोस कफड
कोसाचें अर्ध आहे

नंतर क ईह या त्रि कोणांत ह काटकोन आहे ते ब्यां (१७ सि०
२ कु० प्र०) बाकी राहिले दुसरे दोन कोन ई आणि क यांची बेरी-
ज एक काटकोना बराबर आहे आणि हे दोन मिळून बक ई कोना ब-
राबर आहेत कारण क ई त्रिज्या स्पर्शरेखेवर लंब आहे आतां या
दोन बरो बरो तून साधारण अवयव जैथवा कोन क जा कर तर ई को-
न बकड कोना बराबर बाकी राहातो परंतु ई कोन (५७ व्या० प्र०)
कफ कोसानें मापिला जातो आणि हा कोस कफड कोसाचे अ-
र्ध बराबर आहे याजकरितां त्याचे बराबर बकड कोन आहे त्यास

निश्चय

(७९)

निश्चय तेंच माप आहे लणजे कडु ज्याचे कफडु कौसाचें अर्ध
हें सिद्ध

पुनः गईफ रेष कडु ज्यावर लंब आहे आणि (१० सि० प्र०)
कगडु कौसास दुभागित्ये याजकरितां कग कौस कगडु कौसा-
चे अर्धा आहे आतां कर्ई रेष फग रेषेस मिकत्ये आणि (६ सि० प्र०)
ई स्थळाचे त्या बाजूचे दोन कोन मिळोन दोन काटकोनां बराबर आ-
हेत आणि कडु रेष अब रेषेस मिळोन क स्थळावर दोन कोन हो-
तात ते दोन काटकोनां बराबर आहेत जर या दोन बराबर बेरिजांतो-
न हे दोन अवयव अथवा कोन कर्ईह आणि बकह जे पूर्वीं बर-
बराबर सिद्ध केले तेवजा केले तर बाकी राहिला कर्ईग कोन बा-
की राहिल्ये अकह कोनाबराबर होईल परंतु कर्ईग कोन (५७
व्या० प्र०) कग कौसांनीं मापिला याजकरितां त्याचे बराबरीचे
अकडु कोनास निश्चित तेंच माप आहे आणि कग कौस कडु
ज्याचे कगडु कौसाचें अर्ध आहे हें सिद्ध .

प्रथम कुरलरी दोन काटकोनाचें माप अर्धा वर्तुळ परिघ
आहे कारण बकडु आणि अकडु हे दोन कोन मिळोन दोन का-
टकोन आहेत आणि त्यांचें माप कफ आणि कग हे दोन कौस
आहेत त्यास हे दोन कौस मिळोन फग व्यासावर अर्धा वर्तुळ
परिघ होतो

दुसरी कुरलरी बापासून कळतें किं एक काटकोनाचें माप
वर्तुळ

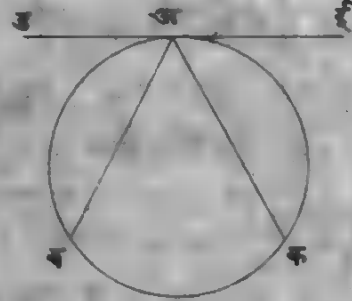
(८०)

वर्तुळ परिघ पाद अथवा ९० अंश आहेत

एकुणपंनासावा सिद्धांत.

परिघ कोनाचें माप कौसाचें अर्ध आहे जो कौस कोन रेषांचे आंत सांपडला आहे.

जर बअक परिघ कोन असेल तर त्याचें माप बक कौसाचें अर्ध आहे जो बक कौस त्याचें आंत आला आहे



सणोन मनांत आण किं दुई स्पर्शरेषा अस्पर्शबिंदू पार केली तर (४८ सि० प्र०) डअक कोनाचें माप अबक कौसाचें अर्ध आहे आणि डअब कोनाचें माप अक कौसाचें अर्ध आहे यांतोन निघतें किं बरो बरींत वजा करून बाकी राहिला बअक कोन बाकी राहिल्ये बक कौसाचे अर्धानें विश्रय मा पतो हें सिद्ध

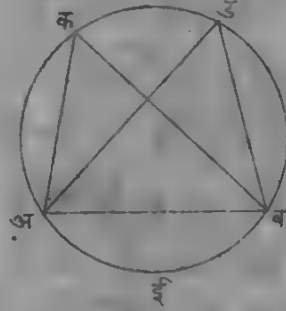
पंनासावा सिद्धांत

एक वर्तुळ खंडांत अथवा वर्तुळाचे एक कौसांत जे कोन आहेत

(८१)

आहेत ते सर्व परस्पर बराबर आहेत

अब ड क एक वर्तुळ खंड
असेल जांत क आणि ड हे दोन
कोन केले अथवा तसेंच अ कोन
आणि ब कोन जे अईब संपूर्ण
कोसांत केले तर क कोन ड कोना
बराबर होईल कारण या दोन को

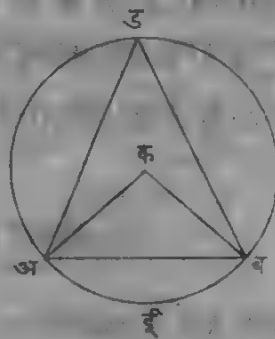


नांचें माप (४९ सि० प्र०) अईब कोसाचें अर्ध आहे आणि त्यांचें
माप बराबर आहे लणोन (११ प्र० प्र०) ते दोनही बराबर आहेत
हें सिद्ध

एकावंनावा सिद्धांत

जर एक वर्तुळांत मध्य कोन आणि परिघ कोन ऐसे दोन एकाच कोसावर आहेत तर मध्य कोन परिघ कोनाचे दुपट आहे

जर कोण त्याही वर्तुळांत क कोन मध्य बिंदूवर असेल आणि ड कोन परिषावर असेल आणि ते दोनही एकच अईब कोसावर अथवा एकच अब ज्यावर असतील तर क कोन ड कोनाचे दुपट



होईल

(८२)

होईल अथवा दु कोन क कोनाचे अर्धा होईल

स्पर्शोन मध्यस्थळींचा दु कोन (५७ व्या० प्र०) सगळ्या अर्धवृत्तां सांगितल्या आणि परिघस्थळींचा दु कोन (४० सि० प्र०) त्याच अर्धवृत्तां सांगितल्या आणि मापिला याज करितां दु कोन क कोनाचे अर्धा अथवा क कोन दु कोनाचे दुपट आहे हे सिद्ध

बावनावा सिद्धांत

अर्धवृत्तांत जे कोन होतात ते सर्व काटकोन होतात

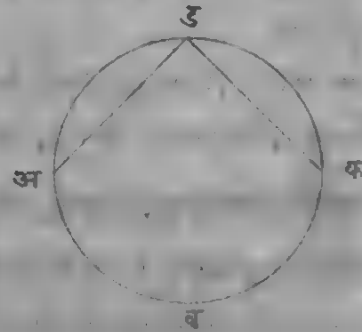
जर अवक अथवा अडक

अर्धवृत्तांत असेल तर त्यातील

कोणताही कोन जसा या अर्धवृत्तांत

दु कोन आहे तो काटकोन

होईल



स्पर्शोन परिघस्थळींचा दु कोन (४० सि० प्र०) अवक कोनाचे अर्धाने मापिला आणि हे अर्धपरिघपाद आहे परंतु (६ सि० ४ कु० प्र०) अथवा (४८ सि० २ कु० प्र०) परिघपाद काटकोनाचे माप आहे याज करितां दु कोन काटकोन आहे हे सिद्ध

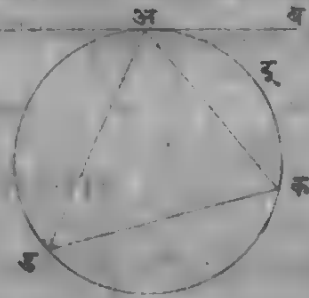
बेपनावा

(८३)

त्रैपंजावा सिद्धान्तः

एक वर्तुळ स्पर्शरेषा आणि स्पर्शस्थळापासून केलेली ज्या
यांपासून जो कोन जाला तो व्युत्क्रम खंडांतील कोनाबराबर आहे

जर अब स्पर्शरेषा असेल
आणि अक ज्या स्पर्शस्थळापासून
न केलेली असेल आणि अड क या
व्युत्क्रम खंडांत कोणता हाड कोन
असेल तर ड कोन ब अक कोना
बराबर होईल



सुणोन परिघस्थळींन्हाड कोन (४० सि० प्र०) अईक
कोसाचे अर्धानें मापिला आणि बअक कोन जो स्पर्शरेषा आ-
णि स्पर्शस्थळापासून केलेली ज्या यांत होतो तो (४० सि० प्र०)
त्याच अईक कोसाचे अर्धानें मापिला याजकरितां (१९ प्र० प्र०)
हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत हे सिद्ध.

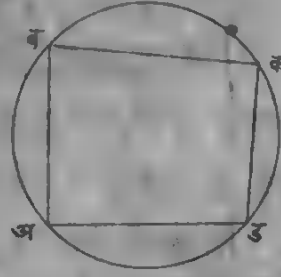
चौपंजावा सिद्धान्तः

वर्तुळांतील कोण त्याही चौवाजूचे समोरासमोरेचे दोन को-
नांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे

अबक

(८४)

अबकड एक चौबाजू वर्तु
ळांत केलें असेल तर अ आणि
क अथवा ब आणि ड या समोरा
समोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन
काटकोनां बराबर होईल



ह्मणोन अ कोन (४९सि० प्र०) ड क ब कौसाचे अर्धानें मापि-
ला आणि क कोन ड अ ब कौसाचे अर्धानें मापिला याजकरितां अ
कोन आणि क कोन यांची बेरीज या दोन कौसांचे बेरिजेचे अर्धानें
मापिली जात्ये हें बेरिजेचें अर्ध अर्धपरिघ आहे परंतु (६सि०
४ कु० प्र०) अर्धपरिघ दोन काट कोनाचें माप आहे याजकरितां
अ आणि क या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काट को-
नां बराबर आहे याचप्रमाणें दारबविलें जातें किं ड आणि ब या
समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काट कोनां बराबर आहे
हें सिद्ध

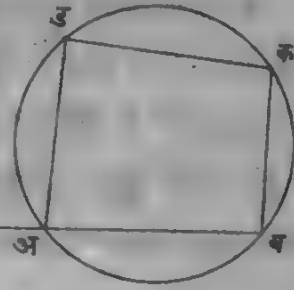
पंचावंनावा सिद्धांत

वर्तुळांत एक चौबाजू असेल आणि त्याची कोणतीही
एक बाजू वाढविली असतां बाहेर कोन होईल तो चौबाजूचे आं-
तित्वा

(८५)

तिलाचे समोरचे कोनाबराबर होईल

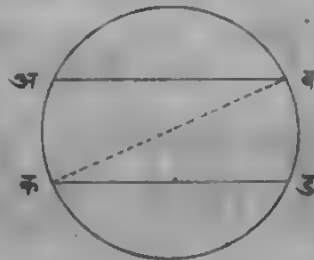
जर अबकड चौबाजू ए
क वर्तुळांत असेल जाची एक बा
जू अब ई पर्यंत वाढविली तर
बाहेरील दुअई कोन आंतिला ई
चे समोरचे क कोनाबराबर होईल



सुणोन (६सि० प्र०) दुअई आणि दुअब याजवळचे
दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे आणि (५४सि०
प्र०) क आणि दुअब यासमोरा समोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन
काटकोनां बराबर आहे याजकरितां या दोन बरोबर्यांतून साधारण
दुअब कोन वजा केला तर बाकी राहिला क कोन बाकी राहिल्ये दुअ
ई कोना बराबर आहे हे सिद्ध

उष्पंनावा सिद्धांत

एक वर्तुळांत कोणत्याही दोन समांतर ज्या केल्या तर त्यांचे
अंतरांतील कौस बराबर आहेत
अब आणि कड या दोन
समांतर ज्या असतील तर अक
बड हे दोन कौस परस्पर बराबर
होतील सुणजे अक = बड



सुणोन

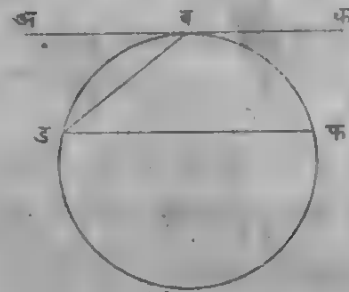
(८६)

सुणोन बक रेष कर आतां अब कड रेषा परस्पर समांतर
आहेत याज करितां (१२ सि० प्र०) दोन व्युत्क्रम कोन ब आणि क
हे परस्पर बराबर आहेत परंतु परिघस्थ बींचा ब कोन (४९ सि० प्र०)
अक कोसाचे अर्धानें मापिला जातो तसें परिघस्थ बींचा दुसरा
क कोन बडु कोसाचे अर्धानें मापिला जातो सुणोन अर्धा अक
कोस बडु कोसाचे अर्धा बरोबर आहे तेव्हां सगळा अक सगळ्या
बडु चे बराबर आहे हें सिद्ध

सत्तावंना वा सिद्धांत

जेव्हां स्पर्शरेष आणि त्याचवर्तुळांतील ज्या त्या परस्पर स-
मांतर आहेत तेव्हां त्यांचे अंतरांतील कोस परस्पर बराबर आ-
हेत

अबक स्पर्शरेष त्याच व
र्तुळांतील डफ ज्याशीं समांतर
असेल तर बडु वफ हे दोन को-
स परस्पर बरोबर होतील सुणजे
बडु = वफ



सुणोन स्पर्शस्थळापासून ज्याचे शेवटा पर्यंत दुसरी बडु
ज्याकर आतां अक डफ या दोन रेषा परस्पर समांतर आहेत
तेव्हां

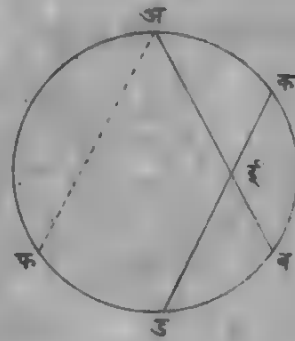
(८७)

तेव्हां (१२सि०प्र०) डु आणि ब हे दोन व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर आहेत परंतु स्पर्शरेष आणि ज्या यांपासून जाळे ला ब कोन (४८सि०प्र०) बडु कौसाचे अर्धानें मापिला जातो आणि तसा प-
रिघस्य कींवाच दुसरा डु कोन (४९सि०प्र०) बफ कौसाचे अर्ध-
नें मापिला जातो सणोन अर्धा बडु अर्धे बफ चे बराबर आहे
याजकरितां सगळा बडु सगळ्ये बफ चे बराबर आहे हें सिद्ध

अष्टावंनावा सिद्धान्त

एक वर्तुळांत दोन ज्या परस्पर छेदितात त्यापासून जो को-
न होतो तो त्या दोन ज्यांचे अंतर कौसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिला
जातो

अब कडु या दोन ज्या व
वर्तुळांत ई स्थळावर परस्पर छेदि-
तात तर अईक कोन अथवा
डईब कोन अक डब या दोन
कौसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापि-
लां जातो



सणोन अफ ज्या कडु ज्या शीं समांतर कर आतां अफ
कडु या दोन ज्या समांतर आहेत आणि अब रेष या दोन समा-
तर

(८८)

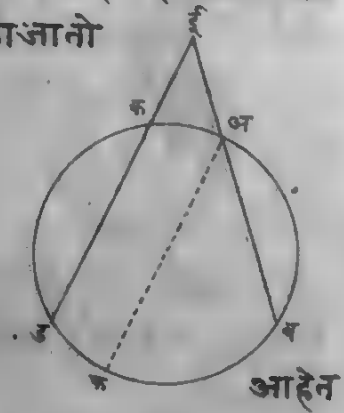
तर रेखांस छेदित्ये याजकरितां (१४सि० प्र०) अ आणि डईब हे दोन कोन एक बाजूवर आहेत ते परस्पर बराबर परंतु परिघस्थ-
 चीन्हा अ कोन (४९सि० प्र०) बफ कौस लणजे फड आणि बड
 यांची बेरीज त्याचे अर्धानें मापिला जातो लणोन याचे बराबरी-
 चा ई कोनही फड आणि बड यांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिला जातो

पुनः अफ कड या दोन ज्या परस्पर समांतर आहेत या-
 जकरितां (५६सि० प्र०) अक फड हे कौस परस्पर बराबर आ-
 हेत लणोन अक डब या दोन कौसांची बेरीज फड डब या दो-
 न कौसांचे बेरिजेचे बराबर आहे याजकरितां जेव्हां ई कोन शेव-
 टील बेरिजेचे अर्धा बराबर आहे तेव्हां प्रथम बेरिजेचे अर्धा ब-
 राबर आहे हें सिद्ध

एकुणसाठावा सिद्धांत

जो कोन दोन छेदनरेषांपासून वर्तुळाचे बाहेर होतो तो दोन
 अंतर कौसांचे वजावा कीचे अर्धानें मापिला जातो

कोणताही ई कोन ईअब
 आणि ईकड या दोन छेदनरेषां
 पासून वर्तुळाचे बाहेर जाला अ
 सेल तर तो कोन अक डब हे दो-
 न कौस जे दोन छेदन रेषांचे आंत



(८९)

आहेत त्यांचे वजा बाकीचे अर्धानें मापिला जातो

सणोन ईकड रेषेशीं समांतर अफ ज्या कर आतां ईड अफ या दोन रेषा समांतर आहेत आणि ईब रेष त्यांस छेदित्ये याजकरितां (१४सि०प्र०) अ कोन आणि बईड कोन हे एक वाजूचे दोनही परस्पर बराबर आहेत परंतु परिघ स्थळीं ना अ कोन (४९सि०प्र०) बफ अथवां डब डफ यांची वजा बाकी याचे अर्धानें मापिला जातो सणोन ई कोनही डब डफ यांचे वजा बाकीचे अर्धानें मापिला जातो

पुनः अफ कड या दोन ज्या परस्पर समांतर आहेत याजकरितां (५६सि०प्र०) कअ डफ हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत सणोन कअ डब यांची वजा बाकी डब डफ यांचे वजा बाकीचे बराबर आहे याजकरितां जेव्हां ई कोन शेवटील वजा बाकीचे अर्धा बराबर आहे तेव्हां प्रथम वजा बाकीचे अर्धा बराबर आहेच हें सिद्ध

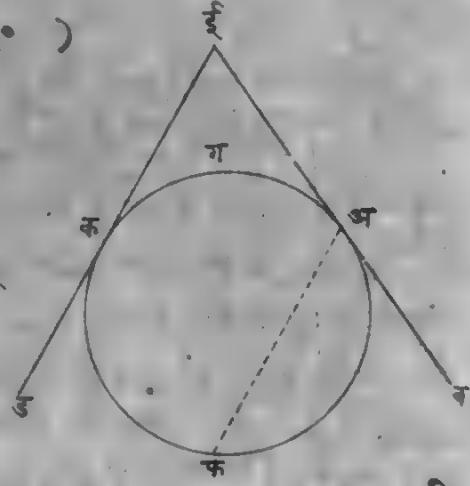
साठा वा सिद्धांत

जो कोन दोन स्पर्शरेषांनीं होतो तो त्यांचे दोन अंतर कोसांचे वजा बाकीचे अर्धानें मापिला जातो

कोण तेही

(९०)

कोणत्येही वर्तुळास अ
आणि क या बिंदूवर ईब आणि
ईड या दोन स्पर्शरेषा असतील
तर ई कोन जो या स्पर्शरेषापासून
न जाता तो कफअ कगअ
या दोन कोनांचे वजाबाकीचे अ
र्धानें मापिला जातो

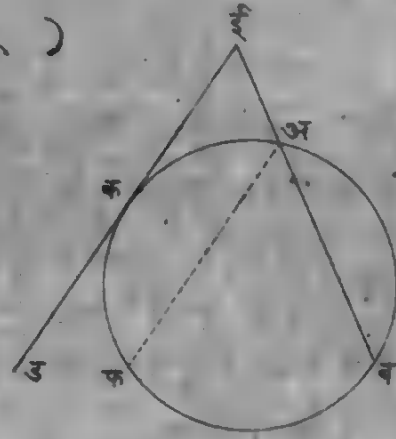


खणोन अफ ज्या ईड शीं समांतर कर आतां अफ ईड
या दोन समांतररेषा आहेत आणि ईब त्यांस छेदित्ये याज करि-
तां (१४ सि० प्र०) एक बाजूचे अ आणि ई हे दोन कोन परस्पर ब-
राबर आहेत परंतु अ कोन जो अफ ज्या आणि अब स्पर्शरेषा
यांपासून होतो तो (४८ सि० प्र०) अफ कोनाचे अर्धानें मापिला जा-
तो याज करितां त्याचे बराबर जो ई कोन तोही त्या अफ कोनाचे
अर्धानेंच मापिला जातो खणोन अफ कोस कफअ आणि कफ
अथवा (५७ सि० प्र०) त्याचे बराबरीचा कगअ यांचे वजाबाकी-
चे बराबर आहे याज करितां ई कोन कफअ आणि कगअ या
दोन कोनांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो हें सिद्ध

कुरलरी

(९१)

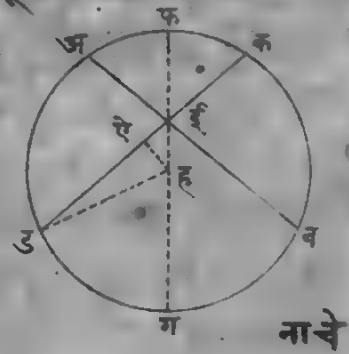
कुरलरी या शीती वरून
सिद्ध होतें कीं ई कोन जो ई कड
स्पर्शरेष आणि ईअब छेदन
रेष यांपासून होतो तो कअ आ
णि कफब या दोन अंतर कोसां
चे वजावाकीचे अर्धानें मापिला
जातो



एकसष्टावा सिद्धान्त

जे व्हां दोनरेषा वर्तुळपरिघास प्रत्येकीं दोनस्थळांवर मि
ळतात आणि याच दोनरेषा वर्तुळाचे आंत अथवा बाहेर परस्प
र छेदितान तर एकीचे अवयवांचा काटकोन चौकोन दुसरीचे
अवयवांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे आणि हे अवयव
रेषांचे संयोग बिंदूपासून परिघस्थळ बिंदूपर्यंत मोजितात

अब कड या दोनरेषा असतील
त्या ई स्थळावर परस्पर छेदितान आणि
प्रत्येकीं वर्तुळपरिघास दोनस्थळांवर
मिळतान तर अई ईब यांचा काटकोन
चौकोन कई ईड यांचे काटकोन चौको

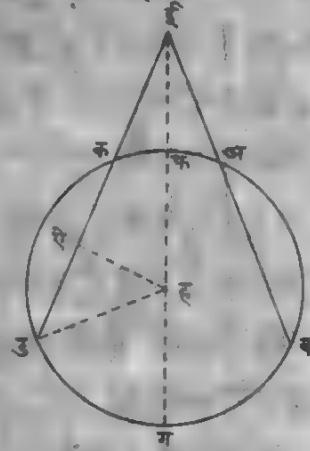


नाचे

(१२)

नाचे बराबर आहे सणजे अई. ईब = कई. ईड

सणोन ई बिंदू छेदून फग व्यासकर आणि ह वर्तुळ मध्या पासून दुह बिज्या कर आणि कड वर ह ऐ लंब कर आतां दुईह बि कोण आहे आणि (४१ सि. प्र०) ह ऐ लंब कड ज्यास दुभागितो याज करितां कई रेघ दु ऐ ई ऐ या दोन खंडांचे वजा बाकी बराबर



आहे आणि या दोन खंडांची बेरीज दुई रेघ आहे पुनः ह वर्तुळ मध्य आहे आणि दुह फह गह या सर्व बिज्या परस्पर बराबर आहेत याज करितां ईग रेघ दुह हई या दोन बाजूंचे बेरिजे बराबर आहे आणि ईफ रेघ त्या दोन बाजूंचे वजा बाकीचे बराबर आहे

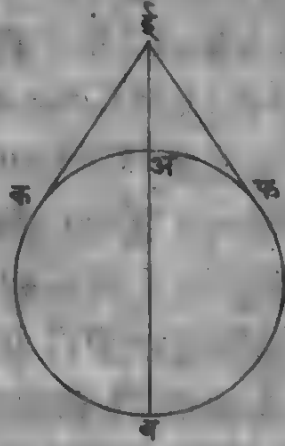
परंतु (३५ सि. कु. प्र०) काट कोन चौ कोन कोण त्याही बि कोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजा बाकी यांत होतो तो पा याचे खंडांची बेरीज आणि वजा बाकी यांत जो काट कोन चौ कोन होतो त्याचे बराबर आहे याज करितां फई ईग यांत जो काट कोन चौ कोन होतो तो कई ईड यांत जो काट कोन चौ कोन होतो त्याचे बराबर आहे या रीतीने ही सिद्ध होते किं फई ईग यांत

ओ

(९२)

जो काट कोन चौ कोन हो तो अई ईब यांत जो काट कोन चौ को-
न हो तो त्याचे बराबर आहे याज करितां (१प्र० प्र०) अई ईब यां-
चा काट कोन चौ कोन कई ईडु यांचे काट कोन चौ कोनाचे बराबर
आहे हें सिद्ध

प्रथम कुरलरी जेव्हां जसें
दुसरें आकृतींत दुई ही एक रेष
ई बिंदूवर फिरून ईक अथवा
ईडु स्पर्शरेष स्थळीं येत्ये अशी
किं क आणि ड हे दोन ही बिंदू
एकत्र होतात तर कई ईडु काट
कोन चौ कोन कई चा वर्ग होतो
कारण कई आणि ड ई बराबर आल्या याज करितां छेदन रेषे-
चे अवयवांतील काट कोन चौ कोन अई ईब हा स्पर्शरेषेचे वर्ग
बराबर आहे म्हणजे कई

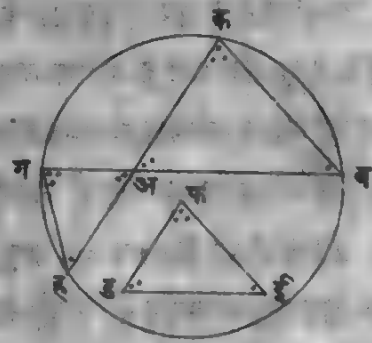


दुसरी कुरलरी यांतून निघतें किं ईक ईफ या दोन स्पर्श
रेषा एकच ई बिंदूपासून वर्तुळास केल्या त्या परस्पर बराबर
आहेत कारण या दोहोंचे वर्ग प्रत्येकीं अई ईब यांचे काट कोन
चौ कोनाचे बराबर आहेत

बासष्टावा सिद्धांत

सम कोन त्रिकोणांत समप्रमाण बाजूंचे अनुक्रमें जे काट कोन चौकोन होतात ते परस्पर बराबर आहेत .

अब क डईफ हे दोन सम कोन त्रिकोण असतील जांत अ कोन ड कोना बराबर आणि ब कोन ई कोना बराबर आणि क कोन फ कोना बराबर आहे आणि यांचा समप्रमाण बाजू



अब डई या क फ या सम कोनांसमोर आहेत आणि अ क ड फ या समप्रमाण बाजू ब ई या सम कोनांसमोर आहेत तर अब ड फ यांचा काट कोन चौकोन अ क डई यांचे काट कोन चौकोनाचे बराबर होईल

आतां अब रेष वाढीव आणि अ ग ड फ चे बराबर कर आणि ब क ग हे तीन बिंदू छेदून पार एक वक्र ग ह वरतुळकर असें किं क अ रेष वाढवून ह बिंदू परिघावर येईल असें कर नंतर ग ह सांध

आतां ग कोन आणि क कोन जे दोनही बहु कोनाबर आहेत ते (५० सि० प्र०) परस्पर बराबर तसें ह कोन आणि ब कोन

जे

(९५)

जे दोन ही एकच कोसावर आहेत तेही याच प्रमाणें परस्पर बरा-
 वर आणि (७सि०प्र०) अस्पृष्टावरील समोरासमोरचे कोन प-
 रस्पर बराबर आहेत याजकरितां अगह त्रिकोण अबक त्रिको-
 णाशीं समकोन आणि याजवरूनच डफई त्रिकोणाशींही सम-
 कोन आहे परंतु अग डफ या दोन बाजू (परसांगीतल्याप्रमाणें)
 परस्पर बराबर आहेत याजकरितां (२सि०प्र०) अगह डफई
 हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि एकाचा दोन बाजू अग
 अह दुसऱ्याचे डफ डई या दोन बाजूंचे बराबर आहेत
 परंतु (६१सि०प्र०) गअ० अब हा काटकोनचौ कोन
 हअ० अक या काटकोनचौ कोनाचे बराबर याजकरितां डफ०
 अब हा काटकोनचौ कोन डई० अक या काटकोनचौ कोना बरा-
 वर आहे हे सिद्ध

त्रेसष्टावा सिद्धांत

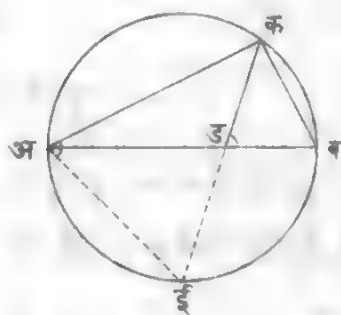
कोण त्याही त्रिकोणाचे दोन बाजूंचा काटकोनचौ कोन त्या-
 च त्रिकोणाचे बाहेरील वर्तुळाचा व्यास आणि तिसर्या बाजूवर
 समोरील कोनापासून लंब यांचे काटकोनचौ कोनाचे बराबर आ-
 हे

कोण त्याही अबक त्रिकोणाचे बाहेर वर्तुळ असेल जाणा
 व्यास

चौसष्टावा सिद्धांत

जीरेघ त्रिकोणाचा कोणताही कोन दुभागिले त्यारेघेचा वर्ग आणि त्यारेघेने दुभागिले बाजूचे दोन खंडांचा काटकोन चौकोन यांची बेरीज दुभागिले कोनाचे दोहोंकडील राहिले दोन बाजूचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

अब क त्रि कोण अ से ल
जा चा क कोन क ड रे घ नें दु भा गि
ला आ हे तर क ड + अ ड • ड ब
हा का ट कोन चौ कोन = अ क • क ब
हा का ट कोन चौ कोन आ हे



लणोन त्रिकोणाचे बाहेर वर्तुळ करून कड रेघ परिघावर ई
पर्यंत वाढीव आणि अर्द्ध सांध

आतां अकई बकड या दोन त्रिकोणांत अकड बकड हे दोन कोन (बरसांगी तले प्र०) बरोबर आणि अबक अईक हे दोन कोन जे अक कोसावर आहेत ते (५० सि० प्र०) परस्पर बराबर आहेत या जकरितां कअई कडब हे तिसरेही दोन कोन (१७ सि० १ कु० प्र०) बराबर आणि अक कड आणि कई कब या समप्रमाण बाजू आहेत कारण बरोबर कोनाचे समोर आहेत या जकरितां (६२ सि० प्र०) अक • कब या काट कोन चौकोनाचे =

कडु

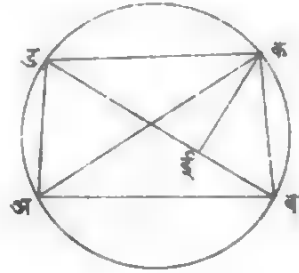
(९८)

कड० क ई हा काट कोन चौ कोन आहे परंतु (३० सि० प्र०) कड०
क ई याचे = कड० + कड० उ ई हा काट कोन चौ कोन आहे याज-
करितां अक० क ब या काट कोन चौ कोनाचे ही = कड० + कड०
उ ई अथवा कड० + अड० उ ब हा आहे कारण (६१ सि० प्र०)
कड० उ ई याचे = अड० उ ब हा आहे हे सिद्ध

पांसष्टावा सिद्धांत

वर्तुळांतील चौ कोनाचे दोन कर्णांचा काट कोन चौ कोन समोरा-
समोरचे दोन दोन बाजूचे दोन काट कोन चौ कोनांचे बेरिजे बराबर
आहे

वर्तुळांत एक अबकड चौ
बाजू असलेल्या कर्णरेषा अक
आणि बड यांचा अक० बड या
काट कोन चौ कोनाचे = अब० डक
हा काट कोन चौ कोन + अड० बक
हा काट कोन चौ कोन आहे



सणोन क ई रेषा कर अशी किं ब क ई कोन ड क अ कोना बरा ब-
र होईल आतां अकड आणि बक ई हे दोन त्रिकोण सम कोन आहे-
त कारण अ आणि ब हे दोन कोन ड क कौ सावर आहेत ते परस्पर
बराबर

बराबर आणि डकअ बकई हे दोन कोन (बरसांगीतल्या०) बराबर याज करितां त्यांचे तिसरे अडक बईक हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत आणि अक बक आणि अड बई या समप्रमाण बाजू आहेत कारण समकोनांचे समोर आहेत याज करितां (६२ सि० प्र०) अक० बई या काटकोन चौकोनाचे = अड० बक हा काटकोन चौकोन आहे

पुनः अबक डईक हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत कारण बअक बडक हे दोन कोन बक कौसावर आहेत ते परस्पर बराबर आणि डकई बकअ हे दोन कोन साधारण अकई कोन मिळविल्यामुळे परस्पर बराबर आहेत याज करितां यांचे तिसरेही डई आणि अबक हे दोन कोन परस्पर बराबर परंतु अक डक आणि अब डई या समप्रमाण बाजू आहेत याज करितां अक० डई हा काटकोन चौकोन (६२ सि० प्र०) अब० डक या काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

ग्रातून निघतें किं बरोबर मिळवणीनें या काटकोन चौकोनांची बेराज अक० बई + अक० डई याचे = अड० बक + अब० डक हा ही आहे परंतु (१० सि० प्र०) पूर्वदोन काटकोन चौकोनाचे = अक० बई + अक० डई = अक० बड याज करितां अक० बड हा काटकोन चौकोन (१ प्र० प्र०) अड० बक + अब० डक या शोबटील बेराजे बराबर आहे हें सिद्ध



(१००)

गुणोत्तर आणि प्रमाण व्याख्या

७६ जें एक पद त्याच जातीचे दुसर्हे पदास वेळा संख्ये करून प्रमाण आहे त्या वेळा संख्यांकास गुणोत्तर म्हणतात

टीप दोन संख्यांचे युग्मांत अग्रसराचे बराबरीचे उपाग्रसराचे जिनके भाग होतात तें गुणोत्तराचें माप आहे जसें कोणतेंही पद २ दोन या संख्येनें दाखविलें याचें गुणोत्तर त्याच जातीचें दुसरें पद ६ साहा या संख्येनें दाखविलें याचे संगतीं जें होतें तें या प्रमाणें दाखविलें जातें किं ६ भागिले २ दो होनी अथवा $\frac{६}{२} = ३$ म्हणजे २ दोन ६ साहांमध्ये तीन वेळा जातात अथवा त्यांच्या तिसरा भाग आहे या सारखें ३ या पदाचें ६ या समजाति पदा संगतीं गुणोत्तर यारीतीनें मापिलें जातें किं $\frac{६}{३} = २$ ४ या पदाचें ६ या समजाती पदा संगतीं गुणोत्तर $\frac{६}{४} = १\frac{१}{२}$

६ याचें ४ या समजाती संगतीं गुणोत्तर $\frac{४}{६} = \frac{२}{३}$ या प्रमाणें पुढें ही जाणावें

७७ जांचें गुणोत्तर बराबर आहे तीं पदे प्रमाणांत आहेत

७८ तीन पदे परस्पर प्रमाणांत आहेत जेव्हां मध्यमाचें गुणोत्तर दुसर्घा संगतीं आहे त्याचे बरोबर दुसर्घाचें गुणोत्तर तिसर्घा संगतीं आहे जसें या तीन पदांमध्ये अ (२) ब (४) क (८)

यांत

(१०१)

यांत $\frac{५}{१} = \frac{५}{१} = ५$ स्वर जे या दोनही युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे
 ७९ चारपदे परस्पर प्रमाणांत आहेत जेव्हां प्रथमाचें गुणोत्तर दुसर्वा
 संगतीं आहे त्याचें बरोबर तिसर्याचें गुणोत्तर चौथ्यासंगतीं आहे असें
 या चारपदांमध्ये अ (२) ब (४) क (५) ड (१०) यांत $\frac{५}{१} = \frac{१०}{२} = ५$ या
 दोनही युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे

टीप. चारपदे परस्पर प्रमाणांत आहेत असें अ ब क ड
 तर त्यांस या प्रमाणें लिहितात जसा अ : ब :: क : ड आणि
 या प्रमाणें उच्चारितात असें अ ब यास होतो तसा क ड यास
 होतो परंतु जेव्हां तीनपदे परस्पर प्रमाणांत आहेत तेव्हां मधील पद
 लिहिण्याचे व उच्चारण्याचे रीतींत दोनवेळ येतें जसा अ : ब ::
 ब : क जसा अ ब यास होतो तसा ब क यास होतो

८० प्रमाणांत तीनपदे असतील तर मध्यापद आद्यंतपदांचें म-
 ध्यप्रमाण आहे आणि अंतपद प्रथम आणि दुसरें यांचें तिसरें प्र-
 माण स्वरुपात

८१ प्रमाणांत चारपदे असतील तर अंतपद अनुक्रमानें दुसरे
 तीनपदांचें चतुःप्रमाण स्वरुपात

८२ कित्येक पदे आहेत त्यांत जर जवळजवळचे पदांचें गुणोत्तर
 बराबर आहे तर तीं पदे अखंड प्रमाणांत आहेत असें स्वरुपात
 असें पहिलें दुसर्वास तसें दुसरें तिसर्वास तिसरें चौथ्यास या प्र-
 माणां पुढेही या सर्वांचें गुणोत्तर बराबर आहे

आणि

(१०९)

आणि जसें यासंख्यांमध्ये १. २. ४. ८. १६ इत्यादि यांत गुणोत्तर २ आहेत याजकरितां हीं सर्वपदे अस्वउच्चारणान्त आहेत ८३ जीं कित्येक पदे आहेत त्यांत आद्यंतांचें गुणोत्तर त्यापदांचे गुणोत्तरांचे गुणाकारा बराबर आहे त्यास संयुक्त गुणोत्तर स्पर्शिते त जसें अ ब क ड यांत आदि अ याचीं अंतःड यांचे संगतीं जें गुणोत्तर आहे तें अ आणि ब यांचे गुणोत्तरानें गुणिलें ब क यांचें गुणोत्तर तें पुनः क ड यांचे गुणोत्तरानें गुणिलें वा गुणाकाराचे बराबर आहे जसें १. २. ४. ८. यांत ८ हें संयुक्त गुणोत्तर आहे

८४ जेव्हां प्रमाण पदांत अग्रसरास उपाग्रसर केला आणि उपाग्रसरस अग्रसर केला तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास व्यस्त गुणोत्तर स्पर्शिते त जसें जर १ : २ :: ३ : ६ तर व्यस्तानें २ : १ :: ६ : ३

८५ जेव्हां अग्रसरा संगतीं अग्रसर आणि उपाग्रसरस संगतीं उपाग्रसर अशरीतीनें पदे मिळवितात तेव्हां त्यास परावर्तन प्रमाण स्पर्शिते त जर १ : २ :: ३ : ६ तर परावर्तनानें १ : ३ :: २ : ६

८६ जेव्हां अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची वेरीज अग्रसरा संगतीं अथवा उपाग्रसरस संगतीं मिळवितात तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास मिश्रगुणोत्तर स्पर्शिते त जसें जर १ : २ :: ३ : ६ तर मिश्रणानें

१ + २ : १ :: ३ + ६ : ३ आणि १ + २ : २ :: ३ + ६ : ६

८७ जेव्हां अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची वजा बाकी अग्रसरा संगतीं

(१०३)

गातीं अथवा उपाग्रसरा संगतीं मिळवितात तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास भक्त गुणोत्तर म्हणतात जसें जर १ : २ :: ३ : ६ तर भागाकारानें २-१ : २ :: ६-३ : ३ आणि २-१ : २ :: ६-३ : ६

टीप या व्याख्येंत भक्त आणि भागाकार या शब्दांचा अर्थ हा आहे कीं वजाबाकी किंवा भागणें शायशब्दे व्याख्येंत मिळवण्याचा प्रकार आहे त्याची उलट वजाबाकी एथे अर्थ होय

सासष्टावा सिद्धांत

कोणत्याही दोन संख्या आणि त्या संख्यांचे समगुणाकार यांचें गुणोत्तर बराबर आहे

अ आणि ब या दोन संख्या आणि त्यांचे समगुणाकार मअ आणि मब असतील म्हणजे म कोणतीही संख्या असेल तर मअ आणि मब यांचें गुणोत्तर अ आणि ब यांचे गुणोत्तरा बराबर होईल अथवा अ : ब :: मअ : मब कारण $\frac{मब}{मअ} = \frac{ब}{अ}$ या दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे हें सिद्ध

कुरलरी यांतोन मिळतें किं कोणत्याही संख्यांचे सारिखे अवयवांचें आणि त्या अवयवांसहित पूर्ण संख्यांचें गुणोत्तर बराबर आहे कारण पूर्णसंख्या त्या सारिखे अवयवांचा समगुणाकार आहे म्हणून अ आणि ब हे मअ आणि मब यांचे सारिखे अवयव आहेत

सप्तसष्टावा

(१०४)

सतसष्टावा सिद्धांत

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं परावर्तनेंही प्रमाणांत होतील अथवा दोन अग्रसरांचें गुणोत्तर दोन उपाग्रसरांचें गुणोत्तराबराबर होईल

जर अ : ब :: मअ : मब असेल तर अ : मअ :: ब : मब होईल

कारण $\frac{मअ}{अ} = म$ आणि $\frac{मब}{ब} = म$ हे दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे

अडसष्टावा सिद्धांत

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं व्यस्तानेंही प्रमाणांत होतील

जर अ : ब :: मअ : मब होईल तर ब : अ :: मब : मअ होईल

कारण $\frac{मअ}{मब} = \frac{अ}{ब}$ हे दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे

एकुणहत्तरावा सिद्धांत

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं मिश्रणानें आणि भागाकारानें

(१०५)

भागाकारानें ही प्रमाणांत होतील

जर अ : ब :: मअ : मब

तर ब ± अ : अ :: मब ± मअ : मअ

ब ± अ : ब :: मब ± मअ : मब

कारण $\frac{मअ}{मब \pm मअ} = \frac{अ}{ब \pm अ}$ आणि $\frac{मब}{मब \pm मअ} = \frac{ब}{ब \pm अ}$

कुरलरी यांतून दिसतें किं जेव्हां एक जातीचीं चारपदे प्रमाणांत आहेत तेव्हां अति लोटे आणि अतिलाहान या दोन पदांची बेरीज दोन मध्यपदांचे बेरिजेहून अधिक आहे म्हणोन अ : अ + ब :: मअ : मअ + मब यापदांत अतिलाहान पद अ आणि अति लोटे मअ + मब आहे तेव्हां अ + मअ + मब = १ + म० अ + मब ही बेरीज अतिलाहान आणि अति लोटे या दोन पदांची अ + ब + मअ = १ + म० अ + ब या दोन मध्यपदांचे बेरिजेहून अधिक आहे हे सिद्ध

सत्तरावा सिद्धांत

जर चारपदे प्रमाणांत आहेत तर त्यांचे अग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार आणि उपाग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार केले तर तेही प्रमाणांत होतील

जर अ : ब :: मअ : मब असेल आणि पअ पमअ
हे दोन

(१०६)

हे दोन अग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार असतील तसे कब
कमब हे उपाग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार असतील

तर पअ : कब :: पमअ : कमब

कारण $\frac{\text{कमब}}{\text{पमअ}} = \frac{\text{कब}}{\text{पअ}}$ हे दोहोंचे गुणोत्तर बराबर हे सिद्ध

एका हात्तरावा सिद्धांत

जर चारपदे प्रमाणांत आहेत आणि त्यांचे दोन उपाग्रस-
रांत कोणतीही दोनपदे मिळविलीं अथवा वजा केलीं परंतु त्या
दोन पदांचे गुणोत्तर अग्रसरांचे गुणोत्तरा बराबर असावे तरी
ही ती प्रमाणांत होतील

जर अ : ब :: मअ : मब असेल आणि नअ नमअ
ही कोणतीही दोनपदे असतील जांचे गुणोत्तर दोन अग्रसरांचे
गुणोत्तरा बराबर आहे

तर अ : ब ± नअ :: मअ : मब ± नमअ

कारण $\frac{\text{मब} \pm \text{नमअ}}{\text{मअ}} = \frac{\text{ब} \pm \text{नअ}}{\text{अ}}$ हे दोहोंचे गुणोत्तर बराबर हे सिद्ध

(१०४)

बाहान्नरावा सिद्धांत

जर कोणती कितीही पदे प्रमाणांत आहेत तर त्यांतील को-
जत्येही घुग्मांचा अग्रसर त्याच घुग्मांतील उपाग्रसरास होतो तशी
त्यापदांतील सर्व अग्रसरांची बेरीज त्यांतील सर्व उपाग्रसरांचे बेरी-
जेस होईल

जर अ : ब :: मअ : मब :: नअ : नब इत्यादि

तर अ : ब :: अ + मअ + नअ :: ब + मब + नब

कारण $\frac{ब + मब + नब}{अ + मअ + नअ} = \frac{१ + म + न \cdot ब}{१ + म + न \cdot अ} = \frac{ब}{अ}$ हे दोहोंचे गुणोत्तर बराब-
र हे सिद्ध

त्रेहान्नरावा सिद्धांत

जर दोन अखंड पदे आणि त्यांचे दोन तुकडे यांचे गुणोत्तर
बराबर आहे तर त्या अखंडांशी त्यांचे तुकडयांची वजाबाकी ही
प्रमाणांत होईल अशी अखंड पदे आहेत

जर अ : ब :: $\frac{म}{न}$ अ : $\frac{म}{न}$ ब

तर अ : ब :: अ - $\frac{म}{न}$ अ : ब - $\frac{म}{न}$ ब

कारण $\frac{ब - \frac{म}{न} ब}{अ - \frac{म}{न} अ} = \frac{१ - \frac{म}{न} \cdot ब}{१ - \frac{म}{न} \cdot अ} = \frac{ब}{अ}$ हे दोहोंचे गुणोत्तर बराबर
हे सिद्ध

(१०८)

चौथा हात्तरावा सिद्धांत

जर कोणतीही पदे प्रमाणांत आहेत तर त्यांचे वर्गघनादिक
अथवा वर्गघनादि मूलही प्रमाणांत होईल

जर अ : ब :: मअ : मब तर अ : ब :: मअ : मब

कारण $\frac{मब}{मअ} = \frac{ब}{अ}$ हे दोहोंचे गुणोत्तर बराबर आहे हे सिद्ध

पंचे हात्तरावा सिद्धांत

जर दोन संज्ञे प्रमाणांत आहेत तर कमाले समोरासमोरचे प-
दांचे गुणकार अथवा काढकोन चौकोनही प्रमाणांत होतील

जर अ : ब :: मअ : मब

आणि क : ड :: नक : नड

तर अक : बड :: मनअक : मनबड

कारण $\frac{मनबड}{मनअक} = \frac{बड}{अक}$ हे दोहोंचे गुणोत्तर बराबर हे सिद्ध

शा हात्तरावा

(१०९)

शा हात्तरावा सिद्धांत

जर चारपदे प्रमाणांत आहेत तर आयंतपदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन दोन मध्यपदांचे गुणाकाराचे अथवा काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

जर $अ : ब :: मअ : मब$

तर $अ \times मब = ब \times मअ = अमब$ बराबर हें सिद्ध

सत्या हात्तरावा सिद्धांत

जर तीन पदे अखंड प्रमाणांत असतील तर आयंत पदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन मध्यपदांचे वर्ग बरोबर होईल

जर $अ मअ मेअ$ हीं तीन पदे अखंड प्रमाणांत असतील

अथवा $अ : मअ :: मअ : मेअ$

तर $अ \times मेअ = मेअ$ बराबर हें सिद्ध

अठ्या हात्तरावा

(११०)

अठ्येहान्नरावा सिद्धांत

जर किती एक पदे अखंड प्रमाणांत आहेत तर पहिलें आणि तिसरें यांचें गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचें गुणोत्तराचे बराबरा होईल आणि पहिलें आणि चौथें यांचें गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचें गुणोत्तराचे बराबरा होईल या प्रमाणें पुढें ही

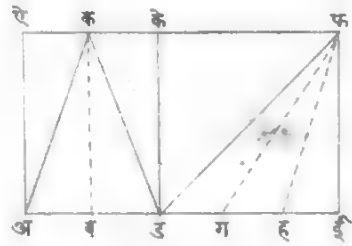
जर अ, मअ, मेअ, मेअ, इत्यादिक पदे अखंड प्रमाणांत असतील

तर $\frac{मअ}{अ} = म$ परंतु $\frac{मेअ}{अ} = मे$ आणि $\frac{मेअ}{अ} = मे$ इत्यादिक

एकुणऐशीवा सिद्धांत

त्रिकोण आणि समांतर बाजू चौकोन जांची उंची बराबर आहे ते परस्परांस प्रमाण आहेत जसे त्यांचे पाये

अडक डईफ हे दोन त्रिकोण बराबर उंचीचे अथवा अई रेफ या दोन समांतर रेषांमध्ये असतील तर अडक या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ डईफ या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळास तसें प्रमाण होईल



जसे

(१११)

जसें अड पाया डई पायास आहे अथवा जसा अड : डई ::

अडक त्रिकोण : डईफ त्रिकोणास

स्त्रणोन या आकृतींत अड पाया डई पायास असावा जशी
 भलती संख्या म (२) दुसऱ्ये भलत्ये न (३) या संख्येस होत्ये आ-
 णि त्यासंख्येप्रमाणें पायास बराबर तुकड्यानीं भाग स्त्रणजे याप्र-
 माणें कीं अब बड डग गह हई हेसर्व परस्पर बराबर कर
 आणि त्यांचे भाग बिंदूपासून दोन त्रिकोणांचे क आणि फ याशि-
 रोबिंदूपर्यंत बक गफ हफ ऐशा तीनरेषा कर स्त्रणजे या रेषा
 अडक डईफ या दोन त्रिकोणांचे तितके भाग करितात जितके
 भाग यांचे पायांत आहेत आणि हे सर्वभाग त्रिकोण अबक त्रिको-
 णाचे बराबर आहेत कारण (२५ सि० २ कु० प्र०) त्यासर्व त्रिकोणा कृ-
 ति तुकड्यांचे पाये आणि उंची बराबर आहे स्त्रणोन अबक त्रिकोण
 बडक डगफ गहफ हईफ यांचे प्रत्येकीं बराबर आहे यास्तव
 अडक त्रिकोण डईफ त्रिकोणास प्रमाण आहे जसे अडक त्रि-
 कोणाचे तुकडे म (२) डईफ त्रिकोणाचे तुकडे न (३) यांस आ-
 हेत स्त्रणोन (७९ व्या० प्र०) जसा अड पाया डई पायास

यारीतीनेंही अड के ऐ हासमांतर बाजूंची कोन डईफ के या
 समांतर बाजूंची कोनास आहे जसा अड पाया डई पायास आहे
 कारण यांचें गुणोत्तर भागाचे बराबर आहे जसा म (२) न (३) ला
 आहे हें सिद्ध

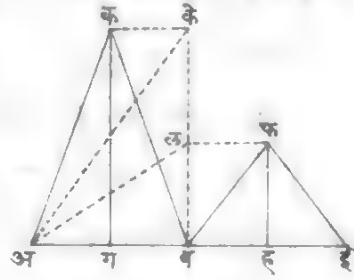
ऐशी वा

(११२)

ऐशीवा सिद्धांत

समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण जांबा पाया बराबर आहे ते परस्पर प्रमाणांत आहेत अशी त्यांची उंची

अबक बर्डफ हे दोन त्रिकोण असतील जांबे पाये अब बर्ड हे दोन बराबर आहेत आणि जांबी उंची कग फह हे दोन लंब आहेत तर अबक त्रिकोण : बर्डफ त्रिकोण :: कग : फह



लणोन ब के रेष अब रेषेवर कग चे बराबर लंब कर यांत फह चे बराबर बल कर नंतर अके अल सांध

आतां (२५ सि० २ कु० प्र०) ते त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत जांबा पाया आणि उंची बराबर आहे याज करितां अबके त्रिकोण अबक त्रिकोणाचे बराबर आहे आणि अबल त्रिकोण बर्डफ त्रिकोणाचे बराबर आहे परंतु अबके आणि अबल हे दोन त्रिकोण ब के आणि बल या दोन पायांवर आहेत आणि त्यांची उंची बराबर अब आहे अशे विचारानें पाहा तर (७१ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर प्रमाणांत आहेत असे त्यांचे पाये लणोन अबके त्रिकोण : अबल त्रिकोण :: बके : बल

परंतु

(११३)

परंतु अब के त्रिकोण - अब क त्रिकोण आणि अब लं त्रिकोण - बईफ त्रिकोण आहे आणि ब के - क ग आणि ब ल - फ ह आहे

याज करितां अब क त्रिकोण : बईफ त्रिकोण :: क ग : फ ह आहे

आणि (२६ सि० प्र०) समांतर बाजू चौ कोन त्या त्रिकोणाचे दुपट आहे जांचा पाया आणि उंची यांचे बराबर आहे

याज करितां समांतर बाजू चौ कोन जांचा पाया बराबर आहे तेपरस्पर प्रमाणांत आहेत जशी त्यांची उंची हें सिद्ध

कुरलरी पायासून सिद्ध जालें कीं त्रिकोण आणि समांतर बाजू चौ कोन जांचा पाया बराबर आहे तेपरस्पर प्रमाणांत आहेत जशी त्यांची उंची आणि (७२ सि० प्र०) जे व्हां त्यांची उंची बराबर आहे ते व्हां ते प्रमाणांत आहेत जसा त्यांचा पाया याज करितां सर्वत्र उंची आणि पाया हीं दोन जांचीं बराबर नाहींत तेपरस्पर प्रमाणांत आहेत जसा पाया आणि उंची यांचे प्रत्येक काट कोन चौ कोन अथवा गुणाकार

एक्या यशी वा सिद्धांत

जर चार रेखा प्रमाणांत असतील तर प्रथम आणि शेवटील

वा

(११४)

या दोन रेषांचा काटकोन चौकोन दोन मध्यरेषांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल आणि त्यांचे उलटें जर प्रथम आणि शेवटील या दोन रेषांचा काटकोन चौकोन दोन मध्यरेषांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर असेल तर त्याचाररेषा प्रमाणांत आहेत

अब कड याचाररेषा प्रमाणांत असतील अथवा
अ : ब :: क : ड तर अ आणि ड यांचा काटकोन चौकोन ब आणि क यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल म्हणजे अ • ड = ब • क

अ	_____
ब	_____
क	_____
ड	_____

	क	क
अ		ब
प	ड	र

म्हणोन याचाररेषा अशा कर कीं त्यांचे शेवट एक बिंदूवर मिळोन त्या बिंदूस्थळीं चार काटकोन होतील आणि त्या रेषांशीं दुसऱ्या समांतर रेषा कर अशा कीं त्यांपासून प क आणि र असे तीन काटकोन चौकोन होतील

आतां प आणि र या दोन काटकोन चौकोनांची उंची बराबर म्हणजे समांतर रेषांचे एक जोडामध्ये आहेत याजकरितां (७९ सि. प्र०) परस्पर प्रमाणांत आहेत असे त्यांचे पाये अ आणि ब तसे क आणि र हे दोन काटकोन चौकोन समांतर रेषांचे एक जोडामध्ये आहेत अथवा त्यांची उंची बराबर याजकरितां ते परस्परसंयोजक प्रमाण आहेत असे त्यांचे पाये क आणि ड परंतु (बरसांगीत त्या प्रमाणे)

अ आणि ब

(१९५)

अ आणि ब यांचे गुणोत्तर क आणि ड यांचे गुणोत्तर बराबर आहे स्णोन प आणि र या काटकोन चौ कोनाचे गुणोत्तर क आणि र या काटकोन चौ कोनाचे गुणोत्तर बराबर आहे याज करितां प आणि क हे दोन काटकोन चौ कोन बराबर आहेत हे सिद्ध.

पुनः जर अ आणि ड यांचा काटकोन चौ कोन ब आणि क यांचे काटकोन चौ कोनाचे बराबर असेल तर अ : ब :: क : ड रेखा प्रमाणांत आहेत अथवा अ : ब :: क : ड

स्णोन पूर्वप्रमाणें रेखा करून काटकोन चौ कोन करावे आतां हे समांतर बाजू चौ कोन समांतर रेखांचे एकच जोडामध्ये होऊन परस्पर प्रमाणांत आहेत असे त्यांचे पाये याज करितां प : र :: अ : ब आणि क : र :: क : ड परंतु पूर्वे सांगितल्या प्रमाणें प आणि क हे परस्पर बराबर आणि र चे संगतीं या दोहोंचे गुणोत्तर बराबर याज करितां अ आणि ब यांचे गुणोत्तर क आणि ड यांचे गुणोत्तर बराबर आहे स्णजे अ : ब :: क : ड हे सिद्ध.

प्रथम कुरलरी जर दोन मध्यपदे स्णजे दुसरे आणि तिसरे हीं बरोबर आहेत तर यांचा काटकोन चौ कोन दुसरे पदाचा वर्ग होतो स्णजे हा वर्ग दुसरे आणि तिसरे या पदांचे ठिकाणीं होतो यांतून निघते कीं जेव्हां तीन रेखा प्रमाणांत आहेत तेव्हां दोन शेवट पदांचा काटकोन चौ कोन मध्यपदाचे वर्ग बराबर आहे

(११६)

आहे आणि याचे उलटें जेव्हां दोन शेवट पदांचा काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गाबराबर आहे तेव्हां त्या तीन रेखा प्रमाणांत आहेत दुसरी कुरलरी अंकगणित आणि बीजगणित या दोहोंतील प्रमाण रीतीवरून कळतें कीं जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां त्यांचे दोन शेवट पदांचा गुणाकार दोन मध्यपदांचे गुणाकारा बराबर आहे आणि भूमितीतील या सिद्धांतावरून कळतें कीं दोन शेवट पदांवर केला काटकोन चौकोन दोन मध्यपदांवर केल्या काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे यापासून निघतें कीं काटकोन चौकोनाचें क्षेत्र स्फणजे पातळी त्याचे लांबी रुंदीचे गुणाकारानें दाखविली जात्ये आणि सामान्यतः भूमितीमध्ये काटकोन चौकोन यासारिखा आहे जे लांबी आणि रुंदी या दोन मापांचा गुणाकार अथवा पाया आणि उंची या दोन मापांचा गुणाकार आणि चौरस यासारिखा आहे जे एक बाजूचे मापाचा वर्ग स्फणजे त्याणें तेंच गुणिलें याचें नांव वर्ग यावरून मनांत आणावें कीं काटकोन चौकोन आणि चौरस हे गुणाकारा बराबर आहेत

तिसरी कुरलरी जसा या सिद्धांतांतील कारण विस्तार काटकोन चौकोनावर लागतो तसाच समांतर बाजू चौकोनावरही लागतो याज करितां एकच गुण सर्वसमांतर बाजू चौकोनांवर लागतो जांचे कोन परस्पर बराबर आहेत आणि त्रिकोण समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा आहे स्फणोन जा त्रिकोणांचे कोन परस्पर बराबर आहेत त्यां

जबर

(११७)

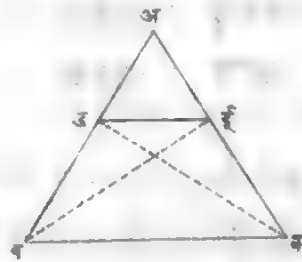
जब रही लाग तो एकच गुण स्मरणे जर समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण यांचे बरोबर कोनांचा बाजू अनुक्रमाने प्रमाणांत असतील तर ते समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत आणि यांचे उलटें जर समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत तर त्यांचे बरोबर कोनांकडील बाजू अनुक्रमे प्रमाणांत आहेत

चौथी कुरलरी समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण जांचा प्रत्येकीं एक कोन बरोबर आहे ते परस्पर प्रमाणांत आहेत असे त्या बरोबर कोनाचे दोहोंकडील बाजूंचे अनुक्रमे काटकोन चौकोन

व्यायशी वा सिद्धांत

कोण त्याही त्रिकोणांत एक बाजू शी समांतर रेष केली तर ती त्या त्रिकोणाचे दुसरे दोन बाजूंस प्रमाणात छेदाल

अबक त्रिकोण असेल जांत
उई रेष बक शी समांतर केली तर
अड : डब :: अई : ईक



स्मरण वई आणि कड सांध आतां डबई डकई हे दोन त्रिकोण

(११८)

त्रिकोण (२५सि०प्र०) परस्पर बराबर आहेत कारण त्यांस डुई पाया आहे आणि डुई बक यासमांतर रेषांचे एकच जोडामध्ये आहेत परंतु अडई बडई हे दोन त्रिकोण अड डब पायांवर आहेत त्यांची उंची बराबर आहे आणि अडई कडई हे दोन त्रिकोण अई ईक या पायांवर आहेत त्यांचीही उंची बराबर आहे आणि (७९सि०प्र०) जांची उंची बराबर ते त्रिकोण परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये याजकरितां

अडई त्रिकोण : बडई त्रिकोण : : अड : डब
आणि अडई त्रिकोण : कडई त्रिकोण : : अई : ईक

परंतु बडई त्रिकोण (वरनासिद्ध आल्यावरून) कडई त्रिकोणाबराबर आहे आणि बराबरांचे बराबरांशी गुणोत्तर निश्चय एकच आहे याजकरितां अड : डब : : अई : ईक हे सिद्ध

कुरलरी यांतून निघते कीं (६६सि०कु०प्र०) अब अक या दोन अखंड रेषा प्रमाणांत आहेत जसे त्यांचे खंड अनुक्रमानें लणजे

अब : अक : : अड : अई
आणि अब : अक : : बड : कई

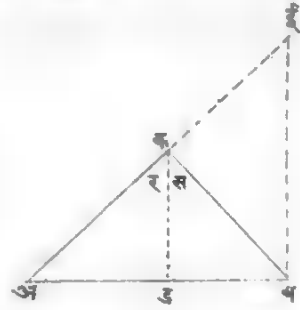
याचरीवा

(११९)

अथायशीवा सिद्धान्त

जीरेष त्रिकोणात्वा कोणताही कोन दुभागित्ये ती त्याचे समोरचे बाजूचे दोन खंड करित्ये हे खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत

अबक त्रिकोण असेल जाचा अकब कोन कडु रेषेनें दुभागिला असा कीं र कोन स कोना बराबर आला तर अडु खंड डब खंडास होईल अशी अक बाजू कब बाजूस



आहे अथवा अडु : डब :: अक : कब

स्नोण कडु शीं बई समांतर रेष करून अक बाटीव अशी कीं ई स्थळावर मिळेल

आतां बक रेष कडु बई या दोन समांतर रेषांस मिळत्ये याजकरितां (१२ सि० प्र०) कबई कोन त्याचेच व्युत्क्रम स कोना बराबर आहे स्नोण (वरसांगीत त्या प्र०) त्याचे बराबरीचा र कोना बराबर ही आहे

पुनः अई रेष डक बई या दोन समांतर रेषांस छेदित्ये याजकरितां (१४ सि० प्र०) ई कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचा त्याच बाजूचे र कोना बराबर आहे याजवरून बकई त्रिकोणांत ब आणि ई हे दोन कोन प्रत्येक र कोना बराबर आहेत याजकरितां परस्पर बराबर आहेत आणि

(१२०)

आणि (२ सि० प्र०) त्यांचे समोरचा कर्ण कर्डी या बाजूही बराबर

परंतु अबर्डी त्रिकोणांत कडरेष बर्डी रेषेची समांतर आहे या -
जकरितां (८२ सि० प्र०) ही रेषा अब अर्डी या दुसऱ्या दोन बाजूंस प्रमा-
णांनीं छेदिते लणजे अड : डब :: अक : कर्डी अथवा कब (वर
सांगितल्या प्र०) कब बाजू कर्डी बराबर आहे

चौर्यायशीवा सिद्धांत

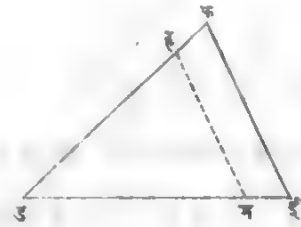
समकोन त्रिकोण परस्पर सरूप आहेत अथवा त्यांचा सजा-
ति बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक परस्पर प्रमाणांत आहेत

अबक डर्डी हे दोन सम
कोन त्रिकोण असतील लणजे अ
कोन ड कोना बराबर आणि ब कोन
र्डी कोना बराबर आणि यास्तवच क
कोन फ कोना बराबर तर अब .



अक :: डर्डी : डफ

लणोन डग अब चे बराबर
कर आणि डह अक चे बराबर कर
नंतर गह सांध आतां अबक
डगह या दोन त्रिकोणांत एकाचा



अब

(१३१)

अब अंक या दोन बाजू दुसर्याचा डग उह या दोन बाजूं बराबर आहेत आणि (वरसांगीत ल्या प्र०) एकाचा या बाजूंचे आंतील कोन दुसर्याचा ल्या बाजूंचे आंतील कोनां बराबर आहे याज करितां (१सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम आहेत म्हणजे एकाचे ग आणि ह हे दोन कोन दुसर्याचे ब आणि क या दोन कोनां बराबर आहेत परंतु (वरसांगीत ल्या प्र०) ब आणि क हे दोन कोन अनुक्रमानें ई आणि फ या दोन कोनां बराबर आहेत याज करितां ही (१प्र० प्र०) ग आणि ह हे दोन कोन ई आणि फ या दोन कोनां बराबर आहेत आणि यापासून निघतें कीं (१४सि० १कु० प्र०) गह रेघ ईफ रेघेशीं समान्तर आहे

आतां यावरून डईफ या त्रिकोणांत गह रेघ ईफ रेघेशीं समान्तर आहे याज करितां डई डफ या दोन बाजूंस प्रमाणानें छेदित्ये म्हणोन (२२सि० कु० प्र०) डग : उह :: डई : डफ परंतु डग आणि उह अनुक्रमानें अब आणि अक यांचे बरोबर आहेत याज करितां ही अब : अक :: डई : डफ हें सिद्ध

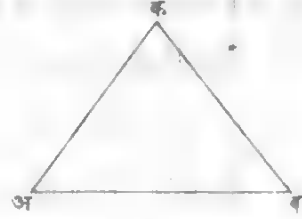
पंचायशीवा सिद्धान्त

जा त्रिकोणाचा बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक परस्पर प्रमाणांत आहेत ते त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत.

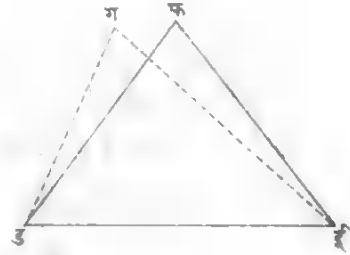
अबक

(१२२)

अबक डईफ या दोन
त्रिकोणांत जर अब : डई : :
अक : डफ : : बक : ईफ तर
हे दोनत्रिकोण परस्पर समकोन
आहेत



सुणोन जर अबक त्रिको
ण डईफ त्रिकोणाशीं समकोन न
सेल तर मनांत कल्या ना कर कीं
डईग त्रिकोण त्याशीं समकोन
आहे परंतु हें अशक्य कारण



जर अबक डईग हे दोनत्रिकोण समकोन असतील तर
(८४ सि० प्र०) त्यांचा बाजू प्रमाणांत असतील अशा कीं
अब : डई : : अक : डग आणि अब : डई : : बक : ईग
यापासून निघतें कीं डग हें अब डई अक या तीन पदांचें चतुः
प्रमाण निघालें परंतु (वरसांगीतल्या प्र०) या तीन पदांचें चतुः
प्रमाण डफ आहे तसें ईग हें अब डई बक या तीन पदांचें च-
तुः प्रमाण निघालें परंतु (वरसांगीतल्या प्र०) यांचें चतुः प्रमाण
ईफ आहे यातीतीनें डग डफ चे बराबर आली आणि ईग ईफ
चे बराबर या प्रमाणें डईफ आणि डईग या दोन त्रिकोणांचा तीनही
बाजू अनुक्रमें बराबर आल्या ते व्हां हे दोन त्रिकोण (५ सि० प्र०) एक

रूप

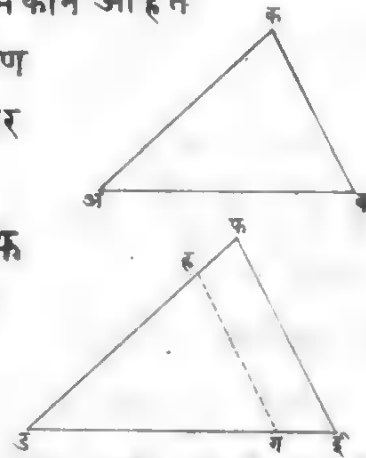
(१२३)

रूप असावे ते आकृती पाहतां परस्पर विषम कोन आहेत ते व्हों हे समकोन हे स्तणणे परम अशक्य हें सिद्ध

शायशीवा सिद्धांत

जर कोणत्या एक त्रिकोणा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाचे एक कोन बराबर आहे आणि त्या बरोबर कोनाचे दोहोंकडील बाजू प्रमाणांत आहेत तर ते दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत

अबक डईफ हे दोन त्रिकोण असतील जांत अ कोन ड कोना बराबर आहे आणि या बरोबर कोनांचे दोहोंकडील अब अक या बाजू डई डफ या दोन बाजूंचे संगतीं प्रमाणांत असतील तर अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशी समकोन होईल



स्तणोने डग अब चे बराबर कर आणि डह अक चे बराबर कर नंतर हग सांध

आतां अबक डगह या दोन त्रिकोणांत प्रत्येकाचा दोन बाजू आणि त्यांचे आतील कोन बराबर आहेत याजकरितां (१सि० प्र०) हे दोनही त्रिकोण एकरूप आहेत यास्तव गू आणि हे दोन कोन

ब

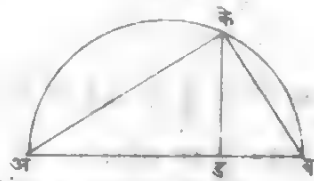
(१२४)

बू आणि क या दोन कोनांचे बरोबर आहेत परंतु (वरसांगीतल्या०)
अब अक या दोन बाजू अथवा त्यांचे बरोबर उग उह या दोन
बाजू दुई दुफ या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत यापासून (८२
सि० प्र०) निघतें कीं ग हू रेषा दुई फू शीं समांतर रेषा आहे याजकरि-
तां (१४ सि० प्र०) दुई आणि फ हे दोन कोन गू आणि हू या दोन कोनां-
चे बरोबर आहेत अथवा त्यांचे बरोबरीचे बू आणि क या दोन को-
नांचे बरोबर आहेत हें सि० झ

सत्यायशीवा सिद्धांत

काटकोन त्रिकोणांत काटकोनापासून कर्णावर लंब केला तर
तो लंब त्या कर्णाचे दोन खंडांचें मध्यप्रमाण आहे आणि काटकोनाचे
दोहोंकडील बाजू प्रत्येकीं कर्ण आणि त्या बाजूकडील कर्णाचा खंड
यांचें मध्यप्रमाण आहेत

अब क काटकोन त्रिकोण
असेल जांत क काटकोना पासून
अब कर्णावर कडु लंब केला तर



कडु हें अड आणि बड यांचें मध्यप्रमाण आहे
अक हें अब आणि अड यांचें मध्यप्रमाण आहे
बक हें अब आणि बड यांचें मध्यप्रमाण आहे

अथवा

(१२५)

अथवा

अड : कड : : कड : बड

अब : अक : : अक : अड

अब : बक : : बक : बड

स्त्रणोन अबक अडक या दोन त्रिकोणांत क आणि ड हे दोन काटकोन बराबर आहेत आणि अ कोन त्या दोनही त्रिकोणांस साधारण आहे याजकरितां (१७ सि० १ कु० प्र०) त्यांचे तिसरेही कोन बराबर आहेत स्त्रणोन हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत या रीतीवरून अबक बडक या दोन त्रिकोणांचे क आणि ड हे दोन काटकोन बराबर आहेत आणि ब कोन दोहोंस साधारण आहे याजकरितां वरचे रीतीनें यांचे तिसरेही कोन बराबर आहेत स्त्रणोन हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत

यापासून कळेल कीं अबक अडक आणि बडक हे तीन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत याजकरितां (८४ सि० प्र०) यांचा बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक प्रमाणांत आहेत स्त्रणजे

अड : डक : : डक : बड

अब : अक : : अक : अड

अब : बक : : बक : बड

हें सिद्ध

कुरलरी (५२ सि० प्र०) अर्धवर्तुजांत जे कोन आहेत ते काटकोन आहेत यापासून

निघनें

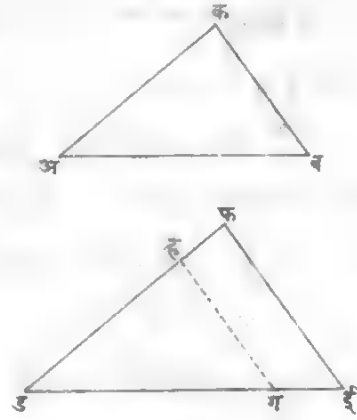
(१२६)

निघटें कीं जर अर्धपरिघांत कोण तें ही स्थळ जसें येथें क या पासून
अब व्यासावर लंब केला आणि त्या क पासून व्यासाचे दोन शेंबऱ्यांपर्यंत
दोन ज्या केल्या तर अक बक कड या तीनरेषा त्या सिद्धांताप्रमाणें
मध्यप्रमाणें आहेत अथवा (७७ सि० प्र०) $कड = अड \cdot बड$
आणि $अक = अब \cdot अड$ आणि $बक = अब \cdot बड$

अठ्यायशीवा सिद्धांत

समकोन अथवा सरूप त्रिकोण ते परस्परसंगत आहेत जसे
त्यांचे प्रत्येक सजाति बाजूंचे वर्ग

अबक डईफ हे दोन सम
कोन अथवा सरूप त्रिकोण असती
ल जाण अब डई या दोन सजाति
बाजू आहेत तर अबक हा त्रिकोण
डईफ या त्रिकोणास आहे जसा
अब चा वर्ग डई चे वर्गास अथवा
जर अब : डई



सुगुण (वरसांगीत त्या प्र०) हे दोन त्रिकोण समकोन अथवा
सरूप आहेत याजकरितां (८४ सि० प्र०) त्यांचा सजाति बाजू प्रत्येकीं प्र-
माणांत आहेत आणि (८१ सि० ४ कु० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्परसंगत
आहेत

(१३७)

आहेत जसे त्या समान कोनांचे दोहोंकडील सजाति बाजूंचे काटकोन
नोकोन याजकरितां

(८४ सि० प्र०) अब : डई :: अक : डफ

आणि अब : डई :: अब : डई स्तणजे हीं दोन
युग्में एकच आहेत यासय प्रमाण एकच आहे याजकरितां

(७५ सि० प्र०) अबै : डई :: अब० अक : डई० डफ परं-
तु (८१ सि० ४ कु० प्र०) अबक ▷ : डईफ ▷ :: अब० अक : डई० डफ
याजकरितां अबक ▷ : डईफ ▷ :: अबै : डई हैसिद्ध

नव्यायशीवा सिद्धान्त

सर्व सरूपाकृती परस्परसंश आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे
वर्ग

अबकडई फगहऐके

या दोन सरूपाकृती असतील जांत

अब फग या दोन सजाति सरूप

बाजू आणि बक गह या दोन स

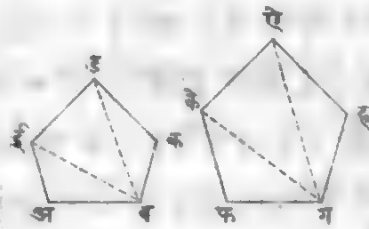
जातिसरूप बाजू याप्रमाणें पुढें ही

त्र. अबकडई ही आकृति फगहऐके या आकृतीस होईल जसा

अबै : फग

स्तणोन ब आणि ग याबरोबर कोनांपासून रेषांकरून बई,

बड



बडु • गके • गऐ • साध अशा कीं दोनही आकृतींत तीन तीन त्रिकोण होतील

(वरसांगीत व्याप्र०) या दोन आकृती सरूप आहेत याजकरितां (७० व्या० प्र०) समकोन आहेत आणि त्यांचे कोनांचा दोहोंकडील सजाति सरूप बाजू अनुक्रमानें प्रमाणांत आहेत

आतां अ कोन फ कोनाबराबर आहे आणि त्या दोन कोनांचे दोहोंकडील अब अई या बाजू फग फके या बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत

याजकरितां अबई फगके हे दोन त्रिकोण (८६ सि० प्र०) समकोन आहेत यातीतीनें बकडु गहऐ हे दोन त्रिकोणही समकोन आहेत कारण क कोन ह कोनाबराबर आहे आणि बक कडु या क कोनाचे दोहोंकडील बाजू गह हऐ या ह कोनाचे दोहोंकडील बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत पुनः जर अईडु फकेऐ या दोन बराबर कोनांतून अईब फकेग हे दोन बराबर कोन वजा केले तर बईडु कोन गकेऐ कोनाबराबर राहील आणि जर कडुई हऐके या दोन बरोबर कोनांतून कडब हऐग हे दोन बरोबर कोन वजा केले तर बडुई कोन गऐके कोनाबराबर राहील यापासून बडुई गऐके या दोन त्रिकोणांत दोनकोन बराबर आहेत यास्तव ते समकोन आहेत यांतून निघतें कीं एक आकृतीचे सर्व त्रिकोण दुसरी आकृतीचे सर्व त्रिकोणांशीं अनुक्रमें प्रत्येक सरूप आहेत

परंतु

(१२९)

परंतु समकोन त्रिकोण सरूप आहेत आणि (८८ सि० प्र०) ते
परस्परसंगत प्रमाण आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग

याजकरितां अबई▷ : हगके▷ : : अबै : फगै

आणि बकड▷ : गहऐ▷ : : बकै : गहै

आणि बडई▷ : गऐके▷ : : डई : ऐके

परंतु या बहुकोन आकृति (वरसांभानल्या प्र०) सरूप आहेत
यास्तव यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत आणि त्या सजाति बाजू-
ंचे वर्गही (७४ सि० प्र०) प्रमाणांत आहेत यापासून या सर्व युग्मांचे
गुणोत्तर बराबर सणजे अबै : फगै बकै : गहै आणि डई :
ऐके याजकरितां त्याच्या युग्मांचे त्रिकोणांचे गुणोत्तरही बराबर
सणजे अबई : फगके बकड : गहऐ आणि बडई : गऐके
आणि या त्रिकोणांचे गुणोत्तर हेच आहे जसें अबै : फगै यांचून
निघते कीं (७२ सि० प्र०) सर्व अग्रसरांची बेरीज सणजे अबकडई
ही आकृती सर्व उपायसरांचे बेरीजेस सणजे फगहऐके या आकृ-
तीस आहे जसा अबै : फगै हे सिद्ध.

नवदाया सिद्धान्त

वर्तुळांतील सरूपाकृतींचा सजाति बाजू आणि त्या आकृ-
तींचा परिमिती यांचे गुणोत्तर त्या दोन वर्तुळांचे व्यासांचे गुणोत्तरा
बरोबर

बरोबर आहे

अबकडई फगहऐके

या दोन सरूपाकृती वर्तुळांत अस

तील जावर्तुळांचे व्यास अल फम

आहेत तर एक आकृतीचा अब

बक इत्यादिक बाजू अनुक्रमानें दु

सर्वा आकृतीचे फग गह इत्यादिक

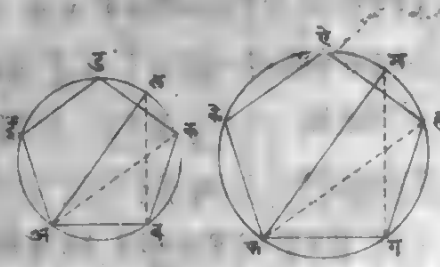
सजाति बाजूंस होतील अथवा एक आकृतीची परिमिति स्रणजे अब +

बक + कड इत्यादिक ती दुसऱ्या आकृतीचे परिमितीस स्रणजे

फग + गह + हऐ इत्यादिकेस होत्ये जसा अल व्यास फम व्यासास

स्रणोन अक फह या दोन सजाति कर्णरेषा कर आणि बल

गम सांध



आतां (वरसांगीतल्याप्र०) या दोन बहुकोन आकृती सरूप
आहेत याजकरितां (७० व्या० प्र०) समकोनही आहेत आणि त्यांचे स-
जाति बाजूंचे गुणोत्तर एकच आहे याजकरितां अबक फगह या
दोन त्रिकोणांत ब कोन ग कोना बराबर आहे आणि अब बक या
दोन बाजू फग गह या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत याजकरि-
तां (८६ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत यासुव अक ब
कोन फह ग कोना बराबर आहे परंतु अक ब कोन अल ब
कोना बराबर आहे कारण हे दोनही कोन एकच अब

कोना बराबर

(१३१)

कोसावर आहेत आणि फहग कोन फमग कोनाबराबर आहे कारण हे दोन कोन एकच फग कोसावर आहेत याजकरिता (प्र० प्र०) अलब कोन फमग कोनाबराबर आहे आणि पुनः अबल आणि फगम हे दोन काटकोन आहेत कारण अर्धवर्तुळांत आहेत याजकरिता अबल फगम या दोन त्रिकोणांत दोन कोन बराबर सणोन हेसमकोन आणि (८४ सि० प्र०) यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत सणजे अबः फगः : अल सणजे एकवर्तुळाचा व्यासः फम सणजे दुसऱ्या वर्तुळाचे व्यासाचा

यारीतीने दाखविले जाते कीं एका आकृतीचा प्रत्येक बाजू बक कडु इत्यादिक यांचे दुसऱ्या आकृतीचे गह हरे इत्यादिक प्रत्येक सजाति बाजूंशीं गुणोत्तर अल फम यांचे गुणोत्तराबराबर आहे आणि (७२ सि० प्र०) या बाजूंचे बेरिजांचे गुणोत्तरही अल फम यांचे गुणोत्तराबराबर आहे सणजे अब + बक + कडु इत्यादिकः फग + गह + हरे इत्यादिकः : अल व्यासः फम व्यासास हें सिद्ध

एक्यांणवावा सिद्धांत

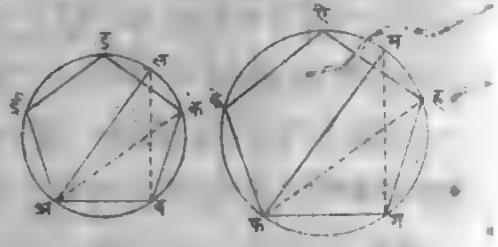
वर्तुळांतील सरूपांकृती परस्परसंगत आहेत जसे त्या दोन वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग

अबक

(१३२)

अबकडई फगहऐके

या दोनसरूपाकृति दोन वर्तुळांन
असनील जा वर्तुळांचे व्यास अल
फम आहेत तर अबकडई या ब
हुकोनांचे क्षेत्र फगहऐके या बहु
कोनाचे क्षेत्रास आहे जसा अल
फम



सुणोन या दोन आकृती सरूप आहेत याजकरितां (८८ सि० प्र०)
परस्परांस आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग अबः फगः इत्या
दिक परंतु (९० सि० प्र०) अब फग या बाजू परस्परांस आहेत जसे
त्या वर्तुळांचे दोन व्यास अलः फम याजकरितां (७४ सि० प्र०) या बा
जूंचे वर्ग सणजे अबः फगः : वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग सणजे अलः
फम याजकरितां ही (प्र० प्र० प्र०) अबकडई ही बहुकोन आकृतिः
फगहऐके या बहुकोन आकृती : : अलः फम हे सिद्ध

व्याणवावा सिद्धान्त

सर्व वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यास
द आणि ध हे दोन वर्तुळांचे व्यास आहेत अशी कल्पना कर
तसेच क आणि ख हे दोन त्याच वर्तुळांचे परिघ आहेत तर

दः

(१३३)

दः धः : कः ख

अथवा

(८५ व्या० प्र०) दः कः : धः ख

सुणोन (९० सि० प्र०) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृतीचे परिमितीचे गुणोत्तर आणि त्या वर्तुळांचे व्यासांचे गुणोत्तर एकच आहे

आतां हा गुणप्रकार सर्वसरूप बहुकोन आकृतींवर लागतो त्या बहुकोन आकृतींस कितीही बाजू असोत मनांत आणकी बाजूंची संख्या अतिबहुत आणि त्या बाजूंची प्रत्येक लांबी अतीच लहान अशी की त्या बाजू केवळ लहान यामुळे ती बहुकोन आकृती केवळ वर्तुळ परिष्कारच होउन गेली आहे तर तशी बहुकोन आकृतीचे बाजूंची परिमिति आणि वर्तुळाचा परिघ एकच आहे यांतून निघते कि वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यास हे सिद्ध

व्याणवावा सिद्धांत

वर्तुळांची क्षेत्रफळे परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यासांचे अथवा त्रिज्यांचे वर्ग

अ आणि आ हीं दोन वर्तुळांची क्षेत्रफळे आहेत असे मनांत

त

(१३४)

तधर तसें द्वा आणि ध हे दोन त्यावर्तुळांचे व्यास असें ही तर

अ : आ :: द : ध

सुणोन (११ सि० प्र०) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृती परस्परांस आहेत जसे त्यावर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग

आतां मनांत आण कीं बहुकोनाचे बाजूंची संख्या वाढवि-
ल्यामुळे त्याबाजू अतिशय लाहान जात्या यापासून ती बाजूंची प-
रिमिति केवळ परिघाचेंच माप जाली लघून ती परिघाचे बरोबर
जाली तर यापासून निघतें किं वर्तुळांचे आणि बहुकोनांचे क्षेत्र-
फल एकच जालें याजकरितां वर्तुळांचीं क्षेत्रफळां परस्परांस आ-
हेत जसे त्यांचे व्यासांचे वर्ग हें सिद्ध

कुरलरी (१२ सि० प्र०) वर्तुळपरिघांचे आणि त्यांचे व्यासांचे
गुणोत्तर एकच याजकरितां ही वर्तुळांचीं क्षेत्रफळां परस्परांस आ-
हेत जसे त्यांचे परिघांचे वर्ग

चौथ्यांणवावा सिद्धान्त

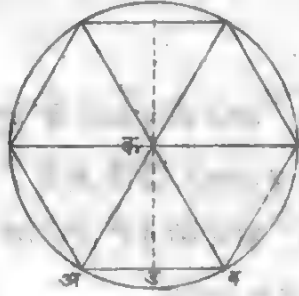
कोणत्याही वर्तुळाचे क्षेत्रफल त्यावर्तुळाचा अर्धव्यास आ-
णि अर्धपरिघ यांचे काटकोन चौकोनाचे बरोबर आहे

मनांत आण किं एक वर्तु-
ळांत समबाजू बहुकोन आकृती

केली

(१२५)

केली अणि वर्तुळ मध्यापासून त्या बहुकोन आकृतीचे कोनापर्यंत विज्या केल्या अशा कीं त्या आकृतीस जितक्या बाजू आहेत तितके त्रिकोण होतील नंतर त्यांतील एक अबक त्रिकोणांत अब बाजूचे उ मध्यावर क शिरपासून कडु लंब केला आहे



आतां (२६ सि० २ कु० म०) अबक त्रिकोण एककाटकोन चौकोनाचे बराबर आहे जोकाटकोनचौकोन त्यात्रिकोणाचा अर्धा पाया आणि उंची यांत होतो म्हणून अबक त्रिकोण अड आणि कडु या रेखांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे याजकरितां संग-
 ठें बहुकोन अथवा त्यांतील सर्व त्रिकोणांची बेरीज साधारण उंची कडु आणि त्या आकृतीचे सर्व बाजूंचे अर्धांची बेरीज अथवा अर्ध परिमिति यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

आतां मनांत आण कीं त्या बाजूंची संख्या अतिनवाढविली या मुळें त्या बाजू अति शयन लाहान होउन केवळ परिघरूपच जाल्या यास्तव परिमिति परिघाशीं मिजली याजकरितां वर्तुळाचें क्षेत्रफळ अथवा वरसांगीत त्या या परिघरूप बहुकोनाचें क्षेत्रफळ विज्या आणि अर्धपरिघ यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे हे सिद्ध

(१३६)

पात की आणि भरिवांचा व्याख्या

८८ दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्नरेष होय त्या दोनही जेथें मिळून परस्पर छेदितात

८९ पातळीवर लंब तीरेष होय जीरेष त्या पातळीतील सर्व रेषांवर लंब आहे

९० एक पातळी दुसऱ्या पातळीवर लंब आहे जर त्या दोन पातळ्यांचे साधारण छिन्नावर केलेले लंब परस्परांवर लंब होतील

९१ एक पातळीचा दुसऱ्या पातळीवर झोंक अथवा कोन तो होय स्पर्शजे दोन पातळ्यांचे छिन्नरेषेवर जे दोन पातळ्यांवरील लंब एकत्र मिळतात त्या लंबरेषांचे अंतराचें माप होय

९२ समांतर पातळ्या त्याच होत जा कितीही वाढविल्या तरी परस्परांस मिळत नाहींत अथवा जांवेमध्ये लंबांतर सर्वत्र बराबर राहानें

९३ भरीव कोन तोच होय जो बहुत पातळ्या एक बिंदूवर मिळाल्या यापासून होतो त्या अनियोज्या अशा तीन

९४ सरूप भरीवें तीच होत जांचे सर्व भरीव कोन अनुक्रमें प्रत्येकाशी बराबर आहेत आणि त्यांचा मर्यादा सर्व पातळ्या बराबर सरूपाकृति सारख्या आहेत

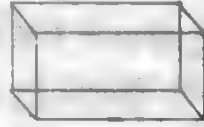
(१३७)

९५. पृजंम सणजे एक भरींव आहे जाचे दोनी शेवट समांतर पातळी बरोबर सरूपाकृति आहेत आणि त्याचा बाजू या शेवटांस संलग्न असोन समांतर बाजू चौकोन आहेत

९६. पृजमांस त्याचे शेवटांचे आकृतीवरून नांवें अनेक आहेत जसे त्रिकोणपृजंम चौकोनपृजंम पंचकोणपृजंम इत्यादिक

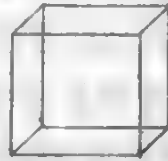
९७. काटकोन पृजंम तेंच होय किं जाचे बाजूंची पातळी त्याचे पायाचे अथवा शेवटाचे पातळीवर लंब आहे

९८. समांतर भरींव एक पृजंम आहे जाचा मर्यादा साहा समांतर बाजू चौकोन पातळी आहेत आणि बाजूंचे जोड समांतर आणि सारखे आहेत



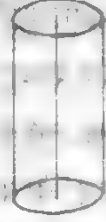
९९. काटकोन समांतर भरींव तेंच होय जाची मर्यादा पातळी सर्व काटकोन चौकोन आहे आणि हे काटकोन चौकोन परस्परांवर लंब आहेत

१००. घन सणजे चौरस पृजंम होय जाचा मर्यादा साहा बरोबर चौरस पातळी आहेत आणि हे चौरस परस्परांवर लंब आहेत



(११८)

१०१ शिलिंदर स्तणजे वर्तुळ पृजं
म होय जाचे दोन शेवट वर्तुळ आ
हेत आणि मनांत येतें कीं या दोन
शेवटांचे परिघां बरोबर आसा शीं
समांतर त्यांचे भोंवती एक रेषे के
ल्यापासून बनले आहे



१०२ शिलिंदराचा आंस तीवरेघ होय जी शिलिंदराचे समांतर वर्तु
ळ शेवटांचे मध्यबिंदू सांधिल्ये

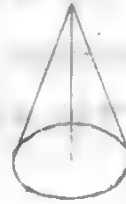
१०३ शंकु स्तणजे एक भरीव आ
हे जाचा पाया कोणतीही सरळरेघा
कृति पातळी आहे आणि जाचा
सर्व बाजू त्रिकोण आहेत आणि



त्या बाजूंचे शिरोबिंदू पायाचे वर एक बिंदून मिळतान त्याबिंदूस शंकु
चें शिरस्तरणतान

१०४ शंकूचीं नावें पृजंमासारिखीं अनेक आहेत जशी त्यांचे पाया
ची आकृती स्तणजे त्रिकोणशंकू चौकोनशंकू पंचकोनशंकू इत्यादिक

१०५ वर्तुळशंकू तोंच होय जाचा
पाया वर्तुळ आहे आणि जाचे आं
साचे वरत्ये शेवटावर निश्चळ रेषे
चें एक टोंक आणि दुसरें टोंक पाया



चे

(१३९)

वे वर्तुळ परिघावर बरोबर त्या आंसा भोंवतें फिरविल्या पासून उत्पन्न
जाला असें मनांत आण

१०६ शंकूचा आंस तीच रेघ होय जीरेघ शंकूचे वर्तुळ पायाचा म-
ध्य बिंदू आणि शंकूचा शिरोबिंदू यां तें साधिले

१०७ सरूपशंकू आणि सरूप शिलिंदर तेच होय जांची उंची आणि
पायाचा व्यासही परस्पर प्रमाणांत आहेत

१०८ गोल एक भरीव आहे जांची मर्यादा वांकडी पातळी त्या गोला-
तील एक बिंदू पासून सर्वत्र सारख्या अंतरातें आहे आणि त्या आंती-
ल बिंदूस गोलमध्य स्पर्शनात मनांत आणिले कीं अर्धवर्तुळ त्याचे
च व्यासा भोंवतें फिरलें या पासून हें गोल उत्पन्न जालें

१०९ गोलाचा आंस तीच सरळरेघ होय कीं जीचेवर अर्धवर्तुळ फि-
रतें आणि गोलाचा मध्य तोच होय जो अर्धवर्तुळाचा मध्य स्पर्शजे
गोल आणि अर्धवर्तुळ यांचा मध्य एकच आहे कीं जा पासून त्यांची
मर्यादा वांकडी पातळी सर्वत्र बराबर अंतरातें आहे

११० गोलाचा व्यास कोणतीही सरळरेघ आहे जीरेघ एकीकडील
मर्यादा वांकडी पातळी पासून गोलमध्य बिंदू छेदून पार दुसरेकडील
मर्यादा वांकडी पातळी पर्यंत आहे

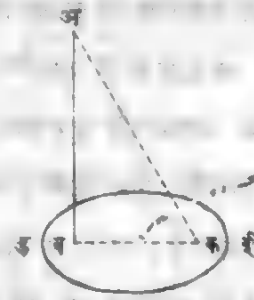
१११ भरीवांची उंची तीच रेघ होय जीरेघ भरीवाचे शिरा पासून पा-
यापर्यंत आहे

(१४०)

पंचाणवावा सिद्धान्त

कोणत्येही बिंदूपासून पातळीवर जीरेष सर्वांहून लाहान करि
तां येत्ये तीरेष त्या पातळीवर लंब आहे

डई कोणतीही पातळी अ-
सेल आणि तिजवर कोण त्याही अ-
बिंदूपासून अब रेष लंब असेल
तर दुसरी कोणतीही रेष जशी ए
थे अक त्याच अ बिंदूपासून पा-
तळी पर्यंत केली ती अब रेषेहून लांब होईल



सणोन पातळीवर ब आणि क हे दोन बिंदू रेघे करून सांध
आतां अब रेघ डई पातळीवर (८९ व्याप्र०) लंब आहे याज-
करितां ब कोन काटकोन आहे यास्तव क कोनाहून लोटा आहे याज-
करितां (२१ सि० प्र०) अब रेघ लाहान क कोनासमोर आहे ती दुसरी
कोण त्याही रेषेहून सणजे एथे जशी अक रेघ लोट्ये कोनासमोरची
तिचेहून लाहान आहे हें सिद्ध

शाहोणवावा सिद्धान्त

कोणत्येही बिंदूपासून कोणतीही पातळी पर्यंत अंतर मापि-
नात

तात ते लंब आहे

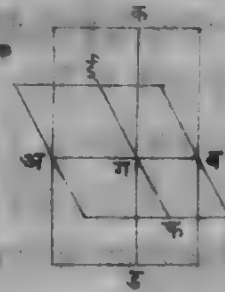
एक बिंदूपासून दुसरा बिंदूपर्यंत अंतर सरळरेषेने मापिले जाते जीरेष दोन बिंदू सांधिल्ये (६ व्या० प्र०) जीरेष सर्वांहुन लाहान एक बिंदूपासून दुसरा बिंदूपर्यंत करितां येथे अशारीतीने कोणत्याही बिंदूपासून कोणतीही रेष पर्यंत अंतर त्याचरेषेवर त्या बिंदूपासून केलेले लंबाने मापितां येईल कारण त्याबिंदूपासून त्यारेषेवर जारेषा करितां येतात त्यांत (२१ सि० प्र०) लंब अतिलाहान रेषा आहे याशीतीने कोणत्याही बिंदूपासून पातळी पर्यंत अंतर आहे ते त्याबिंदूपासून त्यापातळी पर्यंत केलेले लंबाने मापितां येने कारण (१५ सि० प्र०) हीलंबरेषा सर्वांहुन लाहान आहे जारेषा बिंदूपासून पातळीपर्यंत करितां येतात त्यासर्वांहुन हें सिद्ध

सत्यांणवावा सिद्धांत

दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्न सरळ रेषा आहे

अकबडअ अईबफअ

या दोन पातळ्या असतील जा परस्पर छेदितात आणि अ व हे दोन बिंदू असतील कीं जांत दोन पातळ्या परस्पर छेडाल्या आहेत आणि हे



दोन

(१४२)

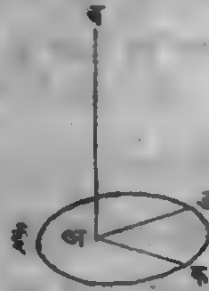
दोन बिंदू अब सरबरेषेने सांधिले तर ही सरब रेष त्या दोनही पातळ्यांचे साधारण छिन्न होईल

सुणोन ही सरबरेष अ आणि ब या दोन बिंदूवर दोन पातळ्यांस स्पर्श करित्ये वाज करितां (२० व्या प्र०) ही सरबरेष दोन पातळ्यांस अ ब या दोन बिंदूवर स्पर्श करित्ये त्या प्रमाणे सर्व बिंदूवर स्पर्श करित्ये यास्तब हीरेष दोनही पातळ्यांस साधारण आहे सुणोन दोन पातळ्यांचे साधारण छिन्न सरब रेष आहे हे सिद्ध

अठ्याणवावा सिद्धांत

जर एकरेष दोनरेषांचे संयोग बिंदूवर लंब असेल तर तीरेष त्या दोनरेषांचे पातळीवर लंब होईल

जर अब रेष अड अक या दोन रेषांशी काटकोन करित्ये तर ती अब रेष अड अक या दोन रेषांचे पार जी कडुई पातळी आहे तीचेवरही लंब होईल



जर अब रेष कडुई पातळीवर लंब नसेल तर दुसरी कोणतीही पातळी अ बिंदू पार असावी की जीचेवर अब रेष लंब होईल परंतु हे अशक्य कारण (वर सांगितल्याप्रमाणे) बअड लअक हे दोन

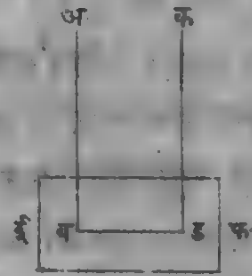
(१४३)

हे दोन काटं कोन आहेत तेव्हां दुसरी पातळी क आणि उ या दोन बिंदू परस्परान्वित असली पाहिजे यावरून ही पातळी अ क या दोन बिंदूंचे मधे अ उ या दोन बिंदूंचेही पारगेली आहे तेव्हां अ क अ उ या दोन रेषांचेही पारगेली याज करितां या दोन रेषांची पातळी आहे हे सिद्ध

नव्यांण वा वा सिद्धान्त

जर दोन रेषा एकच पातळीवर लंब असतील तर त्या दोन रेषा परस्परान्वित समान्तर रेषा होतील

अब क उ या दोन रेषा ई व ड फ पातळीवर लंब असतील तर अब रेषा क उ शीं समान्तर रेषा होईल



सुणोन पातळी वरील व उ बिंदू व उ रेषे करून सांध

आतां अब क उ या दोन रेषा (वरसांगीतल्या प्र०) ई फ पातळीवर लंब आहेत याज करितां (८९ व्या. प्र०) ई फ पातळीवरील व उ रेषेवरही लंब आहे आणि सुणोनच (१३ सि. कु. प्र०) या दोन रेषा परस्पर समान्तर रेषा आहेत हे सिद्ध

१४

कुरलरी

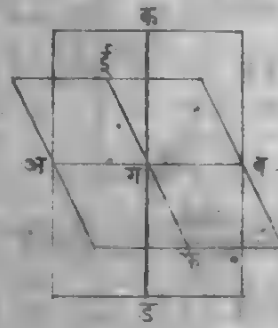
(१४४)

कुरलरी दोन रेखा परस्पर समान्तर असतील आणि त्यांतून
एक रेखा कोणत्याही पातळीवर लंब असेल तर त्याच पातळीवर दुस-
री रेखाही लंब होईल

शंभरावा सिद्धांत

जर दोन पातळ्या परस्पर छेदितात त्यापासून काढा कोन जाला
आणि एक पातळीवर रेखा केली ती त्यांचे साधारण छिन्नावर लंब अ-
सेल तर तीच रेखा दुसऱ्या पातळीवरही लंब होईल

अकबड अईबफ या दो-
न पातळ्या असतील अशा की त्या
परस्पर छेदितात त्यापासून काढा
कोन जाला आहे आणि अकबड
पातळीत त्या दोन पातळ्यांचे साधा-
रण छिन्नावर कग रेखा लंब असेल
तर अईबफ या दुसऱ्या पातळीवर
ही ती कड रेखा लंब होईल



म्हणून अईबफ पातळीत अब साधारण छिन्नावर ईग
लंब कर आतां गक गर्ई या दोन रेखा अब साधारण छिन्नावर

लंब

(१४५)

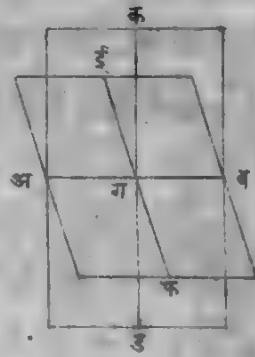
लंब आहेत याजकरितां (२१ व्या० प्र०) त्या दोन पातळ्यांचा झोंक कोन कर्गई आहे याजकरितां हा कर्गई झोंक कोन काटकोन आहे आणि यावरून गअ कर्गई या दोन रेषा अईबफ पातळींत आहेत याजकरितां (२० सि० प्र०) कर्ग रेषा अईबफ पातळीवर लंब आहे हे सिद्ध

१०१ सिद्धांत

एक पातळी दुसऱ्या पातळीवर मिळाली अस्तां तेथे दोन कोन होतात ते दोन कोन दोन काटकोनां बराबर आहेत

अकबड पातळी अईबफ पातळीवर मिळेल तर तेथे दोन कोन होतील त्यांनी बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे

सुणोन त्यांचे साधारण अबुडिनावर ग स्थळाचे पार कड ईफ या दोन रेषा लंब कर यापासून कर्ग रेषा ईफ रेषेवर मिळाली ती तेथे दोन कोन करित्ये ते (६ सि० प्र०) दोन काटकोनां बराबर आहेत परंतु (२१ व्या० प्र०) हे दोन कोन दोन



पातळ्याचे

(१४६)

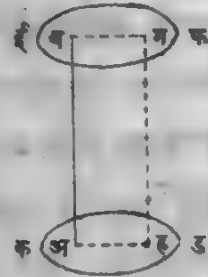
पातळ्यांचे झोंककोन आहेत याजकरिता पा दोन पातळ्या दोनकोन करितात त्यांनीवेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे हे सिद्ध

कुरळरी यारीतीवरून सिद्ध होतें कीं जेव्हां दोन पातळ्या परस्पर छेदितात तेव्हां त्यांचे समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर होतात आणि जेव्हां एक पातळी दुसऱ्या दोन समांतर पातळ्यांस छेदित्ये तेव्हां त्यांचे भुल्लम कोन परस्पर बराबर होतात जसें समांतर रेषांत

१०२ सिद्धांत

दोन पातळ्या परस्पर समांतर आहेत त्यांत एक पातळीवर जीरेष लंब आहे ती दुसऱ्या पातळीवरही लंब होईल

ईफ कड या दोन समांतर पातळ्या असतील आणि अब रेष कड पातळीवर लंब असेल तर ही अब रेष ईफ पातळीवरही लंब होईल



ह्मणोन ईफ पातळीतील कोणत्याही ग स्थळापासून कड पातळीवर गहरेष लंब कर नंतर अह बग सांध

आतां बअ गह या दोन रेषा कड पातळीवर लंब आहेत याजकरितां

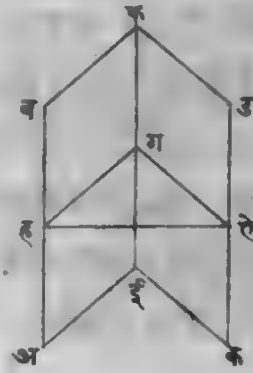
(१४७)

ज करितां अ आणि ह हे दोन कोन कार कोन आहेत आणि कड ईफ या दोन समांतर पातळ्या आहेत याज करितां (१२ व्या प्र०) बअ ग ह हे दोन लंब बराबर आहेत यांतून निघतें कीं (९ व्या प्र०) बग अ ह या दोन रेषा समांतर आहेत आणि अब रेघ अ ह रेषेवर लंब आहे याज करितां (१२ सि० कु० प्र०) तिशीं समांतर बग रेषेवर ही लंब आहे याशी तीवरून सिद्ध होतें कीं अब रेघ दुसऱ्या कोणत्या रेषांवरही लुणचे जाईल पातळीवर बस्य बापर्यंत करितां येतील त्या सर्वांवर ही लंब आहे याज करितां (९० सि० प्र०) ही अब रेघ सर्व ईफ पातळीवर लंब आहे हे सिद्ध

१०३ सिद्धांत

जर कोणत्या ही दोन रेषा तिसर्या एका रेषेशीं समांतर आहेत आणि ती तिसरी रेषा जरी या दोन रेषांचे पातळीवर नसेल तरी ही त्या दोन रेषांवर परस्पर समांतर आहेत

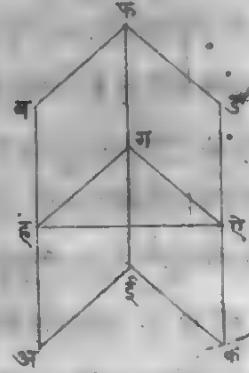
अब कड या दोन रेषा तिसर्या ईफ रेषेशीं समांतर असतील जरी ईफ रेघ अब कड या दोन रेषांचे पातळीवर नसेल तरी ही अब कड रेषा समांतर होईल



स्मरण

(१४८)

स्त्रोणो न ईफ रेचेंत कोणत्ये
ही स्थळापासून स्त्रोणजे असें ग स्थ
ळापासून ईब ईड या दोन पातळ्यां
न गह गऐ हे दोन ईफ रेखेवर
लंब कर



आतां ईफ रेख गह गऐ
या दोन रेखांवर लंब आहे याज करि
तां (९८ सि० प्र०) त्या रेखांचे गह ऐ
पातळीवर लंब आहे यावरून ईफ रेख गह ऐ पातळीवर लंब आहे
याज करितां ईफ शीं समांतर अब रेख ही (९९ सि० कु० प्र०) गह ऐ
पातळीवर लंब आहे याच कारणास्तव कड रेख ही गह ऐ पातळीवर
लंब आहे यांतून निघतें कीं अब कड या दोन रेखा एकच गह ऐ पा-
तळीवर लंब आहेत याज करितां (९९ सि० प्र०) त्या दोन रेखा परस्पर
शीं समांतर आहेत हे सिद्ध

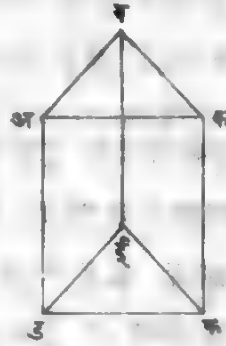
१०४ सिद्धांत

जर दोन रेखा परस्पर मिळतात यांशीं अनुक्रमें समांतर दुस-
या दोन रेखा परस्पर मिळतात कदाचित् त्या आणि या रेखा एक पात-
ळी

(१४९)

कीबर नसतील तरीही चारेपांचे आंतील कोन परस्पर बराबर होतील

अब बक चारेषा अनुक्रमें उई ईफ चारेषांशीं समांतर असतील कदाचित् त्या आणि या एकच पातळीवर नसतील तरीही अबक कोन उईफ कोना बराबर होईल



खणोन अब बक उई ईफ या सर्वरेषा परस्पर बराबर कर आणि अक उफ अड बई कफ सांध

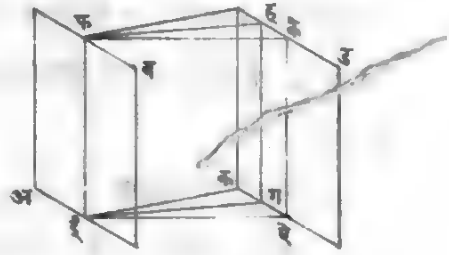
आतां अब उई या दोन रेषा समांतर आणि बरोबर आहेत नंतर अड बई या दोन रेषा त्या समांतर बरोबर रेषांस सांधितान याजकरितां (२४ सि० प्र०) याही परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत याच कारणास्तव कफ बई या दोन रेषा बरोबर आणि समांतर आहेत याजकरितां (१५ सि० प्र०) अड कफ या परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत आणि (२४ सि० प्र०) अक उफ याही परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत यांतून निघते कीं अबक उईफ या दोन त्रिकोणांचा सर्व बाजू अनुक्रमें प्रत्येक बरोबर याजकरितां यांचे कोनही अनुक्रमें बराबर यास्तव अबक कोन उईफ कोना बरोबर आहे हे सिद्ध

=====

१०५ सिद्धान्त

एक पातळी दुसऱ्या दोन समांतर पातळ्यांस छेदिते तर तीं छिन्नें परस्पर समांतर होतात

अब कड या समांतर पातळ्या असतील जा ईफहग या ति सय्ये पातळीनें ईफ हग रेषांचे स्थळीं छेदित्वा तर ईफ गह हीं दोन छिन्नें समांतर होतील



मनांत आणकीं ईफहग पातळीनें ईग फह या दोन रेषा परस्पर समांतर केल्या आहेत आणि कड पातळीवर ईऐ फके हे दोन लंब कर नंतर ऐग केह सांध

आतां ईग फह या समांतर रेषा आहेत आणि ईऐ फके या दोन रेषा कड पातळीवर लंब आहेत याज करितां (९९ सि० प्र०) त्या परस्पर समांतर आहेत याज करितां (१०४ सि० प्र०) हफके कोन ग ईऐ कोना बराबर आहे परंतु फकेह कोन ईऐग कोना बराबर आहे कारण हे दोन कोन काटकोन आहेत यासब फहके ईग ऐ हे दोन त्रिकोण (९७ सि० १ कु० प्र०) समकोन आहेत आणि (९२ व्या० प्र०) यांचा फके ईऐ या दोन बाजू समांतर पातळ्यांची लंबांतरें

(१५१)

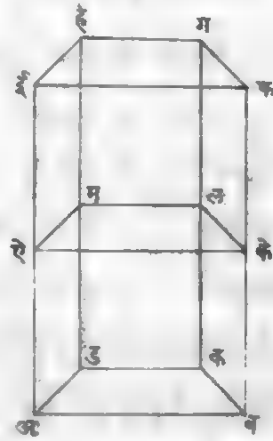
लंबांतरें आहेत यास्तव परस्पर बराबर यापासून निघनें कीं (२ सि० प्र०) फह ईग बाजूही बराबर आहेत परंतु या दोन बाजू (वरसांगी-तल्या प्र०) समांतर आणि बरोबर याजकरितां ईफ गह यारेषा जा फह ईग यासमांतर बरोबर रेषांस सांधितात त्याही (२४ सि० प्र०) बरोबर आणि समांतर आहेत हें सिद्ध

१०६ सिद्धांत

जर कोणतेंही पृजंम पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलें तर तें छिन्न पायाशीं बरोबर एकरूप होईल

अग एक पृजंम असेल आणि त्यास एक पायाशीं समांतर ऐल पातळीनें छेदिलें तर ऐल पातळी अक पायाशीं बरोबर एकरूप होईल अथवा या दोन पातळ्यांचा सर्वबाजू आणि सर्वकोन अनुक्रमें परस्पर बराबर आहेत

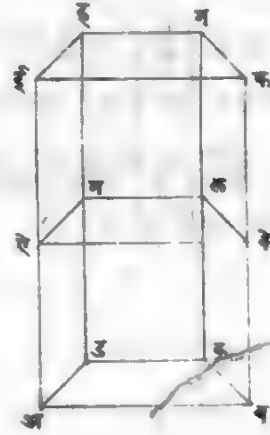
सुणोन (वरसांगीतल्या प्र०)



अक

(१५२)

अक ऐल या दोन पातळ्या पर
स्पर समांतर आहेत आणि (१०५
सि० प्र०) एक पातळी दुसऱ्या दोन स
मांतर पातळ्यांस छेदित्ये तर तीं
छिन्ने परस्पर समांतर आहेत या
सब एके अब शीं समांतर आहे
आणि केल बक शीं समांतर
आहे आणि लम कड शीं समां
तर आणि ऐम अड शीं समांतर



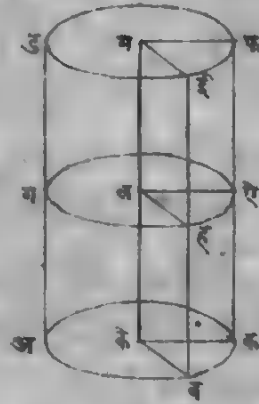
आहे परंतु (१०५ व्या० प्र०) अऐ बके या बाजू समांतर आहेत या
जकरितां अब केऐ समांतर बाजूंनी कोन आहे याजकरितां (१२
सि० प्र०) समोरा समोरचा बाजू अब ऐके या बरोबर आहेत या शीं
तीनें दाखविलें जातें कीं केल = बक आणि लम = कड आणि
ऐम = अड अथवा अक ऐल या दोन पातळ्या परस्पर समबाजू
आहेत परंतु या दोन पातळ्यांचा सजाति बाजू समांतर आहेत याज
करितां (१०४ सि० प्र०) या बाजूंचे आंतील कोन परस्पर बराबर आहे
त सणजे अ कोन = ऐ कोन ब कोन = के कोन क कोन = ल को
न ड कोन = म कोन यावरून अक ऐल या दोन पातळ्यांचा सजा
ति बाजू आणि कोन परस्पर बराबर आहेत याजकरितां या दोन पा
तळ्या परस्परांशीं बराबर एकरूप आहेत हे सिद्ध

(१५३)

१०७ सिद्धान्त

जर एक शिलिंदर पाया शीं समांतर पात बीनें छेदितें तर तें छिन्न वर्तुळ आणि पाया यांशीं बरोबर होईल

अफ एक शिलिंदर असेल आणि गृह्ये कोणतेही छिन्न अबक पाया शीं समांतर असेल तर गृह्ये वर्तुळ आणि अबक पाया यांचे बरोबर होईल



स्पर्शोन केई केफ या दोन पात ब्या असाव्या जा मके या शिलिंदर आसाचे पार जातान आणि गृह्ये छिन्नावर हे ऐ ल या तीन बिंदुस्थळांवर मिळतात

आतां (१०१ व्या प्र०) केल कए समांतर आहेत आणि केऐ ही पात बी अबक गृह्ये या दोन समांतर पात ब्यांस मिळत्ये याज करितां (१०५ सि प्र०) केक लए या दोन छिन्नरेषा समांतर आहेत स्पर्शोन केल ऐक हें समांतर बाजू चौकोन आहे याज करितां त्याचा समोरा समोरचा लए केक या बाजू बराबर आहेत आणि केक ही पायाचे वर्तुळाची त्रिज्या आहे

याशीं तीनें

(१५४)

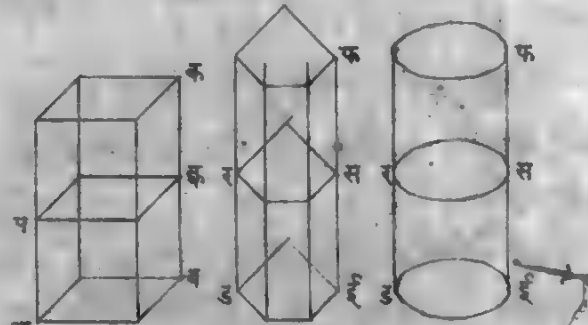
याशीतीनें दाखविलें जातें कीं लह पायाचे वर्तुळाचे केव त्रि-
ज्याचे बरोबर आहे आणि लस्य बापासून गृह ऐ पातळीचे परि-
घापर्यंत जा कोण त्या ही रेखा केल्या त्या सर्व पायाचे त्रिज्याचे बरो-
बर आहेत याजकरितां गृह ऐ ही पातळी वर्तुळ आणि अबक
पायाचे बरोबर आहे हें सिद्ध

१०८ सिद्धांत

सर्व पृष्ठं में आणि सर्व शिलिंदरें जांवापाया आणि उंची ब-
रोबर तीं परस्पर बराबर आहेत

अक उफ

दोन पृष्ठं में आणि
एक शिलिंदर असेल
जांचे पाये अब उई
बरोबर असतील जां
ची उंची बक ईफ
बरोबर तर अक उफ
हीं दोन भस्तिवें बराबर



होतील

होती ल

स्त्रणोन पक्क रस हीं दोन छिन्नें बराबर अंतरानें पायाशीं समांतर असावीं तर (पूर्वदोन सिद्धांतां प्र०) पक्क छिन्न अब पायांचे बरोबर आहे आणि रस छिन्न उर्ई पायांचे बरोबर आहे परंतु (वरसांगीतल्या प्र०) अब उर्ई हे पाये परस्पर बराबर आहेत याजकरितां पक्क रस हीं छिन्नें ही परस्पर बराबर आहेत याशीं छिन्नें दाखविले जातों कीं दुसरीं कोणतीं ही समान अंतराचीं छिन्नें ही परस्पर बराबर

यापासून सिद्ध होतों कीं अक पृजमाचीं प्रत्येक छिन्नें उर्फ दुसरें पृजम अथवा शिलिंदर यांचे त्या छिन्नांशीं समान अंतराचे प्रत्येक छिन्नांचे बराबर आहेत आणि यावरून हीं पृजमें आणि शिलिंदर बरोबर मानांचे अनेक छिन्नांचे बराबर संख्येनें बनलीं आहेत स्त्रणोन हीं भरीं वें निश्चय परस्पर बरोबर आहेत हें सिद्ध

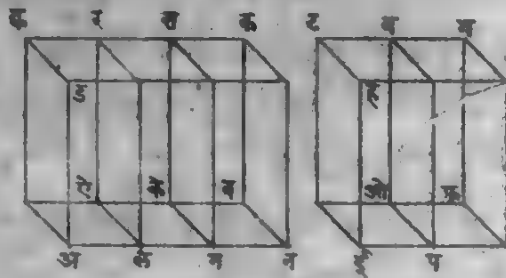
कुरलरी सर्वपृजमें आणि शिलिंदरें कादकोन समांतर भरीं वांचे बरोबर आहेत जर त्यांचा पाया आणि उंची यांचे बरोबर आहेत

(१५६)

१०९ सिद्धान्त

बराबर उंची-नीं काटकोन समांतर भरीवें परस्पर संस आहे-
तु असे त्यांचे पाये

अक ईग
हीं दोन काटकोन स
मांतर भरीवें अस
तील जोंची उंची
अउ ईह बराबर
आहे तर अक भ



रीव : ईग भरीव : : अब पाया : ईफ पायास

सुणोन अब पाया ईफ पायास प्रमाण अस्तवा जशी भल-
ती संख्या म (३) भलती संख्या न (२) यांस होत्ये नंतर कल्प-
ना करकीं त्या संख्या प्रमाणानें अब पायास बराबर काटकोन
चौकोन तुकड्यांनीं भागिला सुणजे अऐ लके मुब हेतीन
तुकडे काटकोन चौकोन परस्पर बराबर जाले तसें ईफ पायास
त्या संख्या प्रमाणानें बराबर काटकोन चौकोन तुकड्यांनीं भागि-
ला सुणजे ईओ पफ हेतीन तुकडे काटकोन चौकोन जाले
सुणजे दोनही पायांचे सर्वभाग (बरसांगीतल्याप्र०) बराबर
जालें

(१५७)

आले आणि पायांचे ऐल केम ओप या भागरेषांवर रल सम वप छिन्नपातची अक आणि ईट यांशीं समांतर कर

आतां अरलस मक ईब पग हीं सर्व काटकोन समांतर भरीं वें परस्पर बराबर आहेत कारण त्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे याजकरितां अक भरीं व ईग भरीं वांस आहेत जसे अक भरीं वाचे म (१) बराबर तुकडे त्यांचे बराबर ईग भरीं वाचे न (२) तुकड्यांस होतात अथवा जसे अब चे १ तुकडे ईफ चे २ तुकड्यांस होतात अथवा जसा अब सगळ्या पाया सगळ्या ईफ पायास होतो हें सिद्ध

कुरलरी हा सिद्धांत आणि पूर्व सिद्धांताची कुरलरी यांपासून सिद्ध होतें कीं बराबर उंचीचीं सर्व पृजंमं आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये कारण सर्व पृजंमं आणि शिलिंदरें काटकोन समांतर भरीं वाचे बरोबर आहेत जांचा पाया आणि उंची यांचे बरोबर आहे

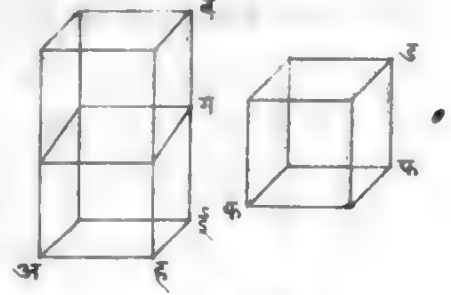
११० सिद्धांत

बरोबर पायाचीं काटकोन समांतर भरीं वें परस्परांस आहेत अशी त्यांची उंची

अब कड

(१५८)

अब कड हीं दोन काट
कोन समांतर भरीवें असतील
आई कफ या दोन बराबर पा-
यावर तर अब भरीव : कड
भरीव : : ईब उंची : फड उंची



लणोन अग काट कोन समांतर भरीव आई पायावर अ-
सेल जांची उंची ईग कड काट कोन समांतर भरीवाचे फड उं-
ची बराबर आहे

आतां अग कड हीं दोन भरीवें बरोबर आहेत कारण
हीं दोन पृजंमें आहेत जांचा पाया आणि उंची बराबर आहे परं-
तु मनांत आणकीं अब अग या दोन भरीवाचे पाये हव हग
आहेत तर दोहोंची उंची अह आहे याजकरितां (१०२ सि० प्र०)
तीं परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये हव हग परंतु हव
हग हे दोन पाये समांतर बाजूंची कोन आहेत जांची उंची ब-
रोबर हई रेष आहे याजकरितां ते परस्परांस आहेत जसे त्यां-
चे पाये ईब ईग परंतु अग भरीव कड भरीवाचे बरोबर आ-
हे आणि ईग रेष फड चे बरोबर आहे याजकरितां अब कड
हीं पृजंमें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची ईब फड लण-
जे अब : कड : : ईब : फड हें सिद्ध

प्रथम

(१५९)

प्रथम कुरलरी हांसिद्धांत आणि एक शें आठव्ये सिद्धांताची कुरलरी यांपासून सिद्ध होतें कीं बरोबर पायांचीं सर्व पृजंमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची

दुसरी कुरलरी या प्रथम कुरलरी पासून सिद्ध जालें कीं बरोबर पायांचीं सर्व पृजंमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची आणि पूर्व सिद्धांताचे कुरलरी पासून सिद्ध जालें कीं बरोबर उंचींचीं सर्व पृजंमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये याज करितां जेव्हां पाया आणि उंची हीं दोनही बरोबर नाहींत तेव्हां सामान्यतः पृजंमें आणि शिलिंदरें हीं सर्व परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाया आणि उंची यांचे गुणाकार आणि यापासून निघतें कीं हे गुणाकार त्यांचे महत्वांचे मापांची संख्या आहेत

१११ सिद्धांत

सरूप पृजंमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे उंचीचे घन अथवा त्यांचे सजाति रेखांचे घन

अबकड

(१६०)

अबकड ईफगह

हीं दोन सरूप पृजंमें असतील
तर कड पृजंम गह पृजंमास
होईल जसा अबः ईफे अथ
वा जसा अडः ईह

स्वणोन (११०सि०२कु०प्र)

हीं दोन भरीवें परस्परसं आहेत

जसे त्यांचे पाया आणि उंची यांचे गुणाकार स्वणजे जसा अक०

अडः ईग० ईह परंतु अक ईग हे दोन पाये सरूप पातळी
आहेत याजकरितां (८२सि०प्र०) ते परस्परसं आहेत जसे त्यां-

चे सजाति बाजूंचे वर्ग स्वणजे अकः ईगः : अबः ईफे

याजकरितां कड भरीवः गह भरीवः : अब० अडः ईफे०

ईह परंतु बड फह सरूप पातळ्या आहेत याजकरितां त्यांचा

सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत स्वणजे अबः ईफः : अडः ईह

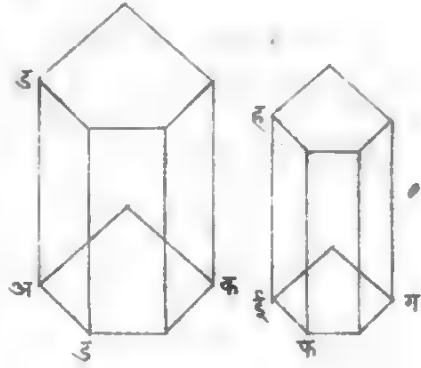
अथवा अबः ईफे : अडः ईह याजकरितां अब० अडः

ईफे० ईह : : अबः ईफे अथवा जसा अडः ईह याजकरि-

तां कड भरीव गह भरीवांस आहे जसा अबः ईफे अथवा

अडः ईह हे सिद्ध

(७०सि०रीतीप्र०) त्या दोहोंचे समगुणाकारही प्रमाणांत आहेत

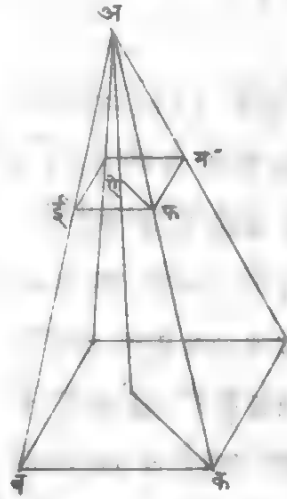


(१६१)

११२सिद्धांत

कोणत्येही सरळ शंकून्हे पायाशीं समांतरपातळीनें छेदिलें छिन्न पायाशीं रूपआहे आणि या दोन पातळ्या लणजे छिन्न आणि पाया परस्परांस आहेत जसे त्यांजवर शंकु शिरापासून केल्या लंबांचें वर्ग

अबकड कोणताही सरळरेषशंकू असेल आणि ईफग छिन्न बकडु पायाशीं समांतर असेल आणि अऐहरेष दोन पातळ्यांवर ह ऐ स्थळीं लंब असेल तर बड ईग या दोन सरळ पातळ्या होतील आणि बड पातळी ईग पातळीस होईल जसा आहे अऐ



लणोन कह फऐ सांध आतां (१०५सिद्धांतप्र०) जे व्हां एकपातळी दोन समांतर पातळ्यांस छेदित्ये ते व्हां छिन्नें समांतर होतात याजकरितां अबक पातळी बड ईग या दोन समांतर पातळ्यांस मिळत्ये तर बक ईफ छिन्नें समांतर करित्ये या रीतीनें

(१६२)

रीतीनें अकड यातवी कड फग हीं छिनें समांतर करित्ये पुनः
(१०४ सि० प्र०) रेघांचे दोन समांतर जोड दोन अंतर कोन करितात
याज करितां ईफ फग रेघांचे जोडांतील ईफग कोन त्याजोडी-
शीं समांतर बक कड रेघांचे जोडांतील बकड कोनाबराबर
आहे यारीतीनें दाखविलें जातें कीं ईग आकृतीचे प्रत्येक कोन
बड आकृतीचे प्रत्येक कोनांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत याज
करितां (७० व्या० प्र०) या दोन आकृती परस्परांशीं सम कोन आ-
हेत

पुनः (१४ सि० प्र०) अब अक अड यातीन रेघा बक
ईफ यादोन समांतर रेघांस आणि कड फग यादोन समांतर
रेघांस छेदितात ल्णोन बरोबर कोन करितात आणि अ कोन
साधारण आहे याज करितां अबक अईफ हे दोन त्रिकोण
सम कोन आहेत आणि अकड अफग हे दोन त्रिकोण सम-
कोन आहेत याज करितां (८४ सि० प्र०) त्यांचा सजाति बाजू प्र-
माणांत आहेत ल्णजे अक : अफ :: बक : ईफ ::
कड : फग आणि यारीतीनें दाखविलें जातें कीं ईग यातवी-
तील सर्वरेघा बड या यांतील सजाति सर्वरेघांशीं प्रमाणांत आ-
हेत यांतून निघतें कीं यादोन यातवीतील सर्व कोन परस्पर
बराबर आणि त्या कोनाचे दोहोंकडील बाजू परस्पर प्रमाणां-
त आहेत तेव्हां यादोन यातव्या (७० व्या० प्र०) परस्परांशीं सरू

य

(१६३)

प आहेत

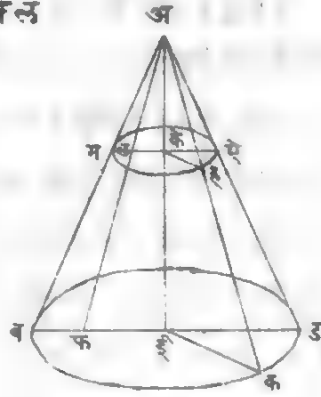
परंतु (८९सि०प्र०) सरूपपातळ्या परस्परस आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग स्त्रणजे बडु : ईग : : बकै : ईफै अथवा (वरलिहिल्याप्र०) जसा अकै : बफै नंतर अहक आणि अऐफ या दोन त्रिकोणांत (९०सि०प्र०) ह ऐ हे दोन काट कोन आहेत आणि अ कोन दोहोंस साधारण आहे याजकरितां हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत आणि त्यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत स्त्रणजे अक : अफ : : अह : अऐ अथवा अकै : अफै : : अहै : अऐ याजकरितां या दोन पातळ्या स्त्रणजे पाया आणि छिन्न हीं दोन प्रथम युग्मांशीं प्रमाणांत आहेत तेव्हां दुसरे युग्मांशींही प्रमाणांत आहेत स्त्रणजे बडु : ईग : : अहै अऐ हे सिद्ध

११३ सिद्धांत

कोणाल्येही वर्तुळ शंकूचें पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलेले छिन्न वर्तुळ आहे आणि या दोन पातळ्या स्त्रणजे छिन्न आणि पाया परस्परस आहेत जसे त्यांजवर शंकु शिरापासून केलेले

केलेले लंबांचे वर्ग

अबकड एकवर्तुळ शंकू असल
असेल आणि गहरे हें त्याचें
छिन्न बकड पायाशीं समांतर
असेल तर गहरे वर्तुळ होईल
आणि बकड गहरे या दोन पा-
तळ्या परस्परांस होतील जसे
त्यांजवर शंकुशिरापासून केले
ल्ये लंबांचे वर्ग



स्पर्शान या दोन समांतर पातळ्या स्पर्शजे छिन्न आणि पा-
या यांजवर अलफ रेष लंब कर आणि अकई अडई या दो-
न पातळ्या शंकूचे अकेई आंसापार होउंदे अशा कीं छिन्न पा-
तळीस हरेके या बिंदूंवर मिळतील

आतां (वर सांगितल्याप्र०) गहरे छिन्न बकड पायाशीं
समांतर आहे आणि कके डके या दोन पातळ्या त्या दोन समां-
तर पातळ्यांस मिळतात याज करितां (१०५.सि०प्र०) हके रेष
कई रेघेशीं समांतर आहे आणि ऐके रेघ डई रेघेशीं समां-
तर आहे पुनः अईक अकेह हे दोन त्रिकोण परस्परांशीं स-
मकोन आणि अईड अकेऐ हे दोन त्रिकोण परस्परांशीं सम-
कोन आहेत याज करितां

केह

(१६५)

केह : ईक : : अके : अई

आणि केऐ : ईड : : अके : अई

याजकरितां केह : ईक : : केऐ : ईड

परंतु ईक ईड या दोनरेषा बरोबर आहेत

कारण दोनही एकवर्तुळाचा त्रिज्या आहेत याजकरितां केह
केऐ याही परस्पर बराबर आहेत या शीतीनें दाखविलें जातें
कीं के स्थळापासून गहारे पातळीवर मर्यादे पर्यंत जाये या के
ल्या त्या सर्वही परस्पर बराबर याजकरितां (४५ व्या० प्र०) ही
गहारे पातळी वर्तुळ आहे

पुनः सरूप त्रिकोणापासून अल : अफ : : अके : अई

आणि केऐ : ईड : : अके : अई

याजकरितां अल : अफ : : केऐ : ईड

अथवा (७४ सि० प्र०) अल : अफ : : केऐ : ईड

परंतु (९३ सि० प्र०) गहारे वर्तुळ : बकडवर्तुळ : : केऐ : ईड

याजकरितां गहारे वर्तुळ : बकडवर्तुळ : : अल : अफ

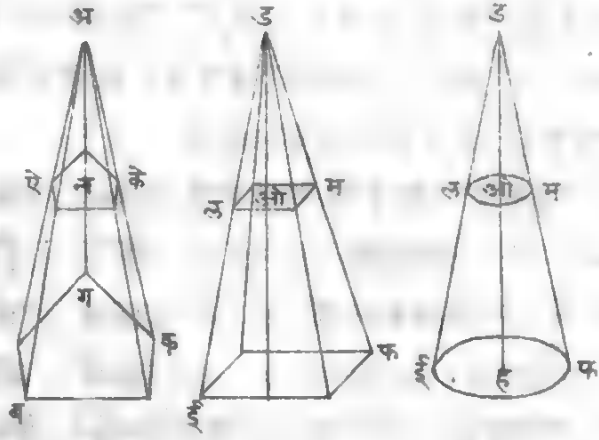
हें सिद्ध

(१६६)

११४ सिद्धांत

बराबर पायाचे आणि बराबर उंचीचे सर्वसरळरेष शंकू
आणि वर्तुळशंकू परस्पर बराबर आहेत

अबक डईफ
हे कोणतेही सरळरे
षशंकू आणि वर्तुळ
शंकू अमतील जांचे
पायेबक ईफ आ
णि उंची अग उह
बरोबर आहे तर
अबक सरळरेषशं
कू आणि डईफ व
र्तुळशंकू हे बराबर होतील



सुणोन मनांत आणकीं ऐके लम या दोन पातळ्या पाया
शीं समांतर आणि शिरापासून अन उओ याबरोबर अंतरा-
नें केल्या आहेत

आतां (पूर्वदोनसि. पासून) उओ : उह : : लम पातळी : ईफ पातळी
आणि अनै : अगै : : ऐके पातळी : बक पातळी
परंतु

(१६७)

परंतु (वरसांगीतल्याप्र०) अने आणि अगळे हे अनुक्रमें
डओ आणि डहू यांचे बरोबर आहेत याजकरितां ऐके पातळीः
बक पातळी : : लम पातळी : ईफ पातळी नंतर (वरसांगीतल्या०)
बक पातळी ईफ पातळी बरोबर आहे याजकरितां ऐके पातळी
लम पातळी बराबर आहे याशीतीनें दाखविलें जातें कीं दुसरीं कोण-
तींही छिन्नें जीं शिरापासून बराबर अंतरांनं केळीं तीं सर्व परस्पर ब-
राबर

यांतून निघतें कीं वर्तुळ शंकूचीं प्रत्येक छिन्नें या सरळ रेषां-
कूचे शिरापासून त्यांशीं समान अंतरांचे प्रत्येक छिन्नांचे बरोबर
आहेत आणि अबक डईफ हीं दोन भरीवें अशा प्रकारचा बरो-
बर छिन्नांहींच बनलीं आहेत याजकरितां हीं सर्व भरीवें निश्चय
परस्पर बराबर आहेत हें सिद्ध

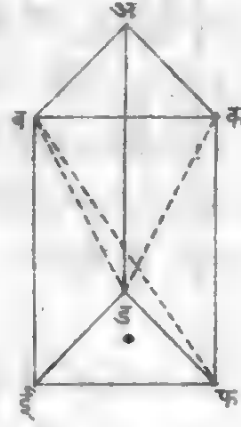
११५ सिद्धांत

सर्व सरळरेषांकू पृजमाचे तृतीयभाग आहेत जाचा पाया
आणि उंची त्या सरळरेषांकूचे बराबर आहे

अबक डईफ

(१६८)

अब कडईफ एक पृजंम
आणि बडईफ एक सरळरेष
शंकू अशींहीं दोन डईफ याभि
कोण पायावर असतील जांची
उंची इंब आहे तर बडईफ सर
ळरेष शंकू अब कडईफ पृजंमा
चा तृतीयभाग होईल



एतणोन पृजंमाचे तीन बाजूं
चे पातळ्यांवर बफ बड डक अशा तीन कर्णरेषा कर आतां
बडफ बकड या दोन पातळ्या सर्व पृजंमास छेदून त्याचे
बडईफ डअबक डबकफ ऐसे तीन सरळरेष शंकू करितान हे
सर्व परस्पर बरोबर आहेत तेकसे तें पुढें सांगतो

आतां पृजंमाचीं दोन शेवटें बराबर आहेत याजकरितां
(११४सि० प्र०) जाचा पाया अबक आणि शिरड हा सरळरेष शं-
कू त्याचे बरोबर आहे कीं जाचा पाया डईफ आणि शिरब आहे
कारण या दोहोंचा पाया आणि उंची बराबर आहे

परंतु जाचा पाया डईफ आणि शिरब तसें जाचा पाया
बईफ आणि शिरड हे दोनही सरळरेष शंकू एकच भरीं ब आ-
हे आणि हा शेवटील सरळरेष शंकू तिसर्या सरळरेष शंकूचे बरो
बर आहे कारण त्यांची उंची शिरड आणि पाये बईफ बकफ
बरोबर

(१६९)

बरोबर आहेत याजकरिता हे सर्व सरळरेष शंकू कीं जांपासून पृजंम बनलें आहे तेपरस्पर बराबर आहेत आणि तेप्रत्येक त्या पृजंमाचे तृतीय भाग आहेत अथवा तें पृजंम त्याप्रत्येक शंकूचे तिपट आहे हें सिद्ध

यांतून निघतें कीं कोणत्याही आकृतीचे सर्व सरळरेष शंकू त्या पृजंमाचे तृतीय भाग आहेत जांवापाया आणि उंची त्या शंकूचे बराबर आहे कारण पृजंमाचा पाया कोणत्याही आकृतीचा असेल तो भागून त्याचे त्रिकोण करितां येतील आणि तें सर्व भरींब त्रिकोण शंकू हीं भागतां येईल

कुरलरी कोणताही वर्तुळ शंकू शिलिंदर अथवा पृजंम याचा तिसरा भाग आहे जर शंकूचा पाया आणि उंची त्याचे बरोबर असेल कारण वर सिद्ध जालें आहे कीं सर्व शिलिंदरें पृजंमाचे बराबर आहेत जेव्हां त्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहेत तेव्हां वर्तुळ शंकू सरळरेष शंकूचे बराबर आहेत जेव्हां त्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे

स्कोल्यंम पृजंम आणि शिलिंदर यांजविषयीं जें वर सिद्ध होतुन गेलें तें सर्व सरळरेष शंकू आणि वर्तुळ शंकू यांजवर लागतें कारण पृजंम आणि शिलिंदरें हीं सर्व सरळरेष शंकू आणि वर्तुळ शंकू यांचे तिपट आहेत सणोन असें सरळरेष शंकू अथवा वर्तुळ शंकू हेपरस्पर आहेत जशा त्यांचा सरळरेष बाजू अथवा व्यास

(१७०)

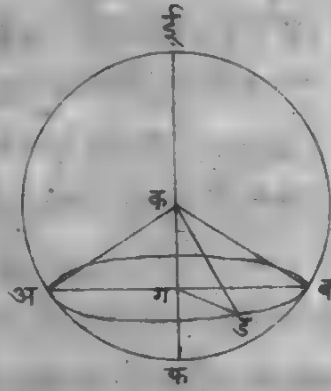
व्यास अथवा उंची इत्यादिक सरळरेषांचा घन हेंच सर्व सरूप भरीवावरही लागतें सणजे सर्व सरूप भरीवें परस्परांस आहेत असे त्यांचे सजाति सरळरेषा बाजूंचे घन कारण हीं सरूप भरीवें सरळरेषां शंकू करूनच बनलीं आहेत जे शंकू परस्पर सरूप आहेत

११६ सिद्धान्त

जर पातळीनें गोळ छेदिलें तर छिन्नवर्तुळ होईल
अईबफ एक गोळ असे
ल जास अडब पातळीनें छेदिलें तर अडब छिन्नवर्तुळ होईल.

सणोन अब ज्या छिन्नाचा व्यास कर आणि चारेघेवर अथवा अडब छिन्नावर गोलाचा ईकगफ आंस गोलाचे क मध्यस्थळा पार लंब कर सणजे हा आंस (४१ सि० प्र०) ग स्थळी

अब ज्यास दुभागील नंतर कअ कउ सांध आणि अडब छिन्नाचे



छिन्नाचे परिमितीवर स्पर्शजे कोण तेही दु स्थळापर्यंत कडु गडु रेखाकर

आतां (वरसागीतल्याप्र०) कग रेघ अडब पातळीवर लंब आहे याजकरितां (९० व्या० प्र०) पातळीतील गडु गडु या दोन रेखांवरही लंब आहे यापासून कळतें कीं कगअ कगडु हे दोन काट कोन त्रिकोण आहेत जांत कग रेघ साधारण आहे आणि त्यांचा कअ कडु या दोन कर्णरेखा परस्पर बराबर कारण या दोनही आंसांचा त्रिज्या आहेत याजकरितां (२४ सि० २ कु० प्र०) त्यांचा तिसर्याही बाजू गअ गडु बराबर आहेत या रीतीनें दाखविलें जातें कीं ग मध्यस्थळापासून अडब छिन्नाचे पातळीवर मर्यादेपर्यंत दुसऱ्या कितीही रेखाकेंल्या तरी त्यासर्व गअ चे अथवा गडु चे बराबर आहेत याजकरितां हें छिन्नवर्तुळ आहे हें सिद्ध

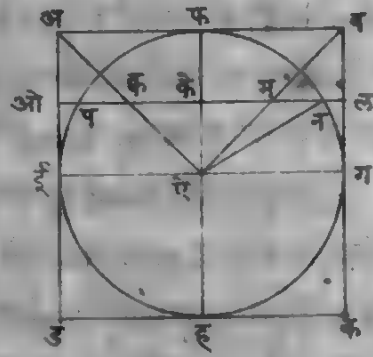
कुरलरी गोलाचे मध्यापार जें छिन्न केलें तें वर्तुळ आहे जांचा मध्यबिंदू आणि व्यास गोलाचा मध्यबिंदू आणि व्यास यांचे बराबर आहे आणि या छिन्नास गोलाचें मोठें वर्तुळ स्पर्शतात आणि गोलाचे दुसरें सर्व छिन्नांस गोलाचीं लाहान वर्तुळे स्पर्शतात

(१७२)

११७ सिद्धांत

गोलाचे भोंवती गोलाचे चार आंगां बराबर संलग्न जें शिलिंदर त्याचे दोन तृतीयांश तें गोल आहे

अबकडु शिलिंदर असेल जें ईफगह गोलास भोंवती चारी आंगां बराबर स्पर्शिलें आहे तर ईफगह गोल अबकडु शिलिंदराचे दोन तृतीयांश होईल



स्वणोन शिलिंदराची अक पातळी आणि गोल यांचे ऐ मध्य स्पर्शपार छिन्न असेल आणि अऐ बऐ सांध नंतर फऐह रेषा अउ शीं अथवा बक शीं समांतर कर आणि ईऐग ओकेल या दोन अब शीं किंवा उक शीं समांतर रेषा कर स्वणजे ओकेल रेषा बऐ रेषेस म स्पर्शळी मिळेल आणि गोल छिन्नास न स्पर्शळी मिळेल नंतर ऐन सांध

आतां कल्पना करकी हफबक पातळी हफ आंसावर फिरविल्यास फग चौरसापासून अग शिलिंदर बनेल तसें

ऐफग

(१७२)

ऐफग वर्तुळ पादापासून ईफग अर्धगोल बनेल आणि ऐफब त्रिकोणापासून ऐअब वर्तुळ शंकू बनेल या फिरवण्यापासून केल केन केम या तीन रेखा अग शिलिंदराचें ओल छिन्न ईफग अर्धगोलाचें पन छिन्न आणि ऐअब शंकूचें क्म छिन्न या सर्व वर्तुळ छिन्नांचा अनुक्रमें त्रिज्या होताना

आतां फब फऐ अथवा ऐग याचे बरोबर आहे आणि केल फब शीं समांतर आहे याजकरितां (८२ सिद्धांताप्र०) सरूप त्रिकोण मार्गानें ऐके केम चे बराबर आहे नंतर ऐकेन या काटकोन त्रिकोणांत (३४ सि० प्र०) ऐन^३ = ऐके^३ + केन^३ आहे पुनः केल ऐग त्रिज्येचे अथवा ऐन त्रिज्येचे बरोबर आहे आणि (वरसिद्ध जाल्यावरून) केम = ऐके याजकरितां केल^३ = केम^३ + केन^३ अथवा या तीन वर्तुळ छिन्नांचे सर्वां हून लांब त्रिज्येचा वर्ग दोन दुसऱ्ये छिन्नांचे त्रिज्यांचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे आणि (९३ सि० प्र०) वर्तुळें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यासांचे अथवा त्रिज्यांचे वर्ग याजकरितां जें वर्तुळ केल त्रिज्येचे फिरवण्यापासून होतें तें केन केम या त्रिज्यांचे फिरवण्यापासून जीं दोन वर्तुळें होतात त्यांचे बेरिजे बराबर आहे अथवा ओल हें शिलिंदराचें छिन्न गोलाचें पन छिन्न आणि वर्तुळ शंकूचें क्म छिन्न यांचे बेरिजे बराबर आहे आणि केल रेघ फब किंवा ऐग यांशीं समांतर कोठेही ठेविली तशीं शिलिंदराचें छिन्न त्या दोन

(१७४)

दोन छिन्नांचे बेरिजे बराबर होईल यांतून निघनें कीं ईब शिलिंदरां जें पूर्व सर्व छिन्नांपासून बनलें गेलें तें ईफग अर्धगोल आणि ऐअब वर्तुळशंकू या दोहोंचे बेरिजे बराबर आहे

परंतु (११५ सि० प्र०) ऐअब वर्तुळशंकू त्याचे बरोबर पायाचे आणि बरोबर उंचीचे ईब शिलिंदराचा तृतीय भाग आहे याजकरितां ईफग अर्धगोल त्या शिलिंदराचे बाकी राहिल्या दोन तृतीय भागांबरोबर आहे अथवा ईफग हें सर्वगोल अबकड या सर्व शिलिंदराचे दोन तृतीय भाग आहेत हें सिद्ध

प्रथम कुरलरी वर्तुळशंकू अर्धगोल आणि शिलिंदर हीं सर्व बरोबर पायाचीं आणि बरोबर उंचीचीं परस्परांस आहेत यापुढील संख्या १ २ ३ याप्रमाणें

दुसरी कुरलरी सर्वगोल परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यासांचे घन कारण (११२ सि० प्र०) हे व्यास त्या गोलांचे सभोंवत्या शिलिंदरांचा संजानि सरळरेषा आहेत

तिसरी कुरलरी वरसांगीतल्ये सिद्धता पासून कळतें कीं ईगनप गोलखंड ईगलओ शिलिंदर आणि ऐमक वर्तुळ यांचे वजाबाकीचे बरोबर आहे लणजे सर्वांची उंची ऐके बराबर आहे आणि पफन गोलखंड अबलओ शिलिंदर आणि अकमब वर्तुळशंकूखंड यांचे वजाबाकी बराबर आहे या सर्वांची उंची फके बराबर आहे

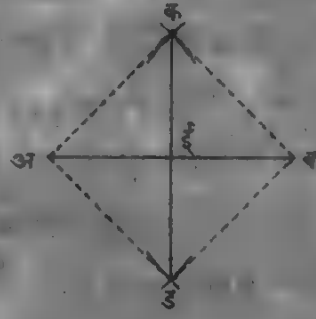
(१७५)

कृत्ये

प्रथम कृत्य

कोणतीही अव सरळ रेष दुभागण्याचें लक्षणजे तीचे बरा-
बर दोनतुकडे करण्याचें

अ आणि ब हीं दोन मध्य
स्थळें जाणोन कोणत्येही बरोबर
त्रिज्येनें दोनदोन कोंस कर असे
कीं क आणि ड यास्थळीं परस्प
र छेदितील नंतर कडु रेषकर
लक्षणजे हीरेष सांगितल्ये अव
रेषेस ई स्थळीं दुभागील



लणोन अक बक अड वड याचार त्रिज्याकर आतां
या चार त्रिज्या बरोबर आहेत आणि अकड बकड या दोन त्रि
कोणांत कडु बाजू साधारण आहे याज करितां हे दोन त्रिकोण
समबाजू आहेत आणि लणोनच (५ सि० प्र०) समकोनही आहे
त लक्षणजे अकई कोन बकई कोनाबरोबर आहे

नंतर अकई बकई या दोन त्रिकोणांत एकाचा अक कई

याबाजू

१७६

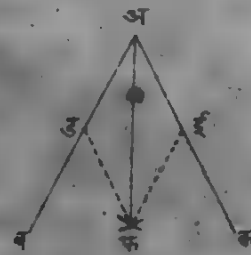
या बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचे बक कर्ई या बाजूचे बराबर आहेत
आणि त्यांचे आंतील अकर्ई बकर्ई हे कोन (वरसिद्ध जाल्यापासून)
बराबर आहेत याजकरितां (१सि०प्र०) हे दोन त्रिकोण एकद्वारूप
अथवा सर्वांशीं सम आहेत यापासून अर्ई बाजू बर्ई बाजूचे बरा-
बर आहेत हे सिद्ध

दुसरें कृत्य

कोणताही बअक कोन दुभागावयाचें

कोणत्याही एक त्रिज्येनें अ मध्यस्थ क मानून अब अक रे-

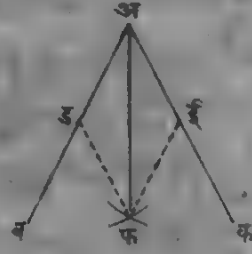
षांतून अड अर्ई बराबर भाग
कर आणि त्याच त्रिज्येनें ड ई
हीं दोन मध्यस्थ कें करून दोन को-
न कर असे कीं फ स्थळीं परस्परां
स छेदितील नंतर अफ रेष कर
स्पर्शजे ही रेष बअक कोनास दु-
भागील



स्पर्शोन

(१७७)

सणोन डफ ईफ सांध
आतां अडफ अईफ या दोन
त्रिकोणांत एकाचा अड डफ या
दोन बाजू दुसऱ्याचे अई ईफ
या दोन बाजूंचे बराबर आहेत का
रण यासर्व बरोबर त्रिज्या आहेत

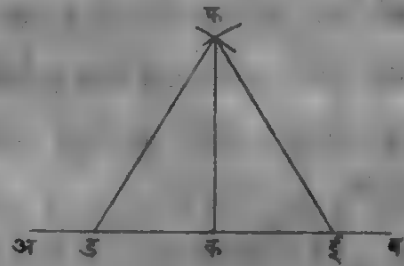


आणि अफ बाजू दोहोंसही साधारण आहे याजकरितां हे दोनही
त्रिकोण समबाजू आणि सणोनच (५सि०प्र०) समकोनही आहे
त सणजे बअफ कोन कअफ कोनाबराबर आहे हें मिद्ध
स्कोल्यम याचरीतीनें वर्तुळाचा कौस दुभागिला जातो

मिसरें कृत्य

कोणत्येही अब सरळरेषेचे सांगीतल्ये क स्थळावर लंब
करावयाचें

सांगीतलें क स्थळ मध्यक
रून कोणत्येही एक त्रिज्येनें अब
रेषेवर कड आणि कई हे बराब
र भाग कर आणि ड ई हीं दोन



मध्यस्थके

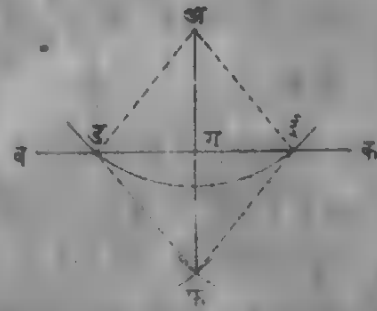
(१७९)

काटकोन आहे याजकरितां (१५ व्या० प्र०) कफ रेघ लंब आहे हे सिद्ध

चवथें कृत्य

कोणत्येही अ बिंदूपासून सांगीतल्ये बक रेघेवर लंब उतरावयाचे

सांगीतला अ बिंदूमध्य जाणून कोणत्येही त्रिज्येनें एक कौस कर असा कीं बक रेघेस ई आणि ड या दोन स्थळीं छेदील नंतर ड आणि ई हीं दोन मध्यस्थ कें जाणून दोन कौस कर असें कीं फ स्थळीं परस्पर छेदितील आतां अगफ रेघ कर स्वणजे हीरेघ बक रेघेवर लंब जाला



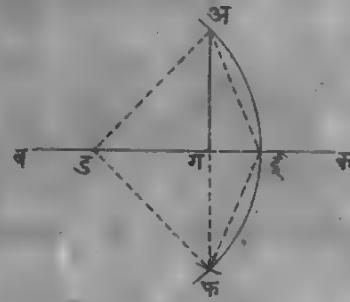
स्वणोन अड अई या दोन बरोबर त्रिज्या कर आणि त-
शाच डफ ईफ याही बरोबर त्रिज्या कर आतां अडफ अईफ
या दोन त्रिकोणांत एकाचा अड डफ या दोन बाजू दुसऱ्याचे
अई ईफ या दोन बाजूंचे बरोबर आहेत आणि अफ साधारण
आहे

(१८०)

आहे याजकरिता हे दोन त्रिकोण समबाजू आणि स्पर्शोन्मूळ
(५ सि० प्र०) सम कोनही आहेत स्पर्शोन्मूळ अग कोन ई अग
कोना बरोबर आहे पुनः अडग अईग या दोन त्रिकोणांत
एकाचा अड अग या दोन बाजू दुसऱ्याचे अई ईग या दोन
बाजूंचे बराबर आहेत आणि यांचे आंतील कोनही परस्पर ब
राबर स्पर्शोन्मूळ (१ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण सम कोन आहेत स्पर्श
जे ग स्थळींचे दोन कोन बराबर काट कोन आहेत याजकरितां
(११ व्या० प्र०) अग रेघ बक रेघेवर लंब आहे हे सिद्ध

दुसरें शितीनें

जेव्हां सांगीतला अ बिंदू रेघेचे शेवटाकडील स्थळाचे समो
र आहे सांगीतल्ये बक रेघेवर कोणतेही दु मध्यस्थळ जाणून
अ बिंदूपास एक कौस कर असा
कीं बक रेघेस ई स्थळीं छेदील
आतां ई स्थळ मध्यकरून ईअ
त्रिज्येनें एक कौस कर असा कीं
पूर्व कौसास फ स्थळीं छेदील नंतर
र अग फ रेघ कर स्पर्शजे ही रेघ
बक रेघेवर इच्छिता लंब होईल



स्पर्शोन्मूळ

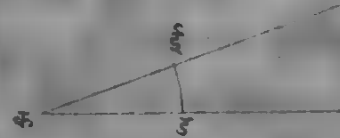
(१८१)

स्नणोन डअ डफ या दोन बराबर त्रिज्या कर आणि ईअ
डुफ या दोन बराबर त्रिज्या कर आतां डअई डफई हे दोन त्रिको
ण समबाजू आणि (५सि०प्र०) समकोनही आहेत याजकरितां
डु स्थळींचे दोनही कोन बराबर आहेत यांतून निघतें कीं डअग
डफग या दोन त्रिकोणांत एकाचा डअ डग या दोन बाजू दुसर्घा
चे डफ डग या दोन बाजूंचे बराबर आणि त्यांचे आंतील कोन
ही बराबर स्नणोन (१सि०प्र०) ग स्थळींचे दोनकोन बराबर या
जकरितां हे दोन काटकोन आहेत स्नणोन अग रेघ बक रेघेवर
लंब आहे हें सिद्ध

पांचवें कृत्य

अब रेघेवर अ बिंदू स्थळीं सांगीतल्ये क कोना बराबर को
न करावयाचे

अ आणि क हे दोन बिंदू
मध्यकरून कोणलेही त्रिज्येनें
डई फग हे दोन कौस कर नंतर
डई त्रिज्येनें फ मध्यकरून दुस
रा एक कौस कर असा कीं फग ला



गस्थळी

(१८२)

ग स्थळीं छेदील आतां ग बिंदूपार अग रेघ कर हीरेघ इछिल्ल
कोन करील

सणोन कल्याण कर कीं डई फग या दोन बरोबर रेघा अथु-
वा त्रिज्या केल्या आहेत तर कडई अफग हे दोन त्रिकोण परस्पर
समबाजू आणि (५ सि० प्र०) समकोनही आहेत या न करितां
अ कोन क कोना बराबर आहे हें सिद्ध

साहावे कृत्य

सांगीतल्ये व क रेघेशीं अ बिंदूपार एक समांतर रेघ करा
याचे

अ बिंदूपारून सांगीतल्ये ई अ फ
व क रेघेवर कोणल्येही ड स्थळा
पर्यंत एक अड रेघ कर नंतर व ड क
(५ कृत्याचेरीतीनें) ईअफ रेघ कर अशी कीं फअड कोन
वडअ कोना बराबर होईल. तर ईफ रेघ व क रेघेशीं समांतर
होईल

सणोन वडअ कोन त्याचे व्युत्क्रम फअड कोना बराबर
आहे

अल्हे याजंकरितां (१३ मि. प्र०) बक ईफ यारेघा परस्पर समा
त आहेत हे मिळू

सांगीतल्ये अब रेघेचे हावे तेवढे भाग बराबर करावयाचे

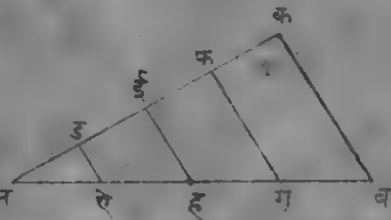
कोण नाही कोन करील अंशी एक

जिनके बराबर भाग करायावे आ

र भाग कर आतां बक सांध नंतर बक शी फग ईह उऐ य

रण (८२ सि० प्र०) यासमांतर रेखा अब अक या दोन बाजूं-


स प्रसाणाने भागितात हे सिद्ध

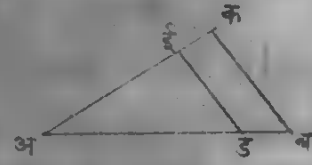


आठवें कृत्य

(१८४)

आठवें कृत्य

सांगीतल्ये अब अक रेखांचें तिसरें प्रमाण काढायांचें
 सांगीतल्या अब अक 
 या दोन रेखा अ स्थळीं कोणता
 ही कोन करितील अशा ठेव अब
 वर अक चे बराबर अड भाग
 कर आतां बक सांध आणि या
 बक शीं उई समांतर रेख कर स्तणजे अई इच्छितें तिसरें प्र-
 माण होईल



स्तणोन बक उई या दोन रेखा परस्पर समांतर आहेत
 याज करितां त्यांहीं (८२ सि.प्र०) अब अक या दोन बाजू प्र-
 माणानें छेदिल्या स्तणजे अब : अक :: अड अथवा ति-
 चे बराबरीची अक : अई याज करितां अब अक या दो-
 णांचें तिसरें प्रमाण अई आहे हें सिद्ध



नववें कृत्य

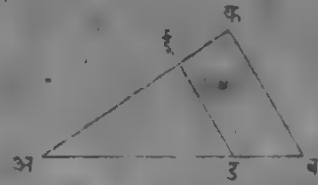
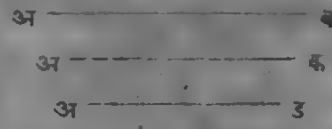
(१८५)

नववें कृत्य

अब अक अड या सांगीतल्या तीन रेखांचें चतुःप्रमाण काढायाचें

सांगीतल्ये तीन रेखांतून

अब अक या दोन रेखा अस्थळीं कोणताही कोन करितील अशा ठेव आणि अब वरतिसरी रेखा अड करनंतर बक सांधून तिशीं समांतर रेखा डई करनंतर अई रेखा इछिलें चतुःप्रमाण होईल



सणोन बक डई या दोन रेखा परस्पर समांतर आहेत या जकरिनां त्यांहीं (८२ सि० प्र०) अब अक या दोन बाजू प्रमाणा नें छेदिल्या सणजे अब : अक :: अड : अई हें सिद्ध

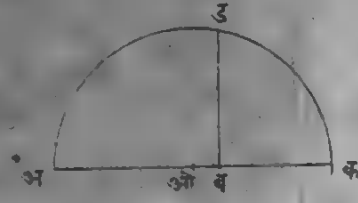
दाहावें कृत्य

सांगीतल्ये अब बक या दोन रेखांचें मध्यप्रमाण काढायाचें
अब

(१८६)

अब बक यासांगीतल्या .

दोन रेखांची एकत्र अबक रेष
कर आणि ही रेष व्यास करून
त्या जवर अडक अर्धवर्तुळ कर
नंतर त्या अबक रेषेवर वस्थी
लंब कर असा की अर्धवर्तुळ्यास

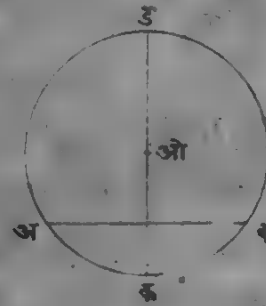


उ स्थळीं मिळेल आतां (८७ सि० कु० प्र०) ही बड रेष अब बक
यांचें मध्यप्रमाण आहे हें सिद्ध

अकरावें कृत्य

कोणत्येही वर्तुळाच्या मध्यकाढायाचें
कोणतीही अब ज्या कर

आणि तीस डक लंबाचें दुभाग
स्पर्णजे हालंब (४१ सि० प्र०) व्या
स होईल याजकरितां कडु व्या
स दुभागिल्यास दुभागविन्ह ओ
स्थळ मध्यहोईल हें सिद्ध



बागवें

(१८८)

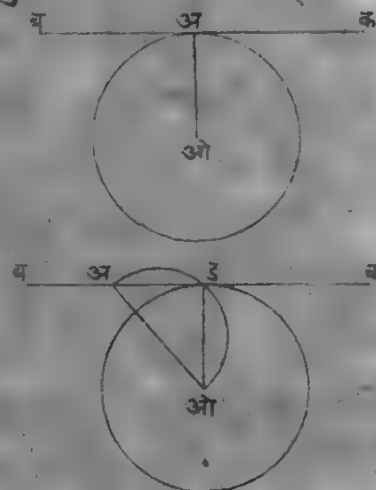
ओब चे अथवा ओअ चे बराबर आहे. सणजे ओअ ओब
ओक या सर्व बराबर याजकरितां यारेघा एकचवर्तुळाची नि-
ज्मा आहेत. हे सिद्ध

तेरावें कृत्य

सांगीतल्ये अ बिंदूपार वर्तुळास स्पर्शरेष करायाचे
जेव्हां सांगीतला अ बिंदू वर्तुळ परिघावर आहे

अ बिंदू आणि ओ वर्तु

ळमध्य हेदोनी सांध आणि या.
अओ त्रिज्येवर बअक रेघ लं
ब कर सणजे हीरेघ (४६ सि० प्र०)
वर्तुळास अ बिंदूपार स्पर्शरेष
होईल



परंतु जेव्हां अ बिंदू वर्तु
ळाचे बाहेर आहेत तेव्हां त्यापा
सून वर्तुळाचा ओ मध्य पर्यंत अओ रेघ कर आणि या
अओ रेघेस व्यासकरून एक अर्धवर्तुळ कर असें कीं वर्तुळ
परिघास

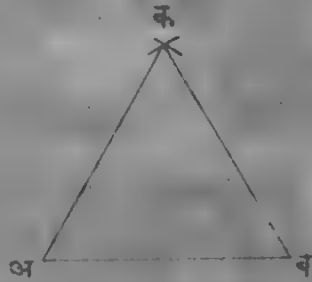
(१९१)

क कोना बराबर होईल

स्त्रणोन ज्या आणि स्पर्शरेघ यांण सून जालेला उअ व
कोन (याच कृत्यरीतीनें) क कोना बराबर आहे आणि हा ही
(५३ सि० प्र०) व्युत्क्रम खंडांतील दुईअ कोना बराबर आहे हें
सिद्ध

सोळावें कृत्य

सांगीतल्ये अब रेघेवर समबाजू त्रिकोण करावयाचें
अ आणि ब हे दोन मध्य
जाणून अब त्रिज्येनें दोन कौस
कर असेकीं क स्थळीं परस्पर
छेदितील नंतर अक बक सांध
सणजे अबक इछिला समबा
जू त्रिकोण होईल



स्त्रणोन अक बक या दोन बराबर त्रिज्या प्रत्येकीं अब
चे बराबर आहेत हें सिद्ध

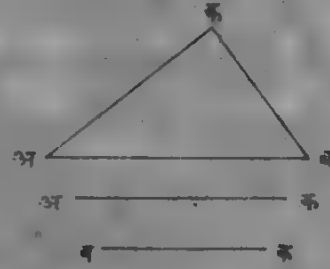
सत्रावें कृत्य

(१९२)

सत्रावें कृत्य

अब अक बक या सांगीतल्ये तीन रेखां करून एक त्रि कोण करायान्हे

अ मध्यकल्पून अक त्रि ज्येनें एक कौस कर आणि ब मध्यकल्पून बक त्रिज्येनें दुसरा एक कौस कर असा कीं पूर्व कौसास क स्थळीं छेदील नंतर अक बक सांध सणजे इच्छिता त्रिकोण होईल



सणोन त्रिज्या अथवा त्रिकोणाचा बाजू अक बक या दोन (याच कृत्यानें) सांगीतल्ये अक बक रेखांचे बरोबर आहेत हें सिद्ध

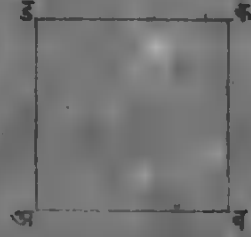
अठरावें कृत्य

सांगीतल्ये अब रेखेवर चौरस करायान्हे

अब

(१९३)

अब खेवर अ ब या
दोनस्थळीं प्रत्येक अब चे बराब
र अड बक हे दोन लंब करून
उक सांध सणजे अबकड हें
इछिलें चौरस होईल



सणोन अब अड बक या तीन बाजू (याचकृत्यानें)
बराबर आहेत आणि (२४ सि० प्र०) उक अब चे बराबर
आणि अब शीं समांतरही आहे यापासून सिद्ध होतें कीं सर्व
चारही बाजू बराबर आणि समोरासमोरचा समांतरही आहेत पुनः
समांतरबाजू चौकोनाचा अ कोन अथवा ब कोन काटकोन आहे
याजकरितां (२२ सि० १ कु० प्र०) त्याचे सर्व कोन काटकोन आहेत या
पासून निघतें कीं या आकृतीचा सर्व बाजू बराबर आणि सर्वही कोन
काटकोन आहेत याजकरितां (२४ व्या० प्र०) ही आकृती चौरस आहे
हे हे सिद्ध

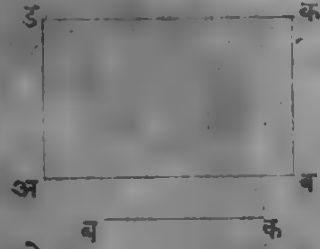
एकुणिसावें कृत्य

सांगीतल्ये अब लांबीचा आणि बक रुंदीचा काटकोन
चौकोन अथवा समांतर बाजू चौकोन करायाचें

अब

(१९४)

अब वर अउ बक लंब
चढीव असें कीं प्रत्येक बक चैव
राबर होतील नंतर उक सांध स
णजे समांतर बाजू चौ कोन जाला



याचा प्रत्यय पूर्वकृत्या प्रमाणें आहे

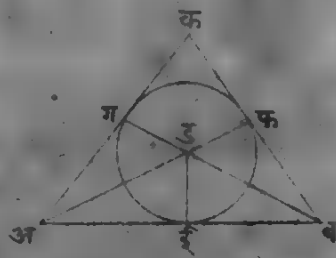
आणि या रीतीनें च विकस समांतर बाजू चौ कोन केला जातो
परंतु त्यांत भेद इतकाच आहे कीं अब वर लंबन करावे तर त्याशीं
सांगीतल्ये कोनाबराबर कोन करावे

विसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबक त्रिकोणांत एक वर्तुळ करायाचें

सांगीतल्ये त्रिकोणाचे कोण

तेही दोन कोन सणजे अ आणि
ब हे अउ बउ रेखांनीं दुभाग
नंतर या दोन रेखा जेथें परस्पर छे
दितील तो छेदनबिंदू उ मध्यस्थळ
जालें त्यापासून त्रिकोणाचे तीनही



बाजूवर

(१९५)

बाजूंवर डग डफ डई है तीन लंबकर सणजे हे लंब वर्तुळाचा त्रिज्या होतील

• सणोन (याचकृत्याने) डअई कोन डअग कोना बराबर आहे आणि ई ग यास्थळींचे दोन कोन काट कोन आहेत याज करितां अडई अडग हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत. आणि अड बाजू दोहोंस साधार आहे याज करितां (२ सि० प्र०) त्याचा डई डग या बाजू परस्पर बराबर आहेत याचरीतीनें दाखविले जातें कीं डफ डई चे अथवा डग चे बराबर

याज करितां ड मध्य करून डई अंतरानें वर्तुळ केल्यास त्याचा परिघ ई फ ग या तीन बिंदूंचे पार जाईल आणि तें वर्तुळ या तीन बिंदुस्थळीं त्रिकोणाचे तीन बाजूंस स्पर्श करील कारण (४६ सि० प्र०) डई डफ डग या तीन त्रिज्या तीन बाजूंवर लंब आहेत हे सिद्ध

एकविसावें कृत्य

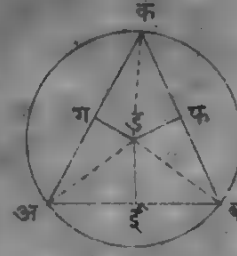
सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे भोंवतीं संलग्न वर्तुळ करा याचें

सांगीतल्ये त्रिकोणाचा कोणत्याही दोन बाजू दोन लंबांनी

दुभाग

(१९६)

दुभाग जसें दुग आणि दुफ
अथवा दुई नंतर त्या दोन लंबां
चा छेदन बिंदू दु मध्यस्थळ होई
ल



सुणोन दुअ दुक दुब
सांध तर दुअई दुवई या दो
न कोन त्रिकोणांत एकाचा दुई दुअ या दोन बाजू दुसऱ्याचा
दुई दुब या दोन बाजूंचे बराबर आहेत आणि यांचे आंतील
दोन ई कोन परस्पर बराबर याज करितां हे दोन त्रिकोण (१ सि०
प्र०) एकरूप आहेत सुणजे दुअ बाजू दुब बाजू बराबर याच
रीतीनें दाखविलें जातें कीं दुक बाजू दुअ चे अथवा दुब चे बरा-
बर आहे यावरून सिद्ध होतें कीं दुअ दुक दुब या सर्व बराबर
आहेत याज करितां या एक वर्तुळाचा बराबर त्रिज्या आहेत जा-
परिघ अबक त्रिकोणाचे तीन बिंदू पार आईल हें सिद्ध

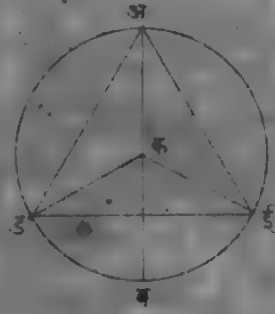
बाविसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत सम बाजू त्रिकोण करायाचें

सांगीतल्ये

(१९७)

सांगीतल्ये वर्तुळाचे क म
ध्वस्थळापार अब व्यासकर नंतर
ब मध्यकरून त्या वर्तुळाचे ब क
त्रिज्येने एक ड क ई कोसकर असा
की परिचास ड ई या दोन स्थळां
उदील नंतर अड अई उई



सांध सणजे त्या वर्तुळांतु अड ई इडिला सम बाजू त्रिकोण होईल
सणोन डब डक ईक ईब सांध आतां डकब सम बाजू
त्रिकोण आहे कारण त्याचा प्रत्येक बाजू त्या वर्तुळाचे त्रिज्ये बराबर
आहेत तसाच बकई सम बाजू त्रिकोण आहे परंतु अड ई कोन
अबई अथवा कबई कोना बराबर आहे कारण अई कोसावर
आहे आणि अईड कोन अबड अथवा कबड कोना बराबर
कारण अड कोसावर आहे यापासून सिद्ध होतें कीं ड अई त्रिकोणा
चे अड ई अईड हे दोन कोन पूर्व सम बाजू त्रिकोणाचे कोनां बरा
बर आहेत याज करितां अ स्थळांचा निसरा कोन ही नसाच आ
हे अशा रीतीने हा त्रिकोण नमकोन आणि सणोनच सम बाजू
ही आहे हे सिद्ध

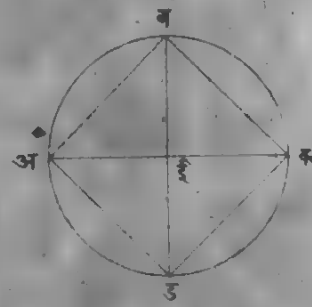
नेयिमावे

तेविसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत चौरस करायाचें

सांगीतल्ये वर्तुळांत अक

बड दोन व्यास कर असे कीं एक
से का वर लंब असोन ई मध्यस्थ
ळीं परस्पर संस छेदितील नंतर
अ ब क ड हे व्यासांचे चार
बोवट सरळ रेषांनीं सांध ल्पणजे



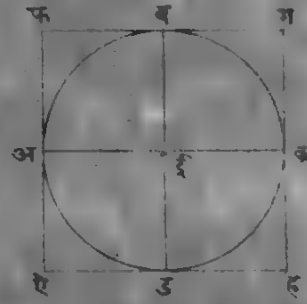
या सरळ रेषांपासून त्या वर्तुळांत इच्छितें चौरस होईल

स्पर्शान अईब बईक कईड उईअ हे चार काटकोन त्रि-
कोण एकरूप आहेत कारण त्याचा ईअ ईब ईक ईड या बाजू
परस्पर बरोबर स्पर्शाने या वर्तुळाचा त्रिज्या आहेत आणि ई स्थ-
ळींचे चार कोन (याच कृत्याने) काटकोन केले ते परस्पर बरोबर
आहेत स्पर्शान त्याचा तिसऱ्या बाजूही अब बक कड उअ
या सर्व परस्पर बरोबर याज करितां अब कड आकृती सम बाजू
आहे. पुनः अ ब क ड हे चार कोन काटकोन आहेत कार-
ण हे प्रत्येक अर्धवर्तुळांत आहेत यास्तवही आकृती चौरस
आहे हे सिद्ध

(१९९)

चोविंसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळाचे भोंवती संलग्न चौरस करायाचें
 सांगीतल्ये वर्तुळांत अक
 बडु दोन व्यास कर असे कीं एक
 मेकावर लंब असोन ई मध्यस्थ
 कीं परस्परांस छेदितील नंतर
 त्यांचे चार शेवटांपार फग ऐह
 या दोन अक शीं समांतर आणि गह फऐ या दोन बडु शीं
 समांतर अशा चार रेषा कर स्पर्शजे फगहऐ हे त्या वर्तुळा भोंवती
 संलग्न इच्छितें चौरस होईल



स्पर्शोन समांतर बाजू चौ कोनाचा समोरासमोरचा बाजू बरा
 बर याजकरितां फग ऐह याप्रत्येकीं अक व्यासाचे बरोबर आ-
 णि फऐ गह याप्रत्येकीं बडु व्यासाचे बराबर आहेत स्पर्शूनच
 ही आकृति समबाजू आहे

पुनः समांतर बाजू चौ कोनाचे समोरासमोरचे कोन बराबर
 याजकरितां फ ग ह ऐ हे चार कोन जे त्यांचे समोरचे दु कोना-
 बराबर आहेत ते सर्व काटकोन आहेत यापासून सिद्ध होतें कीं
 फगहऐ या आकृतीचा सर्व बाजू सम आणि कोन काटकोन आहेत
 याजकरितां

(२००)

याजकरितां ही आकृति चौरस आणि वर्तुळास अ ब क ड या चार बिंदूवर स्पर्शित्ये कारण याचा सर्व बाजू त्या त्या स्थळीं निज्यांवर लंब आहेत हे सिद्ध.

पंचविसावें कृत्य

सांगीतल्ये चौरसांत वर्तुळ करावाचें

सांगीतल्ये चौरसाचा फग फरे या दोन बाजू व आणि अ या दोन स्थळीं दुभाग नंतर या बिंदूंपार फग शीं अथवा ऐह शीं समांतर अक कर आणि फरे शीं अथवा गह शीं समांतर बड कर नंतर या दोन समांतर रेषांचा छेदन बिंदू ई मध्यस्थळ होईल आणि ईअ ईब ईक ईड या चार रेषा आंतील वर्तुळाचा निज्या होतील

सुणोन ईफ ईग ईह ईऐ या चार समांतर बाजू चौकोनाचा समोरासमोराचा बाजू आणि कोन बराबर आहेत याजकरितां ईअ ईब ईक ईड या चार रेषा परस्पर बराबर आहेत कारण या प्रत्येकीं चौरसाने एकेक बाजूचे अर्धाबरोबर आहेत याचा सूच सिद्ध होतों कीं ई मध्यकरून ईअ निज्येनें वर्तुळ केल्यास त्याचा प

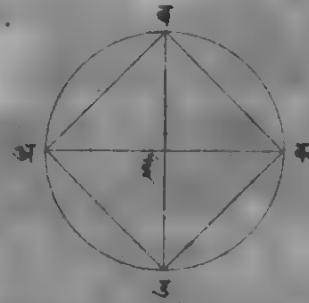
रिघ

(२०१)

परिष अ ब क ड यासर्वबिंदूंचेपार जाईल आणि हें वर्तुळ
चौरसांत होईल सणजे त्याचे चार बाजूंस चार बिंदुस्थळां स्पर्श
करील कारण तेथे सर्वकोन काटकोन आहेत हें सिद्ध

सवि सावें कृत्य

सांगीतल्ये चौरसाचे भोंवती संलग्न वर्तुळ करायाचें
सांगीतल्ये चौरसांत अ क
ब ड दोन कर्णरेषा कर त्यांचा छे
दनबिंदू ई मध्यस्थळ होईल
सणोन (४० सि० प्र०) चौर
साचा कर्णरेषा परस्पर दुभागि
तात याजकरितां ईअ ईब ईक
ईड यासर्व एक वर्तुळाचा बराबर विज्या आहेत जें वर्तुळ अ ब
क ड या चार बिंदूस्थळांपार जाईल हें सिद्ध



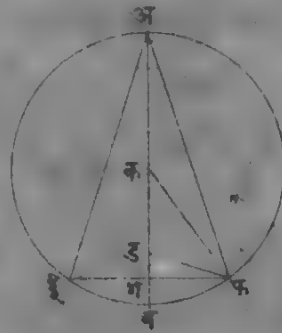
(२०३)

(६१सि०१कु०प्र०) हा काट कोन चौ कोन अफ० अड = अब^२
 स्पर्शोन्न (७७सि०प्र०) यांचीं मध्य आणि शेवटीलपदे प्रमाणांत
 आहेत स्पर्शजे अब : अफ अथवा अड + डफ : : अड : अब
 परंतु (याचकृत्यानें) अई = अड आहे आणि अब = २ बक =
 डफ याजकरितां अब : अई + अब : : अई : अब नंतर
 (६९सि०प्र०) भागाकारानें अब : अई : : अई : ईब हे सिद्ध

अष्टाविसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत समद्विबाजू त्रिकोण करायाचें जात्रि
 कोणाचे पायाकडील दोन कोन प्रत्येक शिरकोनाचे दुपट होतील

सांगीतल्ये वर्तुळांत कोटेही
 अब व्यासकर आणि (पूर्वकृत्य
 शीतीनें) कब त्रिज्येस ड स्थळीं
 अंत्यमध्य गुणोत्तर प्रमाणानें भाग
 नंतर कड अति लोटे भागाबरो
 बरब बिंदूपासून वर्तुळांत बई
 बफ दोनज्याकर आणि अई अफ ईफ सांध स्पर्शजे अईफ



इच्छिला

इच्छिता त्रिकोण होईल

स्त्रणोन बई बफ या दोन ज्या बराबर याज करितां त्यांचीं मापें कोसही बराबर आहेत स्त्रणोन त्यांचे सल्लमेंट कोस आणि सल्लमेंट ज्याही अई ईफ बराबर यास्तव अईफ त्रिकोण सम-द्विबाजू आणि ई कोन फ कोना बराबर आहे आणि ग स्थळींचे दोन कोन काट कोन आहेत

फक डफ सांध आतां (पूर्वकृत्याप्र०)

बक : कड : : कड : बड

{ अथवा (याकृत्यानें) बक : बफ : : बफ : बड १प्र०
{ आणि (२० सि० प्र०) बअ : बफ : : बफ : बग २प्र०

याज करितां प्रथम प्रमाणांत बफ = बक • बड अथवा २ बक • $\frac{1}{2}$ बड दुसरे प्रमाणांत बफ = बअ • बग अथवा २ बक • बग स्त्रणू-न बग = $\frac{1}{2}$ बड = गड याज करितां गबफ गडफ हे दोन त्रिको-ण (१ सि० प्र०) एकरूप आहेत आणि प्रत्येक दोन कोन बराबर आहेत तेव्हां तिसराही कोन बराबर अबफ अगफ या त्रिको-णांशीं समकोन आहेत याज करितां त्यांचे डपट बफड अफई हे त्रिकोण समद्विबाजू आणि समकोनही आहेत तसाच बकफ त्रिकोणही आहे जांत बक कफ या दोन बाजू बराबर आणि त्या-ंचा ब कोन बफड त्रिकोणाशीं साधारण आहे परंतु कड = डफ

अथवा बफ याज करितां (४ सि० प्र०) क कोन डफक कोना बरा-

बर

(204)

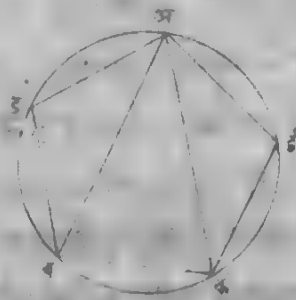
बर आहे स्वणोन बडफ कोन जो (१६ सि० प्र०) या दोन बरोबर
कोनांचे बेरिजे बराबर आहे तो त्या दोहोंतून एकाचे दुपट आहे
अथवा बरोबर व कोनाचे अथवा कबफ कोनाचे दुपट आहे अ-
शा शितीने सिद्ध जालें कीं कबफ समद्विबाजू त्रिकोण आहे जाचे व
राबर दोन कोन प्रत्येक तिसर्ये क कोनाचे दुपट आहेत वर सिद्ध
जालें कीं अईफ कबफ हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत याज
करितां अईफ त्रिकोणाचे पायाकडील दोन कोन प्रत्येक अ शिर-
कोनाचे दुपट आहेत हे सिद्ध

एकुणति सावे कृत्य

सांगीतत्ये वर्तुळां समवाजू पंचकोन करायाचें

त्या वर्तुळांत अवक संम

हिवाजू त्रिकोण कर आसकीं जावे
पायाकडील अवक अकब हे
दोन कोन प्रत्येक बअक शिरकोना
वे दुपट होतील नंतर अडब
आईक या दोन कोसांस ड ईस्य



ਕੀ

(२०६)

बीं दुभाग नंतर अड्ड उब अई ईक याज्याकर सणजे
अड्ड कई हें इछिलें समबाजू पंचकोन होईल

सणोन बराबर कोन बराबर कौसावर आहेत आणि त्यांचे
दुपटकोन दुपटकौसावर आहेत आणि अबक अकब हे दोन
कोन बअक कोनाचे दुपट आहेत याजकरितां अड्ड अईक
हे दोन कौस जांजवर पूर्वदोन कोन आहेत ते कौस बक कौसाचे दुप-
ट आहेत जांजवर शेवटील कोन आहे आतां पूर्व दोन कौस डु ई स्थ-
ळीं दुभागिले आहेत यांतून निघतें कीं अड्ड उब बक कई ईअ
हे सर्व कौस परस्पर बराबर आहेत याजकरितां त्यांचा ज्या ही पर-
स्पर बराबर आहेत सणून या पंचकोनाचा पांचबाजू परस्पर बराब-
र आहेत हें सिद्ध

टीप कृत्य करित्ये समयीं डु ई हीं दोन स्थळें स्वत्यांत भिळतात
जे बड कई यांची लांबी बक करावी

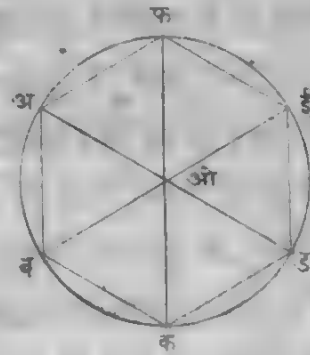
तिसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत समबाजूषट्कोण करायचें
सांगीतल्ये वर्तुळाची अओ
त्रिज्या जसें अब बक इत्यादिक

ज्या

(२०३)

ज्या करून वर्तुळ परिघावर फिरून
फिरून ठेव स्पर्शजे वर्तुळांत ही
अबकडईफअ समबाजू षट्को
ण करील



स्पर्शोन त्या वर्तुळांत अओ
बओ कओ डओ ईओ फओ.
ऐशा त्रिज्या कर स्पर्शजे बराबर सा
हा त्रिकोण होतील यांतून कोणताही एक त्रिकोण जसा अबओ
(याच कृत्यरीतीनें) समबाजू आहे (२सि०२कु०प्र०) त्याचे तीन को
न परस्पर बराबर आहेत आणि या तीन कोनांतील कोणताही एक
कोन स्पर्शजे जसा अओब कोन सर्व कोनांचे बेरिजेचा तृतीय भा
ग आहे स्पर्शोन (१७सि०प्र०) दोन काटकोनांचा तृतीय भाग आहे
अथवा चार काटकोनांचा साहाया भाग आहे परंतु (६सि०४कु०प्र०)
सगळा परिघ चार काटकोनांचें माप आहे याजकरितां अब कौस
जो अओब कोनाचें माप आहे तो सर्व परिघाचा साहाया भाग आ
हे स्पर्शोन त्या कौसाची ज्या अब ही वर्तुळातील समबाजू षट्को
णाची एक बाजू आहे तशाच दुसऱ्याही ज्या हें सिद्ध

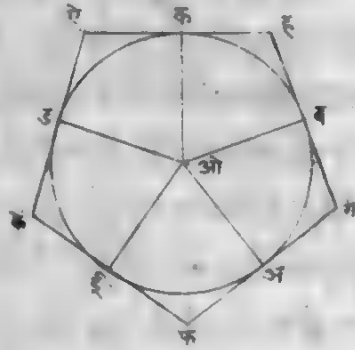
कुरलरी समबाजू षट्कोणाची कोणतीही एक बाजू त्याचे
भोंवती संलग्न वर्तुळाचे त्रिज्ये बराबर अथवा सर्व परिघाचे साहा
ये भागाचे ज्याचे बराबर आहे

एक निसावें

एकतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळाचे भोंवती संलग्न समबाजू पंचकोण अथवा षट्कोण करायाचें

वर्तुळा भोंवती जितक्या बाजूनी समबाजू आकृती करायाची ती (पूर्वदोन कृत्यरीतीनें) वर्तुळाचे आंत कर जशी एथे अबकडई पंचकोण केली नंतर तिचे सर्वकोन विदुस्थळीं वर्तुळास (१३ कृत्यरीतीनें) स्पर्शरेषा कर यासर्व स्पर्शरेषांपासून वर्तुळा भोंवती संलग्न इछिलें बहुकोन होईल



सुणोन सर्वज्या अथवा आंतील बहुकोनाचा बाजू अब बक इत्यादिक परस्पर बराबर आणि सर्वत्रिज्या ओअ ओब इत्यादिक परस्पर बराबर आहेत याजकरितां सर्वत्रिकोणांचें ओ स्थळीं शिरकोन बराबर आहेत परंतु ओईफ ओअफ ओअग ओबग हे कोन स्पर्शरेषा आणि त्रिज्या यांपासून जाले यास्तव ते सर्व काटकोन आहेत याजकरितां ओईफ + ओअफ दोन काटकोनां बराबर आणि ओअग + ओबक दोन काटकोनां बराबर आहे याजकरितां

(२०९)

तांही (१८१ सि० २ कु० प्र०) अओई + अफई दोन काट कोनां बराबर आणि अओब + अगब दोन काट कोनां बराबर आहेत या पासून निघते की अओई + अफई = अओब + अगब आणि यात अओब = अओई कोन यास्तव राहिले दोन कोन अफई अगब हेही परस्पर बराबर आहेत या रीतीनें दाखविलें जातें कीं फ ग ह ए के हे सर्व कोन परस्पर बराबर आहेत

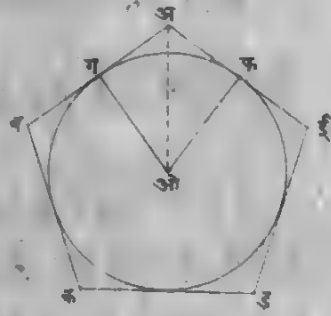
पुनः (६१ सि० २ कु० प्र०) एक बिंदू पासून केल्या दोन स्पर्श रेखा फई फअ परस्पर बराबर आहेत तशाच गअ गब याही परस्पर बराबर आणि अफई अगब या दोन समद्विबाजू त्रिकोणांत फ ग हे दोन कोन परस्पर बराबर आणि त्यांचे समोरचा अई अब या बाजू परस्पर बराबर आहेत या जकरितां हे दोन त्रिकोण (० सि० प्र०) एकरूप आहेत आणि त्यांचा दुसऱ्याही फई फअ गअ गब या बाजू परस्पर बराबर आणि यांतून कोणतीचही दुपट फग आहे याच रीतीनें दाखविलें जातें कीं त्या बहु कोनाचा बाकी राहिल्या गह हए एके केफ या सर्व फग चे बराबर अथवा गब वह इत्यादिक प्रत्येक स्पर्शरेखांचे दुपट आहेत या पासून निघते कीं बाहेरील बहु बाजू आकृती समबाजू आणि समकोन ही आहे हे सिद्ध

कुरलरी आंतील वर्तुळ बाहेरील आकृतीचे बाजूंस बराबर मध्यस्थ कीं स्पर्शनें

वृत्तिसावें कृत्य

सांगीतल्ये बहुकोन आकृतीचे आंत संलग्नवर्तुळ कराया-
चे

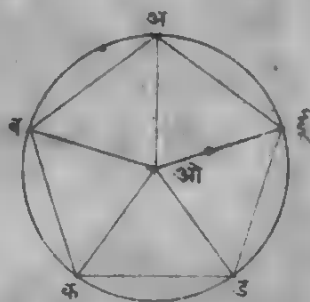
सांगीतल्ये बहुकोनाचा को-
ण त्याही दोन बाजू गओ फओ
दोन लंबांनीं दुभाग नंतर त्या दोन
लंबांचा छेदनबिंदू आंतील इंडि
ले वर्तुळाचे मध्यस्थळ होईल आ-
णि गओ फओ या दोन बराबर
त्रिज्या होतील



सुणोन (४० सि० प्र०) अफ अग या दोन स्पर्शरेखांवरून
लंब वर्तुळाचे मध्यपार जातात आणि (पूर्वकृत्याचे कु० प्र०) आंती-
ल वर्तुळ बहुकोनाचे अई अब बाजूंस फ ग मध्यस्थळीं स्पर्-
शितें पुनः अओग काटकोन त्रिकोणांत अग अओ या बाजू
अओफ काटकोन त्रिकोणाचे अओ अफ बाजूंचे बराबर याज-
करितां (४५ सि० कु० प्र०) त्यांचा तिसर्याही बाजू ओग ओफ ब-
राबर आहेत यास्तव ओ मध्य आणि ओग त्रिज्या याणी वर्तुळ
केल्यास त्याचा परिघ फ बिंदूपार जाईल आणि बहुकोनाचे अब
अई बाजूंस ग फ स्थळीं स्पर्शकरील तसाच बाकी राहिल्ये सर्व
बाजू

सांगीतल्ये बहुकोन आकृतीचे भोंवती संलग्न वर्तुळ केरा
याचें

सांगीत ल्यें बहु कोन आकृ
तीचे दोन कोन जसे उओ कओ
रेषांनीं दुभाग त्या रेषांचा ओ छे
दन बिंदू तो बाहेरील वर्तुळाचा
मध्ये होईल आणि कओ उओ
त्रिज्या होतील



सणोन ओब ओई इत्यादिक रेखा त्या बहु कोनाचे कोन वि-
द्वर्धित कर आतां ओकड त्रिकोणांत कड हे दोन कोन जे बहु-
कोनाचे बकड कडई कोनांचे अर्धा बराबर आहेत ते परस्पर बरा-
बर याजकरितां (४ सि० प्र०) त्यांचे समोरचा कओ उओ बाजू पर-
स्पर बराबर आहेत सणोन ओकड समद्विबाजू त्रिकोण आहे परंतु
ओकड ओकब या दोन त्रिकोणांत एकाचा ओक कड बाजू
आणि त्यांचे आंतील क कोन दुसऱ्याचे ओक कब बाजूंचे
आणि

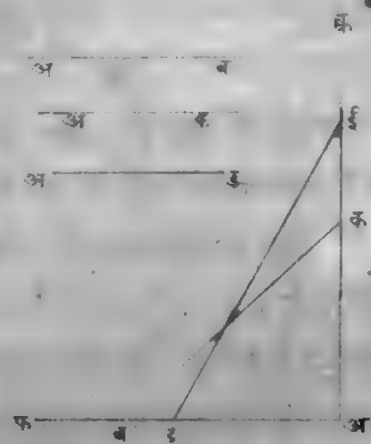
(२१२)

आणि त्यांचे आंतील क कोनाचे बराबर आहेत याज करितां
(१ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि त्यांच्या तिसर्या
ही बाजू ओडू बाजू परस्पर बराबर आहेत याशीतीनेच दाखवि-
ले जाते की ओअ ओब ओक ओड ओई या सर्वरेखा परस्पर
बराबर आहेत याज करितां ओ मध्यकरून ओअ त्रिज्येनें वर्तु-
ळ केल्यास त्याचा परिघ बहुकोनाचे अ व क इत्यादिक कोनवि-
ट्टेचे पार जाईल आणि ते त्या बहुकोन आकृतीचे भोवती सलग्न
इच्छिलें वर्तुळ होईल हे सिद्ध.

चौतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये दोन अथवा त्यांहून अधिक चौरसांचे बराबर एक
चौरस करायाचे

सांगीतल्ये चौरसांच्या बाजू
अब अक बराबर असतील तर
कोणत्याही अफ अक दोनरेखा
परस्परांवर लंब कर आणि त्यांज
वर सांगीतल्ये चौरसांच्या अब अक
बाजू ठेव नंतर बक सांध सणजे
बक रेषेवर चौरस केल्यास ते
(३४ सि० प्र०) अब अक यारे
घावरील दोन चौरसांचे बराबर



होईल

होईल

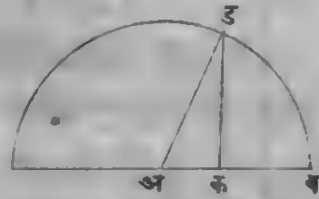
याचरीतीनें तीन अथवा त्यांहून अधिक चौरसांचे बेरिजे बराबर एकचौरस करितां येईल

सणोन जर अब अक अड या तीनरेषा सांगितल्ये तीन चौरसांचा बाजू असतील तर पूर्व दोन चौरसांचे बेरिजे बराबर चौरसांचे बक बाजू बराबर एक रेषेवर अई कर आणि राहिल्ये निसर्ये चौरसाची अड बाजू दुसर्चे रेषेवर ठेव आणि डई सांध तर डई रेषेवर चौरस केल्यास स्पष्ट दिसते की तें (३४ सि० प्र०) अब अक अड या रेषांवरील तीन चौरसांचे बेरिजे बराबर होईल आणि याचप्रमाणे अधिक चौरसांचेही हें सिद्ध

पंसतिसावें कृत्य

सांगितल्ये दोन चौरसांचे वजावाकी बराबर एक चौरस करावा

अब अक एक सरळरेषें त केल्या त्या सांगितल्ये दोन चौरसांचा बाजू असतील तर अ मध्यक रून अब त्रिज्येनें एक अर्धवर्तुळ कर नंतर अब वर कड लंब कर



असा

(२१४)

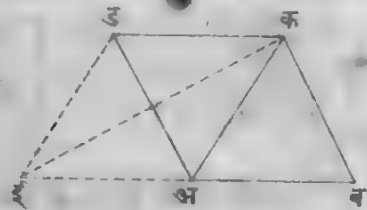
असाकीं परिधास दु स्थळीं मिळेल तर कडु वर चौरस केल्यास (२४ सि० कु० प्र०) त्याचे = अडे-अकै अथवा अबै-अकै हें इति-
लें चौरस होईल हें सिद्ध

छत्तिसावें कृत्य

कोणत्याही सांगीतत्ये अ ब क ड चौकोनाचे बराबर एक त्रिकोण करायाचें

अबकड सांगीतत्ये

चौकोनांत अक कर्णरेष कर आणि त्या कर्णरेषेशीं समांतर दुई कर अशींकीं अब रेष वाढवून तिला ई स्थळीं मिळेल नंतर कई सांध लणजे कईच त्रिकोण अबकड चौकोनाचे बराबर होईल



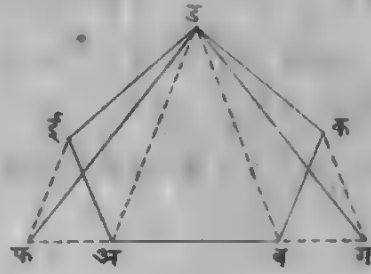
सुणोन अकई अकड हे होत त्रिकोण एकच अक पाया वर अक दुई या समांतर रेषांचे एकच जोडामध्ये आहेत ते (२५ सि० प्र०) परस्पर बराबर आहेत याजकरितां त्यांस प्रत्येकीं अबक त्रिकोण मेळविल्यास (२ प्र० प्र०) बकई अबकड चे बराबर होईल हें

हैं. सिद्ध

सततिसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबकडई पंचकोणावर एक त्रिकोण कराया -

उअ उब सांध अउ शीं स
मांतर ईफ कर आणि उब शीं समां
तर कग कर अशा कीं अब वाढवून
तिला फ ग स्थळीं मिळतील नंतर
उफ उग सांध स्त्रणजे उफग त्रि
कोण अबकडई सांगीतल्ये पंच
कोणा बराबर होईल



स्त्रणोन (२५सि.प्र०) उफअ त्रिकोण = उईअ त्रिकोण आ-
णि उगब त्रिकोण = उकब त्रिकोण आहे याजकरितां या दोन दोन
बराबरींस उअब मिळवून (२५.प्र०) त्यांची बेरीज ही बराबर होई-
ल स्त्रणजे उअब + उअफ + उबग = उअब + उअई + उबक
स्त्रणजे उफग त्रिकोण अबकडई पंचकोणाचे बराबर आहे हें
सिद्ध

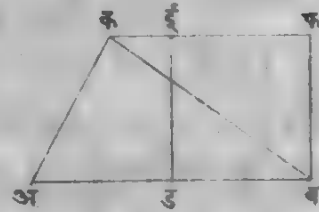
अठतिसावें

(२१६)

अठतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर एक काटकोन चौकोन करायाचें

अब पायास ड स्थळीं दुभा
ग नंतर डई बफ हे दोन अब वर
लंब कर असे कीं अब शीं समांतर
कफ करून तिजला ई फं या दोन



स्थळीं मिळतील तर (२६सि० २कु० प्र०) डफ काटकोन चौकोन
सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर होईल हें सिद्ध

एकुणचाळिसावें कृत्य

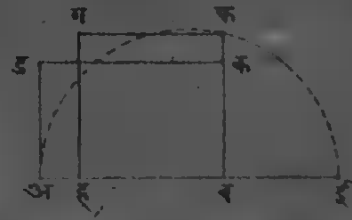
सांगीतल्ये अबकड काटकोन चौकोनाचे बराबर एक
चौरस करायाचें

सांगीतल्ये काटकोन चौकोनाची एक अब बाजू ई पर्यंत

वाढीव

(२१७)

वाढीव अशीकीं बई त्याचे दुसरे
बक बाजू बराबर होईल नंतर
अई व्यास जाणून त्याजवर अर्ध
वर्तुळ कर बक वाढीव अशीकीं प-
रिघास फ स्थ बां मिळेल तर (८७



सि० कु० आणि ७७ सि० प्र०) बक बाजूवर बफ गृह चौरस सांगी
तल्ये अबकड काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल हे सिद्ध

समाप्ता

PART IV.

APPLICATION OF ALGEBRA TO GEOMETRY.

चौथा भाग

बीजगणिताचें भूमितीशीं संगती करण

बीजगणिताचें भूमितीशीं संगतीकरण-

बीजगणित आणि भूमिती यांची वेगळालीं कामें अत्यंत उपयोगी तीं सर्व बीजगणिताचीं बीजगणितांत सांगितलीं तशीं भूमितीचीं भूमितींत सांगितलीं. परंतु आतां बीजगणित भूमितीवर लागतें ती रीति सांगतो.

जेव्हां भूमिति कृत्याचें बीजगणित रीतीनें पृथक्करण करायास सांगितलें आहे. तेव्हां संकेताप्रमाणें कृत्याचे वेगळाले भाग दाखवायास एक आकृती करून ती खरी आहे असें मनांत आणावें. हें आरंभी योग्य आहे. नंतर बहुत युक्तीनें कृत्याचे स्वभावाचा विचार करून पृथक्करण करायास ती आकृती सिद्ध केली पाहिजे. असें करून किं. तीच कोणतीही एकरेघ वाढवून किंवा कोठे तीचे आंत रेघा करून. म्हणजे. जेणें करून इच्छा फळ उत्पन्न होण्यास ती योग्य होईल असें करावें. या प्रमाणें केल्यानंतर जीं अक्षर चिन्हे व्यक्त आणि अव्यक्त पदे दाखवायास घेतात. तीं आकृतीचे वेगळाले भाग दाखवायास घ्यावीं. नंतर पाहावें किं. आकृतीचे वेगळाल्ये भागांच्या परस्पर काय संबंध आहे. मग तो संबंध मनांत धरून आदिकारण भूमितीचे जे सिद्धांत त्या संबंधावर लागू असतील त्यांपासून अव्यक्त अक्षरें आहेत तितकीं समीकरणें करावीं. या समीकरणांचीं पृथक्करणें बीजगणितांत सांगितल्ये रीतीं करून केल्यानें त्या आकृतीचे अव्यक्त अवयव प्रकट होतील.

आकृतींत

आकृतींत रेघ करणें व अवयव पद स्थळीं अक्षर चिन्हें लिहिणें याची सामान्य रीति इछा फळ थोड्यांत निघण्यास सांगतां येत नाहीं . अनुभव होण्यास एककृत्याचें वेगळाल्या रीतीनीं पृथक्करण करावें . त्यांत जी रीति सर्वोत्तम अशी लक्ष्यास येईल त्याच रीतीनें त्या जातींचे कृत्यांची पृथक्करणें करावीं . परंतु पुढें जाविशेष आज्ञा सांगतो त्या कामांत फार उपयोगी पडतील .

१ आकृती सिद्ध करण्यास रेघा करायाच्या त्या आकृतीचे बाजूंशीं समांतर अथवा त्यांजवर लंब अशा कराव्या . किं . त्यांपासून त्या आकृतींत सरूप त्रिकोण होतील . आणि जर कोन सांगितला आहे . तर योग्य आहे किं . त्या कोनाचे समोर सांगितल्ये कोनाचे एक बाजूचे शेवटावर होईल तर लंब करावा .

२ पदें अशीं शोधून काढावीं किं . इच्छिली आहेत किंवा नाहींत . परंतु . जीं आकृतीचे व्यक्त पदांजवळ आहेत . आणि त्यांचे साहाय्यापासून मिळवणीनें अथवा वजाबाकीनें दुसरीं त्यांचे पुढील जवळचीं पदें करणी वांचून निघतील .

३ जेव्हां आकृतींतील दोन रेघा किंवा दोन पदें यांचा त्याच आकृतीचे दुसरे अवयवांशीं समान संबंध आहे . तेव्हां त्या रेघा किंवा तीं पदें हीं कामांत वेगळालीं घेण्याचें अगत्य नाहीं . परंतु . त्यांची बेरीज अथवा गुणाकार किंवा व्युत्क्रम भागाकाराची बेरीज अथवा आकृतींतील रेघ किंवा रेघा . जांचा समान संबंध आहे त्याच .

अशीं

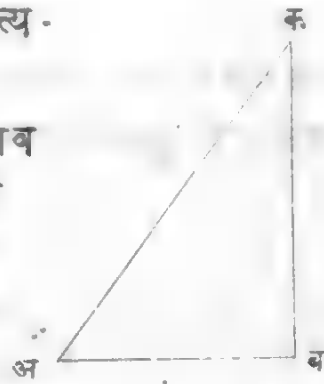
अशीं त्यांचे त्यांचे म्हातीं ठेवावीं .

४ जेव्हां आकृतीचें क्षेत्रफळ किंवा परिमिती सांगितली आहे - अथवा कोणतेही अवयव सांगितले आहेत - जा अवयवांचा अव्यक्त अवयवांशीं दूर संबंध आहे - तेव्हां कदाचित् हें उपयोगी पडेल . जे सांगितल्ये आहेत तींशीं सरूपाकृती दुसरी आकृती करावी . जीची एक बाजू एकली आहे - किंवा दुसरे कोणतेही व्यक्त पदाबरोबर आहे नंतर आकृतीचे राहिले अवयव सरूपाकृतीचे अवयव प्रमाणानें निघतील .

उदाहरणें .

प्रथम कृत्य .

अबक काटकोन त्रिकोणांत अब पाया = ३ आहे - आणि कोटिकर्णाची बेरीज = ९ इतकें मात्र सांगितलें आहे . यावरून कर्ण आणि कोटि यांची बेगळाली लांबी काढायाची -



आतां अब पाया = ३ हें दाखवायास ब अक्षर चिन्ह घे - आणि कोटिकर्णाची बेरीज अक + बक दाखवायास स अक्षर चि-

न्ह

(४)

म्हणे . पुनः अक कर्ण दाखवायास क्ष^{*} अक्षरचिन्ह घे .

आणि बक कोटि दाखवायास य अक्षरचिन्ह घे .

तर प्रश्नाचे संकेताप्रमाणे $क्ष + य = स$

आणि (भू० ३४ सि० प्र०) $क्ष^२ = य + ब^२$

प्रश्नांतील यला स्थळांतरं $क्ष = स - य$ ही क्षचीन केमत दुसरें समीकरणांत क्षचे स्थळी ठेऊन $स^२ - २ स य + य^२ = य + ब^२$ या समीकरणाचे

दोन बाजूंत य रद्द करून $स^२ - २ स य = ब^२$

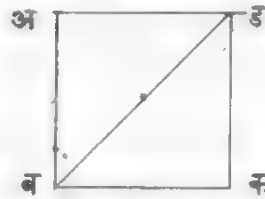
२ स य आणि ब यांस स्थळां $स^२ - ब^२ = २ स य$

२ स याणी भागून $\frac{स^२ - ब^२}{२ स} = य = \frac{८१ - ९}{१८} = \frac{७२}{१८} = ४$

याज करिता $क्ष = स - य = ९ - ४ = ५$

दुसरें कृत्य .

एक चौरस आहे . त्याची एक बाजू आणि कर्णरेघ यांचें अंतर स्पर्शजे वजाबाकी सांगितली . त्यापासून त्याचा बाजू काढायाचें .



* आकृतीचे अवयव बो धार्थ जीं अक्षरें आहेत ती बीजाक्षरां पेक्षा मोठी लिहिली आहेत .

अक

(५)

अक इछिलें बोरस असेल तर बक किंवा कड बाजू = क्ष घे.
 अंतर जर संकेताप्रमाणें बड आणि बक यांचें अंतर = ड घेतला
 तर बड कर्ण = क्ष + ड.

परंतु (भू० ३४ सि० प्र०) बक + कड किंवा २ बक = बड^२
 तेव्हां हें समीकरण उत्पन्न होतें. $२क्ष^२ = क्ष^२ + २डक्ष + ड^२$
 स्थळांतरानें $क्ष^२ - २डक्ष = ड^२$ या समीकरणाचें वर्गसमीक-
 रणरीतीनें पृथक्करण करूं. $क्ष = ड + ड/२$ ही बक बाजूची इछिली किम-
 त आहे. हें उत्तर.

तिसरें कृत्य.

अबकड काटकोन चौकोनाची कणरेघ आणि बाजूंची प-
 रिमिति इतकें सांगितलें आहे. त्यापासून बाजूंची लांबी काढायाचें.



अक कर्णरेघ = ड घे. अर्धपरिमिति अब + बक = अ घे.
 आणि बक पाया = क्ष घे. तर अब उंची = अ - क्ष घे.
 आतां (भू० ३४ सि० प्र०) अब^२ + बक^२ = अक^२
 सणजे $अ^२ - २अक्ष + क्ष^२ + क्ष^२ = ड^२$

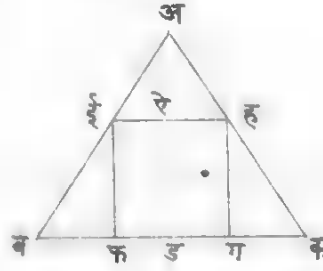
क्ष^२ -

(६)

क्ष^२-अक्ष = $\frac{ड-अ}{२}$ याचें पृथक्करण केल्यावर हें
उत्पन्न होतें $क्ष = \frac{१}{२} अ \pm \frac{१}{२} \sqrt{(२ड-अ^२)}$ यांत अ डहून अधि-
क घेतला पाहिजे - आणि ड/२ याहून उणा घेतला पाहिजे -

चवथें कृत्य-

कोणत्येही अबक सरळरेष त्रिकोणाचा पाया आणि लंब
सांगितला आहे - त्यापासून त्याचे आंतील चौरसाचा बाजू काढायाचें-



ईग आंतील चौरस असेल - बक पाया = ब घे - अड लंब = प
आणि चौरसाची बाजू ईह किंवा ईफ = क्ष घे -

आतां अबक आणि अईह हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत -
याजकरितां (भू० ८४ सि० प्र०)

$$अड : बक :: अरे : ईह$$

$$प : ब :: प-क्ष : क्ष$$

आदि अंतपदें आणि मध्यपदें गुणून हें समीकरण उत्पन्न
होतें -

$$पक्ष = बप - बक्ष$$

स्थळां०

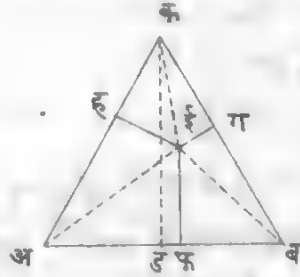
(७)

स्थळां • भागां •

$\text{क्ष} = \frac{\text{बप}}{\text{ब+प}}$ यांत ब आणि प कोणतीही अंक संख्या असेल • पूर्णांक किंवा अपूर्णांक •

पांचवें कृत्य •

अबक एक समबाजू त्रिकोण आहे • त्यांत ई बिंदू पासून ती न बाजूंवर केलेल्ये ईफ, ईग, ईह या तीन लंबांची लांबी सांगितली आहे • त्यापासून बाजू काढायाचें •



आह्मतींत कड लंबकर आणि ईअ, ईब, ईक सांध •
नंतर ईफ = अ घे • ईग = ब • आणि ईह = क घे • आतां बड किंवा रे बक = क्ष घे •

आतां अब बक अक या तीन बाजूंचे प्रत्येकीं = २ क्ष आहेत • याजकरितां (भू० ३४ सि० प्र०) कड = $\sqrt{(\text{अब}^2 - \text{बड}^2)} = \sqrt{(४ \text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^2)} = \sqrt{३ \text{क्ष}^2} = \text{क्ष} \sqrt{३}$

पुनः कोणत्याही सरळ रेषा त्रिकोणाचें क्षेत्रफल त्याचा लंब आणि पाया यांचे गुणाकाराचे अर्धा बराबर आहे • याजकरितां

अबक

(८)

अबक \triangle चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ बक \times कड = क्ष \times क्ष $\sqrt{3}$ = क्ष^२ $\sqrt{3}$

बईक \triangle चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ बक \times ईग = क्ष \times ब = बक्ष

अईक \triangle चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ अक \times ईह = क्ष \times क = कक्ष

अईब \triangle चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ अब \times ईफ = क्ष \times अ = अक्ष

परंतु यांत शेवटील तीन त्रिकोण बईक, अईक, अईब हे मिळून पहिल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर आहेत. याजकरितां

क्ष $\sqrt{3}$ = अक्ष + बक्ष + कक्ष. याचा दोनही

बाजू क्षनें भागून क्ष $\sqrt{3}$ = अ + ब + क.

क्ष = $\frac{अ + ब + क}{\sqrt{3}}$ हें या त्रिकोणाचे को-

णत्येही बाजूचे अर्धाबराबर आहे.

कुरलरी. यापासून कळतें किं कड लंब = क्ष $\sqrt{3}$ हें आहे.

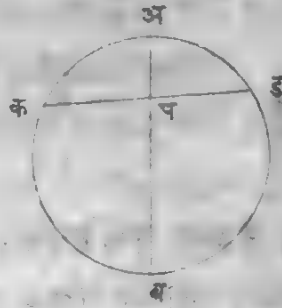
याजकरितां त्याचे = अ + ब + क हें आहे. स्वर्णोन कोणत्येही सम बाजू त्रिकोणांत कोठीलही ई बिंदूपासून तीन बाजूंवर केलेल्ये लंबांची बेरीज त्या त्रिकोणाचे लंबांची बराबर आहे.

साहावें छत्य.

अकबड सांगीतल्ये वर्तुळांत सांगीतल्ये प बिंदूपार सांगीतल्ये लांबी बराबर कड ज्याकरायाचें.

सांगीतल्ये

(९)



सांगीतल्ये पबिंदूपार अपव व्यासकर . आणि कड ज्या= अ घे . अप=व . पव=क आणि कप=क्ष . तर पड=अ-क्ष होईल .

आतां (भू० क्ष० सि० प्र०) कप \times पड = अप \times पव . म्हणजे

$$क्ष \times (अ - क्ष) = व \times क$$

$$अक्ष - क्ष^2 = वक$$

$$क्ष^2 - अक्ष = -वक$$

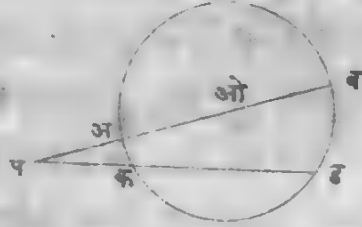
या समीकरणाचे रीती प्रमाणें पृथक्करण करूं . $क्ष = \frac{अ \pm \sqrt{अ^2 - 4वक}}{2}$ यांत क्षचा दोन किंमती आहेत त्या दोन्ही धन आहेत .

सातवें छल्यं .

सांगीतल्ये अबडक वर्तुळाचे बाहेर सांगीतला प बिंदू आहे त्यापासून वर्तुळास छेदनरेघ करायाचें . जा छेदनरेघेचा वर्तुळातील तुकडा सांगीतल्ये लांबी बराबर होईल .

ओ

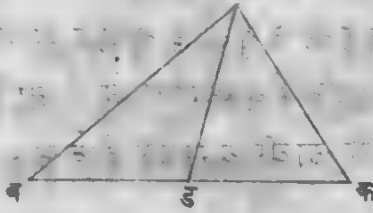
(१०)



ओ वर्तुळमध्यापार पअब एकरेघकर आणि कड = अ
 घे. पअ = ब, पब = क. आणि पक = क्ष, तर पड = क्ष + अ
 आतां (भू० क्षसि० म०) पक × पड = पअ × पब, म्हणजे
 $क्ष \times (क्ष + अ) = ब \times क$
 $क्ष^2 + अक्ष = बक$. या समीकरणाचें पूर्वे
 प्रमाणें पृथक्करण करून $क्ष = -\frac{1}{2}अ \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}अ^2 + बक\right)}$ यांत क्षची
 एक किंमत धन आहे आणि दुसरी किंमत ऋण आहे.

आठवें कृत्य-

कोणत्याही अवक सरळ रेषे विकोणाचा एक पाया आणि
 अव अक या दोन बाजूंची बेरीज आणि त्याचे शिरापासून पायाचे म-
 ध्यापर्यंत केलेली अड रेषा इतकें सांगितलें. या पासून राहिले अव-
 यव काढयाचें.



बड

(११)

बडं किंवा डक = अ घे . अड = ब , अब + अक = स आ
णि अब = क्ष . तर अक = स - क्ष .

आतां (भू० १८ सि० प्र०) अब^२ + अक^२ = २ बड^२ + २ अड^२ .

$$\text{क्ष}^2 + (\text{स} - \text{क्ष})^2 = २\text{अ}^2 + २\text{ब}^2$$

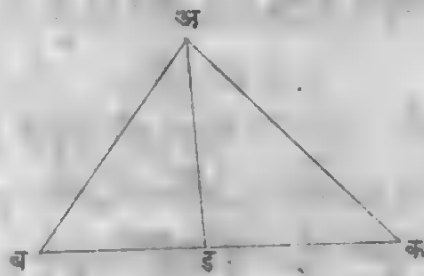
$$२\text{क्ष}^2 - २\text{सक्ष} = २\text{अ}^2 + २\text{ब}^2 - \text{स}^2$$

$$\text{क्ष}^2 - \text{सक्ष} = \text{अ}^2 + \text{ब}^2 - \frac{१}{२}\text{स}^2 \text{ याचें रीती प्रमा-}$$

णें पृथक्करण करून हें होतें $\text{क्ष} = \frac{१}{२}\text{स} \pm \sqrt{(\text{अ}^2 + \text{ब}^2 - \frac{१}{२}\text{स}^2)}$ हें या त्रिको-
णाचे दोन बाजूंची किमत दारववितें . स्त्रणजे एक बाजूची धन किमत
आणि दुसऱ्ये बाजूची ऋण किमत . यांत $\text{अ}^2 + \text{ब}^2$ हें $\frac{१}{२}\text{स}^2$ याहून
अधिक असावें . हें लक्ष्यांत असलें पाहिजे .

नववें कृत्य .

कोणताही एक अबक त्रिकोण आहे . त्याचा अब अक या
दोन बाजू आणि त्याचा शिरकोन दुभागिल्ये ती अड रेघ इतकें सांगी-
तलें आहे . यापासून त्याचा पाया काढायाचें .



अब =

(१२)

अव = अ घे . अक = व . अड = क . आणि बक = क्ष .

आता (भू०८३मि०प्र०) अव : अक :: वड : डक . आणि
(भू०९९मि०प्र०) मिश्रणाने अव + अक : अव :: वड + डक : वड

सणजे $\frac{अ+व}{अ+व} : अ :: क्ष : \frac{अक्ष}{अ+व} = वड$

आणि $\frac{अ+व}{अ+व} : व :: क्ष : \frac{वक्ष}{अ+व} = डक$

परंतु (भू०९९मि०प्र०) वड × डक + अड = अव × अक .

$$\frac{अवक्ष}{अ+व} + क = अव$$

$$\frac{अवक्ष}{अ+व} = अव - क$$

अवक्ष = (अ + व) × (अव - क) या समीकरणाचे प्र-

थकरण करून $क्ष = (अ + व) \sqrt{\frac{अव - क}{अव}}$ ही बक पायाची इच्छी
किंमत आहे .

दाहावें छन्द्य .

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे . त्याचे लघुकोनापासून
त्याचेच समोरचे बाजूचे मध्यापर्यंत केलेल्ये दोन रेषांची लांबी सां-
गीतली आहे . त्यापासून त्याचे तीन बाजूंची लांबी काढायाचें .



अड

(१३)

अडं = अ ये . बई = ब , कड किंवा ३ कब = क्ष , आणि कई किंवा ३ अक = य .

आतां (भू० ३४ सि० प्र०) कड^३ + अक^३ = अड^३ आणि कई^३ + कब^३ = बई^३ .

$$क्ष^३ + य^३ = अ^३$$

आणि

$$य^३ + ४क्ष^३ = ब^३$$

आतां दुसरें समीकरण प्रथम समीकरणाचे चौपटीतून वजा करून हें समीकरण होते .

$$१५ य^३ = ४अ^३ - ब^३$$

$$य = \sqrt[३]{\frac{४अ^३ - ब^३}{१५}}$$

आणि या सारितरयें प्रथम समीकरण दुसर्जे समीकरणाचे चौपटीतून वजा करून हें समीकरण होते .

$$१५ क्ष^३ = ४ब^३ - अ^३$$

$$क्ष = \sqrt[३]{\frac{४ब^३ - अ^३}{१५}}$$

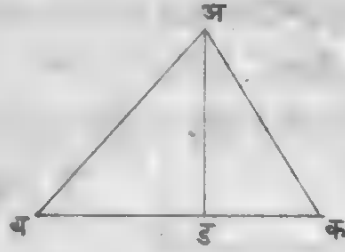
आणि ही क्ष आणि य यांची किंमत अर्धा भुज आणि अर्धश्र कोटी यांचे बरोबर आहे . आणि ब हें २अ याहून कमी आहे . आणि ३अ याहून अधिक असावें .

अकरावें छल्य .

अबक एक सरळ रेघ त्रिकोण आहे . त्याचा दोन बाजू प्रमाणांत आहेत . आणि शिरकोनापासून पायावर केल्या लंबानें पायाचे जालेले दोन खंड इतकें सांगितलें आहे . यापासून बाजू काढायाचें

आतां

(१४)



आतां बडु = अघे . डक = ब . आणि अब = क्ष . अक = य .
आणि अब अक या दोन बाजूंचें प्रमाण . जसा म : नला .

तर प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें अब : अक :: म : न .

आणि (भू० ३५ सि० प्र०) अब^२ - अक^२ = बडु^२ - डक^२ .

क्ष : य :: म : न .

क्ष^२ - य^२ = अ^२ - ब^२

प्रमाणांतील शेवटील आणि मध्य हीं पदे गुणून नक्ष = मय यांत

य = $\frac{नक्ष}{म}$ ही यची किमत दुसरें समीकरणांत ठेवून क्ष - $\frac{नक्ष^२}{म^२}$ = अ^२ - ब^२

(म^२ - न^२) क्ष = म^२(अ^२ - ब^२)

याजकरितां भागाकार आणि वर्गमूल .

क्ष = म $\sqrt{\frac{अ^२ - ब^२}{म^२ - न^२}}$

य = न $\sqrt{\frac{अ^२ - ब^२}{म^२ - न^२}}$ ही अब

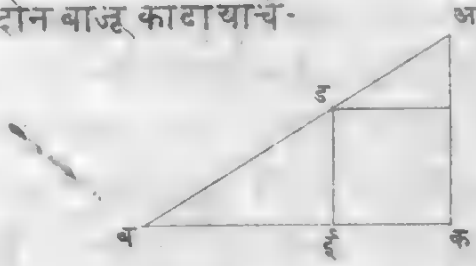
अक बाजूंची इच्छिली किमत जाली .

बारावें कृत्य .

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे . त्याचा कर्ण आणि त्या त्रिकोणांतील

(१५)

त्रिकोणांतील डक चौरसाचा बाजू इतकें सांगितलें आहे - त्या पासून
न राहिल्या दोन बाजू काढायचें -



अब = ह घे - डई किंवा डफ = स - अक = क्ष - आणि
बक = य - तर सरूप त्रिकोणानें - अक : कब :: अफ : फड -

किंवा क्ष : य :: क्ष - स : स - शेवटील प-
दें आणि मध्य पदें गुणून सक्ष = क्षय - सय

$$\text{क्षय} = \text{सक्ष} + \text{सय}$$

$$\text{क्षय} = \text{स}(\text{क्ष} + \text{य}) \text{ हें प्रथम समीकरण -}$$

परंतु (भू० १४ सि० प्र०) अक + बक = अब

किंवा क्ष + य = ह^२ हें दुसरें समीकरण आतां प्रथम स-
मीकरणाची दुपट दुसरें समीकरणांत मिळविली तर हें उत्पन्न होतें -

$$\text{क्ष}^2 + २\text{क्षय} + \text{य}^2 = \text{ह}^2 + २\text{स}(\text{क्ष} + \text{य})$$

किंवा $(\text{क्ष} + \text{य})^2 - २\text{स}(\text{क्ष} + \text{य}) = \text{ह}^2$ या समीकरणाचें वर्गस-
मीकरण शितीनें पृथ० करूं हें होतें $\text{क्ष} + \text{य} = \text{स} \pm \sqrt{(\text{ह}^2 + \text{स}^2)}$

किंवा $\text{य} = \text{स} - \text{क्ष} \pm \sqrt{(\text{ह}^2 + \text{स}^2)}$ ही यची
किंमत प्रथम समीकरणांत यचे स्थळी ठेवून हें होतें -

क्ष

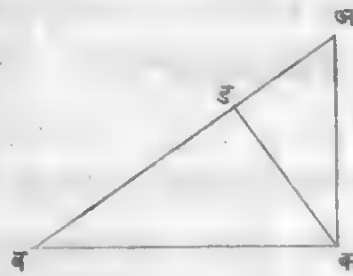
(१६)

क्ष {स-क्ष±√(है+सै)} = स {स±√(है+सै)}
किंवा क्ष- {स±√(है+सै)} क्ष=-स {स±√(है+सै)} या समी-
करणाचें पृथक्करण करून हें उत्पन्न होतें .

क्ष=३ {स±√(है+सै)} ±√ {३ है-३ सै ± ३√(है+सै)}
आणि य=३ {स±√(है+सै)} ±√ {३ है-३ सै ± ३√(है+सै)}
ही अक कोटी आणि बक पाया यांची इच्छिली किमत . हें उत्तर .

तेरावें कृत्य .

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे . त्याची परिमिति
आणि कड लंब . जो अब कर्णावर क काटकोना पासून केला आहे
तो . इतकें सांगितलें . या पासून तीन बाजूंचें वेगळालें परिमाण
काढायाचें .



परिमिती = पये . कड = अ . अक = क्ष . आणि बक = य
अब = प - (क्ष + य)

परंतु (१४सि० प्र०) अक + बक = अब

त्याणजे क्ष + य = प - (क्ष + य) = प - २प (क्ष + य) + क्ष + २क्षय + य

आतां

(१७)

आतां स्थळां० २ याणींभा० $p(क्ष+य) - ३ प^२ = क्षय$ हें प्रथम समीकरण पुनः सरूप त्रिकोणानें अबः बकः : अकः कड - यांतील शोबटपदें आणि मध्यपदें गुणू० अब \times कड = बक \times अक.

अप - अ(क्ष+य) = क्षय हें दुसरें समीकरण हें प्रथम समीकरणाशीं सम करून हें होतें $(अ+प) \times (क्ष+य) = अप + ३ प^२$

यांत

$$क्ष+य = \frac{प(अ+३प)}{अ+प}$$

$$य = \frac{प(अ+३प)}{अ+प} - क्ष \quad \text{आतां क्ष+य आणि य यांची}$$

किमत दुसरें समीकरणांत ठेवून नंतर त्यास अतिसरळरूप देउन पृथक्करण केल्यानें हें उत्पन्न होतें $(अ+प) क्ष - प(अ+३प) क्ष = - ३ अप^२$ या शोबटील समीकरणापासून आणि पूर्व यचे किमती पासून हें उत्पन्न होतें. क्ष किंवा अक बाजू = $\frac{प(अ+३प)}{२(अ+प)} \pm \frac{प}{२(अ+प)} \sqrt{(अ-३प)^२ - २अ^२}$

$$य किंवा बक बाजू = \frac{प(अ+३प)}{२(अ+प)} \pm \frac{प}{२(अ+प)} \sqrt{(अ-३प)^२ - २अ^२}$$

आतां या दोन बाजूंची बेरीज परिमितीतून बजा करून हें होतें.

$$अब = प - (क्ष+य) = \frac{प^२}{२(अ+प)} \quad \text{ही तीस बाजूंची इ-$$

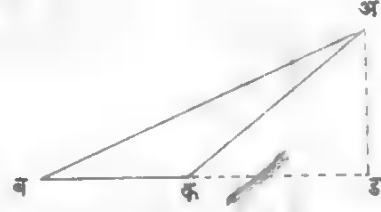
छिली किमत हें उत्तर.

चौदावें कृत्य.

अबक एक विशाळ कोन त्रिकोण आहे. त्याची लंबांची पाया आणि दोन बाजूंची बेरीज इतकें सांगितलें आहे. यापासून राहिल्ये दोन

(१८)

दोन बाजूंचे वेगळाले परिमाण काढायचे.



लंबाची अड = प घे . बक पाया = ब . आणि अब + अक = स .
आणि त्यांची वजाबाकी = क्ष घे .

आतां दोन पदांची अर्धवजाबाकी त्यांचेच अर्धबेरिजेंट मिळ
विली असता मोठा भाग होतो . आणि अर्धवजाबाकी अर्धबेरिजेंट
न वजाकेली असता लहान भाग होतो . याजकरिता

$$\text{अब} = \frac{1}{2}(s + \text{क्ष}) \text{ आणि } \text{अक} = \frac{1}{2}(s - \text{क्ष})$$

$$\text{परंतु (भू० ३४ सि० प्र०) कड}^2 = \text{अक}^2 - \text{अड}^2 \text{ किंवा कड} = \sqrt{\text{अक}^2 - \text{अड}^2}$$

$$\text{कड} = \sqrt{\frac{1}{4}(s - \text{क्ष})^2 - p^2}$$

$$\text{आतां (भू० ३६ सि० प्र०) अब}^2 = \text{बक}^2 + \text{अक}^2 + 2\text{बक} \times \text{कड}$$

$$\text{सणजे } \frac{1}{4}(s + \text{क्ष})^2 = \text{ब}^2 + \frac{1}{4}(s - \text{क्ष})^2 + 2\text{ब} \sqrt{\frac{1}{4}(s - \text{क्ष})^2 - p^2}$$

$$\text{अथवा } s\text{क्ष} - \text{ब}^2 = 2\text{ब} \sqrt{\frac{1}{4}(s - \text{क्ष})^2 - p^2} \text{ या समीकरणाचे दोनही .}$$

बाजूंचा वर्गकरून पदांस स्थळां करावे आणि सरळ रूप देऊन हें उत्पन्न
होतें . $(s^2 - \text{ब}^2)\text{क्ष} = \text{ब}^2(s - \text{ब}) - 4\text{ब}^2 p^2$ अथवा $\text{क्ष} = \text{ब} \sqrt{1 - \frac{4p^2}{s^2 - \text{ब}^2}}$

आतां मिळवणीने आणि वजाबाकीने .

$$\text{अब बाजू} = \frac{s}{2} + \frac{\text{ब}}{2} \sqrt{1 - \frac{4p^2}{s^2 - \text{ब}^2}}$$

अक

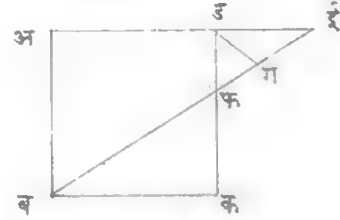
(१९)

$$\text{अक बाजू} = \frac{स}{२} - \frac{ब}{२} \sqrt{१ - \frac{४प^२}{स^२ - ब^२}}$$

या दोन त्या त्रिकोणाचे इच्छित्ये दोन बाजूंचा किमती आहेत हे उत्तर.

पंधरावें छल्य.

बड एक सांगीतलें चौरस आहे. त्याचे कोणत्याही कोनापासून क्षणजे असें एथे ब कोनापासून बफई सरळरेघ करायाची आहे नी अशीकिं. तीचा त्या चौरसा बाहेरील ईफ तुकडा. जो ई पर्यंत वाढविल्ये अड बाजूस ई स्थळावर छेदितो. आणि डक बाजूस फ स्थळावर छेदितो. तो सांगीतल्ये लांबी बराबर होईल.



फई रेघ ग स्थळीं दुभाग. आणि अब किंवा बक = अ घे.
फग किंवा गई = ब. आणि बग = क्ष. तर बई = क्ष + ब होईल.
आणि बफ = क्ष - ब.

आतां काटकोन त्रिकोणानें अई^२ = बई^२ - अब^२

याजकरितां अई = $\sqrt{\text{बई}^२ - \text{अब}^२}$

किंवा अई = $\sqrt{(\text{क्ष} + \text{ब})^२ - \text{अब}^२}$

पुनः बकफ ई अब हे दोन सरूप त्रिकोण आहेत. याजकरितां

भू०

(२०)

(भू०८४सि०प्र०) बफ : बक :: बई : अई .

अथवा क्ष-ब : अ :: क्ष+ब : $\sqrt{(क्ष+ब)^2 - अ^2}$

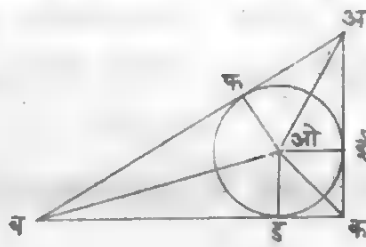
शेवटपदे आणि मध्यपदे गुणू. $अ(क्ष+ब) = (क्ष-ब)\sqrt{(क्ष+ब)^2 - अ^2}$ या समी० या दोनही बाजूंचे वर्ग पदांस स्थ० हें होते $क्ष^2 - २(अ+ब)क्ष + ब^2 = अ^2(क्ष+ब)$ या समी० चे वर्गसमी० प्र० पृथक्करण क० हें होते $क्ष = \frac{\sqrt{अ^2 + ब^2} \pm अ}{\sqrt{(अ+ब)^2}}$ या क्षचे किमती शी बमिळवून बई होत्ये . आणि त्या क्षचे किमतीतून ब व जा करून बफ होत्ये . म्हणजे $बई = \frac{\sqrt{अ^2 + ब^2} \pm अ}{\sqrt{(अ+ब)^2}} + ब$

आणि $बफ = \frac{\sqrt{अ^2 + ब^2} \mp अ}{\sqrt{(अ+ब)^2}} - ब$ या दोन किमती पासून ई आणि फ या दोन बिंदूंची स्थळे कळतात . या जकरिता हें कृत्य पुरें जालें .

यांत जाणावें किं सर्वकाळ ड वर्तुळ मध्यकल्पून ई फ रेघेचें अर्ध त्रिज्या करून वर्तुळ परिघकेल्यास ग बिंदु त्या परिघावर येईल .

सोळावें कृत्य .

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे . त्याची परिमिति आणि आंतील वर्तुळाची त्रिज्या इतकें सांगितलें . या पासून त्या त्रिकोणाचा वेगळाल्या बाजू काढायाचें .



परिमिति

परिमिति = प घे . ओढ किंवा ओई आंतील वर्तुळाची त्रिज्या =
र . अई = क्ष . आणि बड = य .

आतां अईओ आणि अफओ या दोन काटकोन त्रिकोणांत
ओई बराबर ओफ आहे . आणि अओ साधारण आहे . याजकारि-
तां अफ बाजूही अई चे अथवा क्षचे बराबर आहे .

या रीतीने सिद्ध होतें किं बफ बाजू बडचे बराबर किंवा यचे
बराबर आहे .

आतां प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें आणि (भू० १४ सि० प्र०)

$$(क्ष+र)+(य+र)+(क्ष+य)=प$$

$$(क्ष+र)^2+(य+र)^2=(क्ष+य)^2$$

अथवा प्रथम समीकरणाचे पदांची बेरीज घेउन आणि दुसऱ्या स-
मीकरणाचे पदांचा वर्ग करून हें होतें . $क्ष+य = \frac{३}{२} प-र$

आणि $र(क्ष+य) = क्षय-र^2$ यांतील प्रथमस-

मीकरणांत क्षलास्थळां करूं हें होतें $य = (\frac{३}{२} प-र) - क्ष$ ही यची किमत दु-
सऱ्या समी० त यचे स्थळां ठेउन हें होतें $क्ष^2 - (\frac{३}{२} प-र) क्ष = -र(\frac{३}{२} प-र)$

याचें रीतीप्र० पृथक्करण करूं हें होतें $क्ष = \frac{३}{२} (\frac{३}{२} प-र) \pm \sqrt{\frac{९}{४} (\frac{३}{२} प-र)^2 - र(\frac{३}{२} प-र)}$

$$य = \frac{३}{२} (\frac{३}{२} प-र) \mp \sqrt{\frac{९}{४} (\frac{३}{२} प-र)^2 - र(\frac{३}{२} प-र)}$$

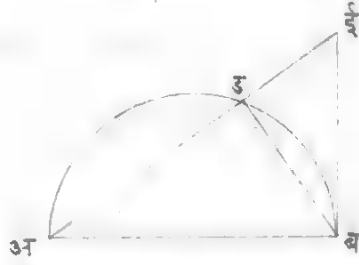
या दोहोंशीं प्रत्येकीं र मिळवून अक = $\frac{३}{२} (\frac{३}{२} प-र) \pm \sqrt{\frac{९}{४} (\frac{३}{२} प-र)^2 - र(\frac{३}{२} प-र)} + र$

$$बक = \frac{३}{२} (\frac{३}{२} प-र) \mp \sqrt{\frac{९}{४} (\frac{३}{२} प-र)^2 - र(\frac{३}{२} प-र)} + र$$

ही त्या त्रिकोणाचा भुज आणि कोटी यांची इच्छिली किमत जाली हें उत्तर-
सत्रावें

सत्रावें कृत्य.

अडब एक सांगीतलें अर्धवर्तुळ आहे. त्याचे व्यासाचे एक शेवटापासून अर्द्धरेघ करायाची आहे. ती अशी किं. जीच्या परिघाचे बाहेरील डई तुकडा. जो त्या व्यासाचे दुसऱ्ये शेवटावर चढविल्या लांबास डई स्थळीं मिळतो. तो सांगीतल्ये लांबीबराबर होईल.



अब व्यास = ड घे. अर्द्ध = अ. आणि डई = क्ष. आणि बड सांध.

आतां (भूं० ५२ सि० प्र०) अडब कोन काटकोन आहे. याजकरितां अबई आणि अबड हे दोन सरूप त्रिकोण आहेत. सणोन.

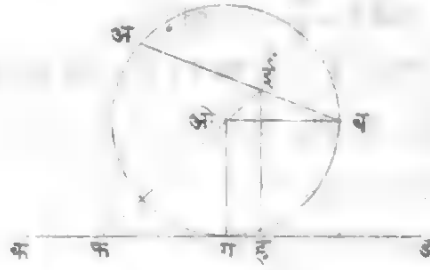
$$\text{अई} : \text{अब} :: \text{अब} : \text{अड}.$$

अथवा क्ष : ड :: ड : क्ष-अ. शेवटीलपदे आणि मध्यपदे गुणून क्ष^२ - अक्ष = ड^२. याचें रीतीप्रमा० पृथक्करण करून हें होतें क्ष = $\frac{१}{२}$ अ + $\sqrt{(\frac{१}{२} \text{अ}^२ + \text{ड}^२)}$ हें उत्तर.

(२३)

अठरावे छल

सांगीतल्ये अ आणि ब या दोन बिंदू पार एक वर्तुळ करायाचें. तें असें किं. सांगीतल्ये स्थितीचे कड रेघेस स्पर्श करील.



अब सांध. आणि इच्छित्ये वर्तुळाचे घेतल्ये ओ मध्यापार अबवर ईफ रेघ लंब कर. तर (भू. ४१ सि. प्र०) ईफ रेघ अब रेघेस ई स्थळीं दुभागील.

पुनः ओब सांध. आणि ईह ओग हे दोन कड वर लंब कर. सणजे ओग रेघ (भू. ४७ सि. प्र०) कड रेघेस स्पर्श स्थळीं मिळेल.

आतां या पासून कळतें किं. अ ई ब ह आणि फ हे सांगीत-ले बिंदू आहेत. तेव्हां ईफ = बघे. ईब = अ. ईह = व. आणि ईओ = क्ष. तर ओफ = ब - क्ष होईल.

आतां ओईब त्रिकोणाचा ई कोन काढकोन आहे. याज कशितां

$$\text{ओब}^2 = \text{ईओ}^2 + \text{ईब}^2$$

$$\text{ओब} = \sqrt{\text{ईओ}^2 + \text{ईब}^2}$$

$$\text{ओब} = \sqrt{\text{क्ष}^2 + \text{अ}^2}$$

परंतु

(२४)

परंतु सरूपत्रिकोणानें.

फई : ईह :: फओ : ओगु . किंवा त्याचे = त्रिज्या ओब . अथवा व : क :: व-क्ष : ओब .

सणजे यांत ओब = $\frac{क}{व}$ (व-क्ष)

आतां ओबचा या दोन किमती परस्पर बराबर करून हें होते .

$\sqrt{क्ष^2 + अ^2} = \frac{क}{व}$ (व-क्ष) या समीकरणाचे दोनही बाजूंचा वर्ग करून आणि पदांस अतिसरळ रूप देउन हें होते .

(व-क) क्ष^२ + २वकक्ष = व(क-अ) या समीकरणाचे पृथक्करण करून हें होते क्ष = $-\frac{वक}{व-क} + व / \frac{क}{(व-क)^2} + \frac{क^2 - अ^2}{व-क}$ ही अब ज्याचे ई स्थळापासून ओ वर्तुळ मध्यापर्यंत ई ओ रेघेची लांबी आहे आणि यांत निश्चय दिसते कि . व कडून अधिक असावा . आणि क अहून अधिक असावा .

कृत्यांची उदाहरणे .

प्रथम

सांगीतल्ये ड व्यासावरील अर्धवर्तुळांतल्ये चौरसाचा बाजू काढायाचे .

उत्तर जे ड $\sqrt{५}$

दुसरें .

एक काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण (१३) आणि राहिल्ये दोन बाजूंची

(२५)

जुंची वजाबाकी (७) इतकें सांगीतलें आहे . या पासून दोन बाजूंची
प्रत्येकीं लांबी काढायाचें*.

उत्तर ५ आणि १२

तिसरें.

जाचा व्यास ड सांगीतला आहे . त्या वर्तुळाचे आंतील आणि
बाहेरील समबाजू त्रिकोणाचा बाजू काढायाचें.

उत्तर $\frac{ड}{२}$ आणि $ड\sqrt{३}$

चवथें.

जाचा व्यास ड सांगीतला आहे . त्या वर्तुळांतील समबाजू
पंचकोनाचा बाजू काढायाचें.

उत्तर $\frac{ड}{२}$ आणि $ड\sqrt{१०-२\sqrt{५}}$

पांचवें.

एक कारकोन चौकोनाचा बाजू काढायाचें . जाची परिमिति
चौरसाचे परिमिती बराबर आहे . जा चौरसाची अ बाजू सांगितली आहे .
आणि त्याचें क्षेत्रफळ त्या चौरसाचे क्षेत्रफळाचे अर्धा बराबर होईल .

उत्तर $अ + \frac{२}{३}$ आणि $अ - \frac{२}{३}$

साहावे.

एक समबाजू त्रिकोणाचे बाजूची लांबी (१०) सांगितली आहे .

* या प्रश्नांत अंकसंख्या जेथे येईल . तेथे अक्षरचिन्हें योजून काम करावे .

तें काम पुरें जाव्यानंतर त्या अक्षरचिन्हांची किंमत उत्तरांत लिहावी .

त्यापासून

(२६)

यापासून त्याचे आंतील आणि बाहेरील वर्तुळांचा त्रिज्या काढायाचें

उत्तर २८८६८ आणि ५७७३६

सातवें.

एक रांबसाची परिमिति (१२) आणि दोन कर्णरेषांची बेरीज (८) इतकें सांगितलें आहे - यापासून कर्णरेषांची वेगळाली लांबी काढायाचें.

उत्तर $8 + \sqrt{2}$ आणि $8 - \sqrt{2}$

आठवें.

एक काटकोन चौकोनाचें क्षेत्रफळ काढायाचें - जाचा कर्ण ^३क्ष भुज ^२क्ष ^२क्ष कोटि ^३क्ष इतकें सांगितलें आहे.

उत्तर १०२९०८५

नववें.

एक रांबायदाचाजवळचा दोन बाजू (अ आणि ब) सांगितल्या आहेत - आणि कर्णरेषेची लांबी ड सांगितली आहे - यापासून दुसरी कर्णरेषा काढायाचें.

उत्तर $\sqrt{2अ^2 + 2ब^2 - ड^2}$

दाहावें.

एक सरळरेषा त्रिकोणाची लंबांची (३००) दोन बाजूंची बेरीज (११५०) आणि पायाचे खंडांची वजाबाकी (४९५) इतकें सांगितलें आहे - यापासून पाया आणि दोन बाजू यांची वेगळाली लांबी काढायाचें

(२७)

काढायाचें-

उत्तर १४५ . ३७५ . ७००

अकरावें-

एक सरळरेघत्रिकोणाचे तीन कोनांपासून त्यांचे समोरचे बाजूंचे मध्यांपर्यंत केलेल्ये तीन रेघांची वेगळाली लांबी १८ . २४ आणि ३० इतकें सांगितलें आहे . यापासून त्या तीन बाजूंची वेगळाली लांबी काढायाचें-

उत्तर २० . २८ . ४४ आणि ३४ . १७६

बारावें-

एक सरळरेघत्रिकोणाचा पाया (५०) क्षेत्रफळ (७९६) आणि बाजूंची वजाबाकी (१०) इतकें सांगितलें आहे . यापासून त्याचा बाजू आणि लंबांची काढायाचें-

उत्तर ३६ . ४६ आणि ३३ . २६१

तेरावें-

एक सरळरेघत्रिकोणाचा पाया (१९४) शिरकोन दुभागित्ये तीरेघ (६६) आणि त्याचे बाहेरील वर्तुळाचा व्यास (२००) इतकें सांगितलें आहे . यापासून राहिल्या दोन बाजू काढायाचें-

उत्तर ८१ . ३६५८७ आणि १५७ . ४३८६९

चोदावें-

एक सरळरेघ काढ कोन त्रिकोण आहे . त्याचे दोन लघुकोनांस

जा

(२८)

जा रेघा दुभागितात त्या (४० आणि ५०) इतकें सांगीतलें आहे. या पासून त्याचा तीन बाजू काढायाचें.

उत्तर ३५.८०७५७ , ४७.४०७२८ , ५९.४९९४३

पंधरावें.

एक सरळरेघ त्रिकोणाची लंबोंची (४) पाया (८) आणि दोन बाजूंची बेरीज (१२) इतकें सांगीतलें आहे. या पासून दोन बाजूंची वेगळाली लांबी काढायाचें -

उत्तर ६+६.५ आणि ६-६.५

सोळावें.

एक सरळरेघ त्रिकोणाचा पाया (१५) क्षेत्रफळ (४५) आणि दोन बाजूंचें प्रमाण जसे २ : ३ दोन तिहींला इतकें सांगीतलें आहे. या पासून दोन बाजूंची वेगळाली लांबी काढायाचें.

उत्तर ७.७९१५ आणि ११.६०७२

सत्रावें.

एक त्रिकोणाची लंबोंची (२४) पायास दुभागित्ये ती रेघ शिरकोनापर्यंत (४०) आणि शिरकोनास दुभागित्ये ती रेघ पायापर्यंत (२५) इतकें सांगीतलें आहे. या पासून त्याचे तीन बाजूंची वेगळाली लांबी काढायाचें -

उत्तर पाया ३५.७७

या पासून राहिल्या दोन बाजू सत्वर निघतील .

अठरावें.

(२९)

अठरावें.

एक काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण (१०) आणि त्याचे दोन दोबरां पासून आंतील वर्तुळाचे मध्यापर्यंत केलेल्ये दोन रेखांची वजाबाकी (२) इतकें सांगितलें आहे . यापासून त्याचा भुज आणि कोटि काढायाचें .

उत्तर ८०८००४ आणि ५८७४४७

एकुणिसावें.

एके वर्तुळांत दोन ज्या काटकोन करून परस्पर छेदितात . त्यांची लांबी (अ आणि ब) आणि त्यांचे छेदन बिंदूपासून वर्तुळमध्या पर्यंत अंतर (क) इतकें सांगितलें आहे . यापासून त्या वर्तुळाचा व्यास काढायाचें .

उत्तर $\sqrt{८(अ^२+ब^२)+२क^२}$

विसावें.

एक समपातळी भूमीवर दोन झाडे आहेत . त्यांचे मध्ये अंतर (१२०) फुट आहे . त्यांत मोठें झाड (१००) फुट उंच आहे . आणि लाहान झाड (८०) फुट उंच आहे . तेव्हां त्या समपातळी भूमीवर एक मनुष्य कोठे उभाराहिला . असा किं . त्या झाडांचीं शिरे आणि त्या शिरांतील अंतर ही तीन परस्पर बराबर होतील .

उत्तर लाहान झाडाचे बुंधापासून $२०\sqrt{२९}$ फुट . मोठ्ये झाडाचे बुंधापासून $४०\sqrt{६}$ फुट .

एकविसावें

(३०)

एकविसावें.

एक वर्तुळांतील बापीज्यमाचा चार बाजू ६, ५, ४ आणि ३ या लांबीचा इतकें सांगितलें. या पासून त्या वर्तुळाचा व्यास काढायाचें.

उत्तर $\sqrt{930 \times 943}$ किंवा ७०५९५९५

बाविसावें:

अ व क हे तीन गांव आहेत. त्यांत अ पासून व पर्यंत अंतर (३०) मैल आहे. आणि व पासून क पर्यंत अंतर (२५) मैल. आणि क पासून अ पर्यंत अंतर (२०) मैल असें आहे. आणि त्या तीन गांवांचे मध्ये घर बांधायाचें आहे. तें असें किं. तेथून तीनही गांवांस अंतर बराबर राहावें.

उत्तर १५१९८५५६ मैल एकेका पासून.

तेविसावें.

अ व क एक समबाहु त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ (१००) आणि जाचा बक पाया अर्धवर्तुळाचे व्यासावर आहे. आणि त्याचा अशिर कोन त्या अर्धवर्तुळपरिघाचे मध्यावर आहे. इतकें सांगितलें. या पासून त्या अर्धवर्तुळाचा व्यास काढायाचें.

उत्तर १०४३

चौविसावें

एक सरळरेष त्रिकोणाची लंबोची (५) आणि त्याचे आंतील

व

(३१)

कबाहेरील वर्तुळांचा दोन त्रिज्या (त आणि थ) इतकें सांगीतलें आहे.
या पासून त्रिकोणाचा बाजू काढायाचें.

$$\text{उत्तर पाया } \frac{२त\sqrt{२पथ-४तब-त^२}}{प-२त}$$

पंचविसावें.

एक सरळरेघ त्रिकोणाचा पाया (२अ) लंबोंची (अ) आणि दो-
न बाजूंचे घनांची बेरीज पायाचे घनाचे तिपटी बरोबर आहे. इतकें
सांगीतलें या पासून बाजूंची बेगळाली लांबी काढायाचें.

$$\text{उत्तर अ } (२+ \frac{१}{६} \sqrt{६} \text{ आणि अ } (२- \frac{१}{६} \sqrt{६})$$



PART V.

PLANE TRIGONOMETRY.

CONTENTS.

	PAGE.
Definitions	1
Trigonometrical Formulæ	36
Heights and Distances	42

पांचवा भाग

सरकरेघ त्रिकोणमिति

अनुक्रमणिका

	५४
व्याख्या	१
त्रिकोणमितिक सारणी कोष्टक	३६
उंची आणि लांबीचीं	४२

सरळरेषत्रिकोणमिति

व्याख्या

१ सरळरेषत्रिकोणमिति सरळरेषत्रिकोणाचा बाजू आणि कोन यांचे गुण आणि हिंसाब दाखविले.

२ प्रत्येक वर्तुळाचा परिघ भूमितीचे ५७ व्या व्याख्येत सांगितले आहे की बरोबर ३६० भागांनी भागिला असे कल्पिले आहे, त्या प्रत्येक भागांस अंश म्हणतात; त्या एक एक अंशाचे बरोबर ६० भाग कल्पिले त्यांस कडा म्हणतात, त्या एक एक कडेचे तसेच ६० भाग कल्पिले त्यांस विकडा म्हणतात, यांतून अर्ध वर्तुळपरिघांत १८० अंश आहेत, आणि वर्तुळपादांत ९० अंश आहेत.

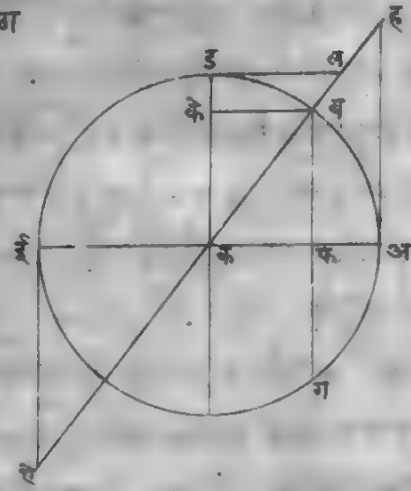
३ भूमितींत ५७ व्या व्याख्येचे पुढे जवळच कोनाचे गुण दाखविले आहेत तेथे त्याचे मापाचा प्रकार कोसावर सांगितला आहे त्याप्रमाणे त्या कोनाचे दोनरेषांचे आतील कोसावर जे अंश कडा आणि विकडा येतील ते त्या कोनाचे माप आहे; आणि कोनबिंदू त्या वर्तुळाचा मध्य आहे. आणि ज्या बभ्रुज्या इत्यादि सर्व वर्तुळाचे गुण भूमितींत लिहिले आहेत; यांतून दिसते की जे वर्तुळपादांचे माप ९० अंश आहेत त्याणीं काटकोन मापतो, आणि सर्व त्रिकोणाचे कोनांची बेरीज दोन काटकोन अथवा १८० अंश आहेत; तेव्हा कोणत्याही काटकोन त्रिकोणांत एक लघु कोनाचे माप ९० अंशांत बजाविले असा, बाकी राहिल ती दुसऱ्या लघु कोनाचे माप होईल; आणि कोणत्याही त्रिकोणांत दोन कोनांची बेरीज १८० अंशांतून बजावून बाकी राहिल ती तिस

(२)

ये कोनाचें माप होईल. अथवा, एक कोनाचें माप १८० अंशांतून वृत्ताकरून बाकी राहील ती दुसऱ्या दोन कोनांची बेरीज होईल.

४ अंश दाखवाया करितां अंकावर उजव्या कडे लाहान भुज्या करितों आणि कडेचे बाजूवर एकरेष आणि विकडेचे बाजूवर दोनरेषा जसें ५७° १२' १२" सणजे ५७ अंश १० कळा आणि १२ विकळा

५ कोणत्याही कोनाचें कांप्लमेंटल तें आहे जी ९० अंश अथवा वर्तुळपाद पूर्ण होण्यास भर लागेल जसें जर अड व वर्तुळपाद आहे तर बड कोस अब कोसाचें कांप्लमेंट आहे आणि उलट अब कोस बड कोसाचें कांप्लमेंटल आहे तेव्हां जर अब कोस ५० आहे तर त्याचें कांप्लमेंटल बड कोस ४० होईल.



६ कोणत्याही कोनाचें संप्लमेंटल तें आहे जी १८० अथवा अर्धवर्तुळ पूर्ण होण्यास भर लागेल, जसें अडई अर्धवर्तुळ असेल तर बडई कोस अब कोसाचें संप्लमेंट आहे; आणि त्याचे उलट अब कोस बडई कोसाचें संप्लमेंट आहे, जर अब कोस ५० आहे तर बडई कोस १३० होईल.

७ कोनाचे एक शेवटापासून पार गेल्या व्यासावर त्याच कोनाचे दुसऱ्या शेवटापासून एक लांब आहे तो त्या कोनाची भुज्या होय; जसें बफ रेषा अब कोसाची भुज्या; अथवा त्याचा संप्लमेंटल बडई कोस आहे त्याची भुज्या होय

होय यांतून दिसतें बफ भुजज्या बअग कौसाचे बग ज्याचे अर्धी आहे.

८ कोणत्येही कौसाची भुजज्या व्यासास जेथें स्पर्शत्ये तेथून त्याच कौसाचे दुसऱ्ये शेवटापर्यंत जो व्यासाचा तुकडा आहे त्यास शर स्पर्शनात. जसें अब कौसाचा शर अफ आहे, आणि ईडुब कौसाचा शर ईफ आहे.

९ कौसाची स्पर्शरेष ती होय, जी वर्तुळास त्या कौसाचे एक शेवटावर स्पर्श करून वाढली, अशी की वर्तुळ मध्यापासून निघोन त्याच कौसाचे दुसऱ्ये शेवटास लागून पारगेत्ये रेषेस मिळत्ये; आणि या शेवटील रेषेस त्या कौसाची छेदनरेष स्पर्शनात. जसें, अद कौसाची स्पर्शरेष अह आहे, आणि कह त्याची छेदनरेष आहे पुनः बडुई सप्लमेंटल कौसाची स्पर्शरेष ईऐ आहे, आणि कऐ छेदनरेष आहे. या शेवटील स्पर्श छेदन रेषा पूर्व स्पर्श छेदन रेषांचे बरोबर आहेत; परंतु यांस ऋण स्पर्शनात, कारण या पूर्वरेषांचे दुसऱ्ये दिशेस आहेत.

१० कोणत्येही कौसाची को भुजज्या, को स्पर्शरेष, आणि को छेदनरेष, ती होय. जी त्याचे कांलमेंटल कौसाची भुजज्या, स्पर्शरेष, आणि छेदनरेष, आहे. कांलमेंटल शब्दाचा संकोच करून कोलपून लिहिलें; जसें, अब आणि बडु हे कौस परस्पराने कांलमेंटल आहेत याज करितां, एकाची भुजज्या, स्पर्शरेष, छेदनरेष, ती अनुक्रमें दुसऱ्याची को भुजज्या, को स्पर्शरेष, आणि को छेदनरेष, होय जसें बफ रेप अब कौसाची भुजज्या, तसें ती बडु कौसाची को भुजज्या; आणि बफ, बडु कौसाची भुजज्या, ती अब कौसाची को भुजज्या होय. याप्रमाणें अह रेप अब कौसाची स्पर्शरेष आहे, ती बडु कौसाची को स्पर्शरेष होय, आणि डल रेप बडु कौसाची स्पर्शरेष आहे, ती अब कौसाची को स्पर्शरेष हो

यः पुनः कहरेष अब कौसाची छेदनरेष आहे, ती बड कौसाची को छेदनरेष होय; आणि कल रेष, बड कौसाची छेदनरेष आहे, ती अब कौसाची को छेदनरेष होय.

कुरलरी या व्याख्यांवरून कित्येक फार उपयोगी गुण स्वल्पानें नकट होतार्हे.

प्रथम, कोणताही कौस आणि त्याचा सप्लुमेंटल यांची भुजज्या स्पर्शरेष आणि छेदनरेष बराबर आहे; परंतु शेवटील दोन रेखा स्पर्शरेष आणि छेदनरेष यांस ऋण स्पर्शतान. जेव्हां, तो कौस वर्तुळपाद अथवा ९० अशां हून अधिक आहे.

दुसरा. जेव्हां कौस ० शून्य आहे तेव्हां भुजज्या आणि स्पर्शरेष ० शून्य होत्ये; आणि छेदनरेष, कऒ बिज्याचे बरोबर आहे, ही छेदनरेष याहून लाहान होतनाहीं. जसा ० शून्यापासून कौस वाढतो, तशी भुजज्या, स्पर्शरेष, आणि छेदनरेष, हीं सर्व अनुक्रमें वाढतान, कौस अब वर्तुळपाद पूर्ण होयपर्यंत; तेसमयीं भुजज्या, बिज्या बराबर होत्ये, ती याहून अधिक होतनाहीं. तेसमयीं स्पर्शरेष, आणि छेदनरेष, अनंत लांब होत्ये.

तिसरा, कोणताही अब कौस आहे, त्याचा शर अफ, आणि कोभुजज्या बके, अथवा फक, सर्वत्रिकोन अक बिज्याचे बराबर आहे अक बिज्या, अह स्पर्शरेष, आणि कह छेदनरेष, यांपासून कऒह एक काटकोन त्रिकोण होतो; याप्रमाणें बिज्या भुजज्या आणि कोभुजज्या यांपासून दुसरा एक काटकोन त्रिकोण कफब, अथवा ककेब आणि बिज्या कोस्पर्शरेष को छेदनरेष यांपासून एक कडुल काटकोन त्रिकोण होतो; हे सर्व काटकोन त्रिकोण

त्रिकोण परस्पर सरूप आहेत.

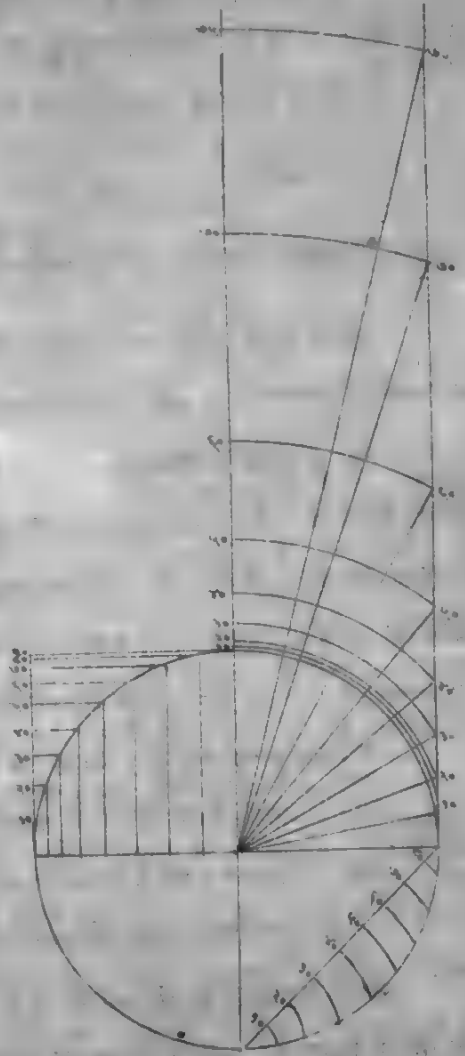
११ कोण त्याही कोनाची भुजज्या, स्पर्शरेष आणि छेदनरेष, ती आहे जी त्या कोनास मापत्ये कोसाची आहे; तसे या कोसाचे माप जे अंश कडा आणि विकडा आहेत त्या मापाची ती तीच होय.

१२ बाजूवरची आकृती दाखविल्या की, कूपासपेटीत ज्या स्केल, भुजज्या स्केल, स्पर्शरेष स्केल, आणि छेदनरेष स्केल, ही आहेत तीं कोणत्यारीतीने करितात ते.

१३ त्रिकोणमिति कोष्टक तेच आहेत, जे वर्तुळपादांत दर एक कडा विकडा जा आहेत त्यांची वेगळाली भुजज्या स्पर्शरेष आणि छेदनरेष यांची लांबी दाखवितात; एकमेक त्रिज्याचे प्रमाणाने भूज्या वाचून या भुजज्या स्पर्शरेषा आणि छेदनरेषा यांचे लायतंमही कोष्टकांत लि

हिले आहे, हे लायतंम बहुत कामांत घेतात, कारण, सरळभुजज्याने गुणित कर

आणि



(६)

आणि भागाकार करायाचे ते लाग्रतंभानें मिळवणी आणि वजावाका केल्या-
नें स्वत्यांत होतात. लाग्रतंभभुज्या लाग्रतंभस्पर्शरेष आणि मरळ संख्यांचें
लाग्रतंभ यांचें कोष्टक मिळण्यास सुलभ आहेत.

प्रथम कृत्य

कोणत्याही सांगीतत्ये कौसाची स्वाभाविक भुज्या आणि कोभुज-
ज्या यांची स्वाभाविक लांबी काढायाचें.

या कृत्याचें पृथक्करण अनेकरीतींनीं होतें. त्यांतून एकरीति पुढें लि-
हितो, सणजे वर्तुळाचा व्यास आणि परिघ यांचे गुणोत्तराचे आणि भुज्या
कोभुजज्यायांचे कळलेल्ये श्रेणीचे साहाय्यानें. जा श्रेणीची सत्यता पुढें दा-
खविली जाईल. आतां जा वर्तुळाची त्रिज्या १ आहे, त्याचा अर्धापरिघ
३.१४१५९२६५३५८९७९३ इत्यादि आहे, याजकरितां हें ममाण होईल.

जशी, अर्धवर्तुळांत अंश अथवा कडा यांची संख्या,

सांगीतत्ये कौसाचे अंश अथवा कडा यांचे संख्येस आहे.

तसे, ३.१४१५९२६५३५८९७९३ हे,

त्या सांगीतत्ये कौसाचे लांबीस होतील.

सांगीतत्ये कौसाची लांबी दाखवायास अ, घे; त्याची भुज्या आ-
णि कोभुजज्या या दाखवायास स आणि क घे; तेव्हां स आणि क यांचा
किमती यापुढील श्रेणींत आहेत.

(७)

$$स = अ - \frac{अ^2}{२ \cdot १} + \frac{अ^3}{२ \cdot १ \cdot ४ \cdot ५} - \frac{अ^4}{२ \cdot १ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६ \cdot ७} + \text{इत्यादि}$$

$$= अ - \frac{अ^2}{२} + \frac{अ^3}{१२०} - \frac{अ^4}{५०४०} + \text{इत्यादि}$$

$$क = १ - \frac{अ^1}{२} + \frac{अ^2}{२ \cdot १ \cdot ४} - \frac{अ^3}{२ \cdot १ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६} + \text{इत्यादि}$$

$$= १ - \frac{अ^1}{२} + \frac{अ^2}{२४} - \frac{अ^3}{७२०} + \text{इत्यादि}$$

उदाहरणें

प्रथम, एकक के ची ज्या आण के भुज ज्या काटायास इछिती आहे

आतां १०० अंशांत १०८०० कळा आहेत, याज करितां

अशा १०८०० : १ : : ३१४१५९२६५ इत्यादि : ०००२९०८८८२०८६५५ = १ कळे

ये कौसाची लांबी.

याज करितां या उदाहरणात अ = ०००२९०८८८२,

आणि $\frac{१}{२} अ^२ = ००००००००००४$ इत्यादि

यांची वजाबाकी लणजे स = ०००२९०८८८२ ही एकक के ची भुज ज्या

ची स्वाभाविक लांबी आहे.

पुनः १.

या पासून

$\frac{१}{२} अ^३ = ०००००००००४२३०७९$ इत्यादि वजा करून बाकी

राहिती क = ००९९९९९९९५७७ ही एकक के ची भुज ज्या आहे हें उत्तर

दुसरे

(८)

दुसरे, ५ अंशों की भुज्या आणि कोभुज्या यांची स्वाभाविक लांबी काढायस इच्छिली आहे.

एथे जसे $90^\circ : ५^\circ :: ३१४१५९२६५$ इत्यादि : $००७२६६४६ = ७७$ ही ५ अंशों की लांबी.

$$\text{याजकरितां अ} = ००७२६६४६$$

$$- \frac{9}{६} \text{अ}^३ = ०००११०७६$$

$$+ \frac{9}{१२०} \text{अ}^५ = ०००००००४$$

यांस एकत्र करून स = ००७१५५७४ ही ५ अंशों की भुज्या आहे.

$$\text{पुनः } १ = १$$

$$- \frac{9}{२} \text{अ}^३ = ००३८०७७१$$

$$+ \frac{9}{४८} \text{अ}^५ = ००००००२४१$$

यांस एकत्र करून क = ००९२६१९४७० ही पांच अंशों की कोभुज्या आहे हें उन्नर

पारीतीनें कोणत्याही दुसरे कोमा की भुज्या आणि कोभुज्या यांची लांबी काढेल. परंतु, कोस जितका मोठा असेल तितकी श्रेणीची पदे हळु हळु वाढतात. याजकरिता त्यांची बरोबर स्वाभाविक लांबी काढायस श्रेणीची पदे याहून अधिक कामांत घेतली पाहिजेत, अशा की लांबी. सत्य लांबीचे जवळ जवळ येईल.

अथवा भुज्या की लांबी काढिल्यानंतर कोभुज्या, कबूफ कारको न त्रिकोणाचे गुणापासून निघेल. म्हणजे कोभुज्या कफ = $\sqrt{\text{कबू} - \text{वफ}}$,
अथवा कफ = $\sqrt{१ - \text{स}^२}$,

दुसरे

दुसरें कृत्य

सांगीतल्ये कौसांचा स्वाभाविक स्पर्शरेषा आणि छंदनरेषा काढायाचें.
पूर्वकृत्यरीतीनें भुजज्या आणि कौभुजज्या या कळल्यावर सरूपत्रिको
णाचें गुणांपासून स्पर्शरेषा आणि छंदनरेषा या पुढीलरीतीनें स्वल्पांत निघतील.
प्रथम आहूतींत अब कौमाची भुजज्या वफ आहे, याची कौभुजज्या
कफ अथवा बके आहे, स्पर्शरेषा अह आहे, छंदनरेषा कह आहे, कौस्पर्श
रेषा डल आहे, कौछंदनरेषा कल आहे, आणि वतुंकाची त्रिज्या कअ अथ
वा कड किंवा कब आहे, आतां कफब, कअह, आणि कडल या तीन सरू
प त्रिकोणांपासून हीं पुढील प्रमाणें निघतात.

प्रथम, कफ : फब : : कअ : अह, म्हणजे यारीतीनें स्पर्शरेषा
कळत्ये, म्हणोन स्पर्शरेषा, कौभुजज्या भुजज्या आणि कअ त्रिज्या यांचें वतु
प्रमाण आहे.

दुसरें, कफ : कब : : कअ : कह, म्हणजे यारीतीनें छंदनरेषा क
ळत्ये, म्हणोन छंदनरेषा, कौभुजज्या आणि त्रिज्या यांचें तिसरें प्रमाण आहे ;
जेव्हां त्रिज्या १ आहे, तेव्हां ती कौभुजज्याचा व्युत्क्रम आहे.

तिसरें, बफ : फक : : कड : डल, म्हणजे यारीतीनें कौस्पर्शरेषा
कळत्ये, म्हणोन ती, भुजज्या कौभुजज्या आणि त्रिज्या या तिहींचें वतु प्रमाण
आहे.

अथवा

अथवा, अहः अकः : कडः डल, स्पर्शने थातून कळते को
कोस्पशरिष, स्पर्शरिष आणि त्रिज्या यांचे तिसरे प्रमाण आहे :

अथवा जेव्हा त्रिज्या १ आहे तेव्हा ती, स्पर्शरेषेचा व्युत्क्रम आहे :

चौथे, बफः बकः : कडः कल, स्पर्शने यातीतीने कोछेदनरेष
कळते, स्पर्शने ती, भुजज्या आणि त्रिज्या यांचे तिसरे प्रमाण आहे, अथ-
वा जेव्हा त्रिज्या १ आहे तेव्हा ती, भुजज्याचा व्युत्क्रम आहे.

कोष्टकांत लागतंमिक भुजज्या स्पर्शरेषा आणि छेदनरेषा लिहिल्या
आहेत, त्या पूर्वशतीने निघालेल्या स्वाभाविक भुजज्या स्पर्शरेषा आणि छेदन-
रेषा यांचे लागतंममात्र आहेत.

भुजज्या आणि स्पर्शरेषा यांचे लागतंमकोष्टकांचे लक्षण.

कोष्टकपत्रकांत डाव्येकडील प्रथम कोष्टकांत एकामागे एक या अनुक्रमे
एककडेपासून एक एक कडेचे सर्व कोस अथवा कोन जे वर्तुळपादांत आहेत ते
लिहिले आहेत; स्पर्शने वरपासून रवाली उतरने ४५ अंश पर्यंत. तसे पंचेताळी
सांपासून ९० पर्यंत वरचढते अंश पत्रकांत वर व रवाली लिहिले आहेत; आणि
कळा डावेकडे व उजव्येकडे लिहिल्या आहेत. भुजज्या कोभुजज्या स्पर्शरेषा कोस्प-
शरिष यांचे लागतंम त्यांचे नावाबरोबर त्यात्या कळाचे समोर लिहिले आहे;
स्पर्शने त्यांची नावे पंचेताळीस पर्यंत वर लिहिली आहेत व पुढे ९० पर्यंत रवाली
लिहिली आहेत.

छेदनरेषा आणि कोछेदनरेषा या कोष्टकांत न लिहिली; याचे कारण भुज-
ज्या आणि कोभुजज्या यांपासून थाउणा युक्तीने निघते.

हर एक कौस अथवा कोनाची भुज ज्या आणि कोउदनरेष मिळून २० होतात. स्पर्णजे हे त्रिज्याचे दुपट आहेत; आणि त्या कौसाची अथवा कोनाची कोउदनरेष आणि कोउदनरेष मिळून त्याचे बराबर २० होतात; तेव्हां जर कोउदनरेष होत नाही तर कोभुज ज्या विसांतून वजा करावी स्पर्णजे बाकी राहिल ती कोउदनरेष जातील; आणि कोउदनरेष असावी तर विसांतून भुज ज्या वजा करावी स्पर्णजे बाकी राहिल ती कोउदनरेष जातील; आणि वजा बाकी करायाची हीरीति सर्वांहून उत्तम आहे; जेडावेकडील कोनावर जो अंक आहे तेथून आरंभ करून सर्व अंक नवांतून वजा करावे शक्य असतो. कोनावर जो अंक आहे तेथून दोहांतून वजा करावा; नंतर प्रथम अंकाचे डावेकडे एकाचा अंक लिहावा.

वर भुज ज्या स्वर्शरेषा आणि कोउदनरेषा या कशा उत्पन्न कराव्या आणि कामांत कशा घ्याव्या हे सर्व सांगितले; याजकरितां त्रिकोणमितीचे पृथक्करणेचे वेगळाले प्रकार आरंभितो; परंतु पृथक्करणे प्रकट करण्यास उपयोगी कांही गोष्टी पूर्वी सांगायाम योग्य आहेत त्या सांगतो.

१ टीप त्रिकोणाचे अवयव काढायाचा गती ३ आहेत. भूमितिकृत्याने गणितहिंसावाने, आणि स्केलसंबांने;

प्रथमरीतीत सांगितले अवयवांचे मापपासून त्रिकोण उत्पन्न होतात. स्पर्णजे रेषा स्केलापासून वाटू आणि कोणत्याही कोन स्केलापासून कोन. तेव्हा अव्यक्तपटें त्याच स्केलानी मापून तत्पटेंचे जवळ जवळ कळतील; दुसरी गतीत प्रमाणांची पटें सांगितले गतीने किंवा मि हात प्रमाणें थळाव्याने देवून यांपासून स्वाभाविक अंकांत वतुः प्रमाण इच्छाकळ उत्पन्न करावे. स्पर्णजे

दुसरें आणि तिसरें. ही परस्पर गुणून प्रथमानें भागून. अथवा लाग्रतमा वरून हिंसाब करणेंतर दुसरें आणि तिसरें यांचे लाग्रतमांची बेरीज घेउन त्यांतून प्रथमाचें लागतम वजा करावें. स्मरणजे बाकी राहिल्ये लागतम अंशासून निघाली त्या भाविक संख्या त्या तीन पदांचें चतुःप्रमाण इ. आणखी उत्पन्न होईल. तिसरें शितीत यंत्रांत लाग्रतम स्केल दोन एत आंकणीवर आहे. आतां कृपास उघडून त्याचें एक टोंक त्या स्केलावर आदीची संख्या पुरी जाली तेथें ठेउन दुसरें टोंक त्याची सभ जाति अंत संख्या जेथें पुरी जाली तेथें ठेव आणि तें माप घेउन नंतर दुसरें जातीच्या सांगीतला अवयव आहे त्याची संख्या पुरी होईल तेथें एक टोंक ठेउन दुसरें टोंक जेथें येईल तेथपर्यंत माप चौथें पद होईल.

जर आदिस्थानी अंक अधिक आहेत आणि अंतस्थानी थोडे आहेत तर आदिस्थानीचे अंक पुरे होनील तेथें स्केलावर एक टोंक ठेउन दुसरें टोंक त्याचे डावेकडे स्केलावर अंतस्थानीचे अंक समाप्त होताना तेथें ठेउन माप घ्यावें. नंतर दुसरें जातीचे सांगीतले अवयवाची माप संख्या पुरी होईल तेथें एक टोंक ठेउन दुसरें टोंक त्याचे डावेकडे देयावें. तें माप चौथें पद होईल.

२. टीप प्रत्येक त्रिकोणास साहा अवयव आहेत. स्मरणजे १ बाजू आणि १ कोन. आतां कोणत्याही त्रिकोणाचे १ अवयव सांगितले असतां राहिले १ अवयव सांगितल्याचे आभागनें काढितां येतात; परंतु सांगितल्या १ अवयवांत एक बाजू अगत्य असावी. कारण बरोबर कोनांनीं बाजू लाहानें किंवा लाटी असत.

टीपु, प्रत्येक त्रिकोणमितीचे सर्वप्रकार या पुढील तीन प्रकारांत आ-

हेत.

प्रथमप्र० जेव्हा एक बाजू आणि तिचे समोरचा कोन सांगितला आहे.

दुसराप्र० जेव्हा दोन बाजू व त्यांचे आतील कोन सांगितला आहे.

तिसराप्र० जेव्हा तीन बाजू सांगितल्या आहेत.

म्हणजे या तीन प्रकारांशिवाय आणखी होण्यास अशक्य याजकृतिता या प्रत्येक प्रकाराचे पृथक्करण करायास वेगळ्याने सिद्धांत पुढे मागतो.

प्रथम सिद्धांत

जेव्हा सांगितल्ये अवयवांत एक बाजू आणि तिचे समोरचा कोन आहे.

तेव्हा जे अवयव अभ्यक्त आहेत ते या सिद्धांतांनी काढितां येतील. म्हणजे जसें त्रिकोणाचा बाजू परस्परान्वर प्रमाण ठेवितात, तसें त्या बाजूचे समोरचे कोनांचा भुजज्या ही प्रमाण ठेवितात.

म्हणून जसें कोणती एक बाजू.

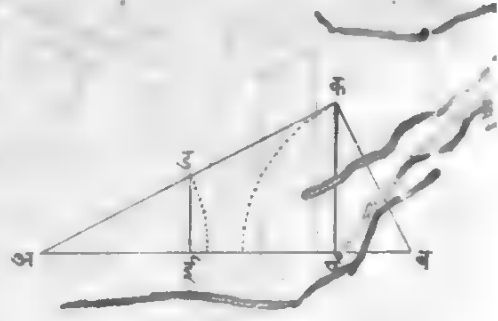
तिचे समोरचे कोनाचे भुजज्यास होईल.

तसें कोणतीही दुसरी बाजू.

तिचे समोरचे कोनाचे भुजज्यास होईल.

विवरण, अबक सांगीतला

त्रिकोण असावा, जाची अतिसोटी बाजू
अब आहे, आणि अतिलाहान बाजू
बक. आतां बक त्रिज्या केलून तीचे
बरोबर अड घे; आणि दुई कफ हे



अब रेघेवर लंब उतार, स्पर्शजे स्पष्ट

आहे कीं या दोनरेषा अ आणि ब या दोन कोनांचा भुजज्या आहेत, अड
आणि बक या त्रिज्यानीं, आतां अडई अकफ हे दोन त्रिकोण समकोन
आहेत; याजकरितां त्यांचा सजाति बाज स्पर्शजं अक : कफ : : अड किं-
वा बक : दुई, स्पर्शोन अक बाजू तीच समोरचे कोनाचे भुजज्याला आहे,
जशी बक बाजू तीचे समोरचे अ कोनाचे भुजज्याला आहे, हें सिद्ध.

प्रथम टीप, हिंसाब कर्त्ये समयां अप्रकट कोनाची इच्छा आहे. तेव्हां
सांगीतल्ये कोनासमोरचे बाजूपासून प्रमाण आरंभ करावा; आणि जेव्हां
अप्रकट बाजूची इच्छा आहे, तेव्हां, सांगीतल्ये बाजूसमोरचे कोनापासून
प्रमाण आरंभ करावा.

दुसरी टीप, यारीतीवरून कोन काढितात, परंतु हा लघु कोन किं-
वा विणालकोन असा भ्रम राहातो. शिवाय काटकोन किंवा अतिसोटा वि-
णालकोन, कीं जेथें लघु कोन होण्याचा संभव नाही. कारण, सांगीतल्ये को-
नाची भुजज्या दोन कोनाची भुजज्या होत्ये, जे दोन कोन परस्पर संपूर्णमेंट आ-
हेत. याजकरितां भूमिती कृत्यरीतीनें या पुढील सांगीतल्या अवयवांपासून

दोन

(१५)

हेर त्रिकोण होतात; तेव्हा लघुकोन किंवा विशाळकोन हे मुळाचे सांगीतल्या गांभून निश्चय होणार नाही. लाग्रतम कोणकांत अंश व कळा यांचे समोर जें भुज्या लाग्रतम लिहिलें आहे, तें लघुकोनाचें होय; याजकरितां जर विशाळकोन येणारा आहे असा निश्चय कळला असेल तर त्या लघुकोनाचें अंश कळादि घेऊन 180° तून वजा करावें म्हणजे बाकी राहील तें त्या विशाळकोनाचें माप होईल. जेव्हां सांगीतला कोन कोटकोन किंवा विशाळकोन आहे तेव्हां भूमि राहांत नाही, कारण बाकीचे दोन कोन लघुकोनच होतील, कधींही त्यांत विशाळ होउंसकत नाही. भूमिती कृत्यरीतीनें एकच त्रिकोण होतो.

उदाहरणें

प्रथम, अबक हा सरळरेष त्रिकोण आहे.

सांगीतले अवयव	{	अब	३४५	यार्ड
		बक	२३२	यार्ड
		अ	३७° २०'	

यांपासून अव्यक्त अवयव काढायाचे

प्रथम भूमिती कृत्यरीतीनें.

• एक सरळरेष कर. तिजवर अब म्हणजे ३४५, कोणत्याही रेषेकला वरून कर; नंतर अ कोन म्हणजे $37^\circ \frac{2}{3}$ चा कोन कर; नंतर त्या पूर्वरेषेकला वरून २३२ माप कृपासांत घेउन ब शेवट मध्यमानून वरत्ये आंगाम

एक

एक कोस कर, असा कीं, अक रेघेस दोन स्थळीं छेडील, या दोनी छेडीस वि-
दूपासून ब शेंवटपर्यंत दोन सरळरेघा कर, एणजे यावरून दोन त्रिकोण हो-
तील; जे या त्रिकोणाचे वृत्तांतान्त भ्रम करितात.

तेव्हां अक दोन बाजू रेघे स्केलावरून आणि ब कोन ज्या स्केल अथ-
वा दुसरे कोण तेही स्केल जावरून कोन मापितात त्यावरून मापसहित प्रकट
होईल; एणजे या उदाहरणीं याप्रमाणें आहे.

अक १७४ \angle ब 20° \angle क $99^\circ \frac{1}{2}$
अथवा $274 \frac{1}{2}$ अथवा $360^\circ \frac{1}{2}$ अथवा $68^\circ \frac{1}{2}$

दुसरे गणित शितीने.

प्रथम क कोन काढावयाचा.

जसें बक बाजू २३२	लाग २३६५४८८
त्याचे समोरचा कोन अ, $39^\circ \dots 20'$ याचे भुज ज्यास होईल	$9^\circ 30' 29.96$
तसें अब ३४५, ही बाजू	$2^\circ 43' 39.99$
त्याचे समोरचे क कोनाचे भुज ज्यास होईल	$9^\circ 54' 59.29$
\angle क $68^\circ \dots 24'$ अथवा $99^\circ \dots 36'$	
\angle अ $39^\circ \dots 20'$	$39 \dots 20$
वेरीज $909 \dots 88$	$942 \dots 46$
पांनून वजा १८०	$900 \dots$
बाकी = $30 \dots 96$ अथवा	$20 \dots 4$
ब कोन	

अक बाजू काढायाची

जमिनी पकोन २७ . . . २६ याची भुजज्या .	लाग १७८२७१६
त्याचे समाचे बक ३३३ या बाजूस होत्ये .	२२६५४८८
तसे \angle ब { ७८ : १६ } या कोनाची भुजज्या .	१६५८०१७ १९९०८२९
त्याचे समोरचे अंश १७४.०७ बाजूस होईल .	२२४०७२९
अथवा २८४.५६	२५७३५२१

तिसर्ये यंत्राचे शीतीने

प्रथम प्रमाणांत कूपासाचे एक टोंक संख्या रेषस्केलांत २२२ चे खुणेवर ठेवावे, आणि दुसरें टोंक पुढें ३४५ चे खुणेवर ठेवावे; नंतर त्या मापाचे त्या कूपासाचे एक टोंक ज्या स्केलावर $२७^{\circ}\frac{१}{२}$ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक $६४^{\circ}\frac{१}{२}$ चे खुणेपर्यंत जाईल म्हणजे त्या मानाचा कोन आला .

दुसरें प्रमाणांत कूपासाचे एक टोंक भुजज्या स्केलावर $२७^{\circ}\frac{१}{२}$ जेथें पुरे होतात तेथें ठेउन दुसरें टोंक २७ अथवा $७८^{\circ}\frac{१}{२}$ याजवर ठेवावे नंतर त्या मापाचे त्याच कूपासाचे एक टोंक रेषस्केलावर २२२ जेथें पुरे होतात तेथें ठेउन दुसरें टोंक १७४ अथवा $३७४^{\circ}\frac{१}{२}$ यांजपर्यंत जाईल म्हणजे तें अक बाजूचें माप होईल .

दुसरें

(१८)

दुसरें उ० अबक, हा एक सरळरेष त्रिकोण आहे.

सांगितले अवयव	{	अब	३६५	चाई
		∠अ	५७°	१२
		∠ब	२४°	४५

यांपासून अप्रकट अवयव कायनिघतात.

उत्तर	{	∠क	९८°	३
		अक	१५४	१३
		बक	३९९	८६

तिसरें उ० अबक, हा सरळरेष त्रिकोण आहे.

सांगितले अवयव	{	अक	१२०	फुट.
		बक	११२	फुट.
		∠अ	५७°	२८

यांपासून अप्रकट अवयव कायनिघतात.

उत्तर	{	∠ब	६४°	३५
		अथवा	११५	२५
		∠क	५७	५७
		अथवा	७	७
		अब	११२६	फुट.
		अथवा	१६४७	फुट.

दुसरा

दुसरा सिद्धान्त-

तेव्ही सांगीतल्ये अवयवांत दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील एक कोन आहे.

प्रथम सांगीतल्ये दोन बाजूंची बेरीज घ्यावी; नंतर त्याच दोन बाजूंची वजाबाकी करावी. आतां सांगीतला कोन 180° अथवा दोन काटकोनांतून वजाकरावा; बाकी राहिलेली त्रिकोणाचे अव्यक्त दोन कोनांची बेरीज होईल; या बेरिजेचें अर्ध स्पर्शजें अव्यक्त दोन कोनांचे बेरिजेचें अर्ध होईल. तेव्हा या रीतीनें प्रमाण होईल.

अशी दोन सांगीतल्ये बाजूंची बेरीज-

त्याच बाजूंचे वजाबाकीस होत्ये-

तशी अव्यक्त दोन कोनाचे अर्ध बेरिजेची स्पर्शरेष-

त्याच कोनांचें अर्ध वजाबाकीचे स्पर्शरेषेस होईल.

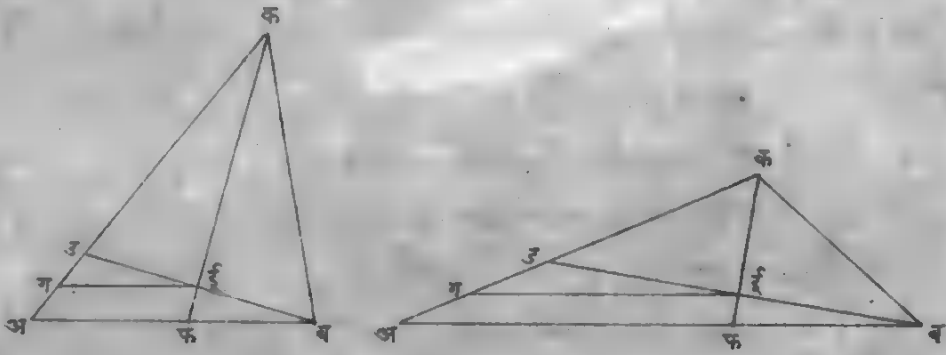
नंतर या प्रमाणांतून जी अव्यक्त कोनाची अर्ध वजाबाकी निघेल ती त्याच कोनाचे अर्ध बेरिजेत मिळवावी; स्पर्शजें ती बेरीज सोढा कोन होईल. आणि त्या अर्ध बेरिजेतून ती अर्ध वजाबाकी वजा केली असतां जी बाकी राहिल ती लाहान कोन होईल. कारण, कोणत्याही दोन संख्या स्पर्शजें व्यक्त किंवा अव्यक्त आहेत त्यांचे बेरिजेचें अर्ध आणि त्यांचे वजाबाकीचें अर्ध या दोन अर्धांची बेरीज सोढी संख्या दाखवित्ये. आणि त्या दोन अर्धांची वजाबाकी

बाकी लाहान संख्या दाखविले.

याजवरील टीप

प्रमाण गतीचे तिसर्ये स्थानी अव्यक्त कोनाचे अर्ध बेरिजेची मर्यादा लिहिली आहे, त्या स्थळी सांगितले कोनाचे अर्धाची कोस्पर्शरेष घेतली तरी चालेल; कारण, यादोनी बरोबर आहेत.

विवरण, अबक एक सांगितला त्रिकोण असावा, जेवा अक, कब, बाजू आणि त्यांचे आंतील कोन सांगितला आहे !



एतणजे प्रथम आकृतींत क कोन लघु असावा, आणि दुसर्ये आकृतींत दिशाळ असावा, सांगितले दोन बाजूंतील लोठये अक बाजूवर दुसर्ये दक बाजूचे बरोबर कटू घे, बड सांध, आणि तीस ई स्थळीं दुभाग, पुनः अड, ग स्थळीं दुभाग, आणि गई कई सांध, आणि या शेवटील रेषेस फ पर्यंत वाढीव.

आतां

(२१)

आतां $\frac{1}{2}(\text{अक} + \text{कब}) = \frac{1}{2}(०\text{गड} + २३\text{क}) = \text{कग}$

आणि $\frac{1}{2}(\text{अक} - \text{कब}) = \frac{1}{2}(२\text{अग}) = \text{अग}$

पुनः $\frac{1}{2}(\text{अ} + \text{ब}) = \frac{1}{2}(\text{कडब} + \text{कबड}) = \text{कबड}$

आणि $\frac{1}{2}(\text{ब} - \text{अ}) = \text{अबक} - \frac{1}{2}\text{वेरीज} = \text{अबड}$

पुनः यास्तव कई, कबड समदिबाजू त्रिकोणाचा पाया दुभागित्ये. तेथे त्याजवर लंब आहे.

याजकरिता ईक = कबड ची स्पर्शरेषा.
आणि ईफ = अबड ची स्पर्शरेषा. } बई त्रिज्याने

शेबटी, यास्तव अकफ त्रिकोणांत, गई अफ शी समांतर आहे.
तेथें $७००२\text{सि.म. कग} : \text{गअ} :: \text{कई} : \text{ईफ}$

अथवा

$\frac{1}{2}(\text{अक} + \text{कब}) : \frac{1}{2}(\text{अक} - \text{कब}) :: \frac{1}{2}(\text{ब} + \text{अ})$ ची स्पर्शरेषा : $\frac{1}{2}(\text{ब} - \text{अ})$ चे स्पर्शरेषेला.

आतां प्रथम युग्माचा अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची दुपट केली तरी प्रमाण हेच आहे. तेथें $\text{अक} + \text{बक} : \text{अक} - \text{बक} :: \frac{1}{2}(\text{ब} + \text{अ})$ ची स्पर्शरेषा : $\frac{1}{2}(\text{ब} - \text{अ})$ चे स्पर्शरेषेला, हें सिद्ध.

प्रथम उदाहरण

अबक हा सरळ रेष त्रिकोण आहे.

संगीतले अवयव	अब	३४५	यार्ड
	अक	११४.०७	यार्ड
	अ	३७°	२०'

यापासून

(૨૨)

ચાંપાસુન અવ્યક્ત અવયવ કાયનિધતાત

પ્રથમ ભૂમિતી કૃત્ય રીતીને

રેષ સ્કેલા વસ્તુન વરોવર ૩૪૫ યાર્ડ એક અબ સરકરેષ કર. ~~૨૦~~ કો-
ન સ્કેલા વસ્તુન વરોવર ૩૭° ૨૦' એક અ કોન કર; નંતર રેષ સ્કેલા વસ્તુન વ-
રોવર ૧૭૪'૦૭ યાર્ડ એક સરકરેષ કર. આતા બક રેષ જોડ, સ્પર્શજે ત્રિકો-
ણ જાલા.

તેઠ્ઠાં અપ્રકટ કોના-વેં માપ ત્યાંયા સ્કેલા વસ્તુન કઢતેં યાપમાણેં,
બક બાજૂ ૨૩૨ યાર્ડ. < બ કોન ૨૭° આણિ ક કોન ૧૧૫° $\frac{૧}{૨}$

દુસરેં ગણિત રીતીને

અબ બાજૂ = ૩૪૫	૧૮૦° . . . ૦૦	ચાંત્રુ
અક બાજૂ = ૧૭૪'૦૭	< અ ૩૭° . . . ૨૦	હેબજાં કર
વેરીજ = ૫૧૯'૦૭	૨) ૧૪૨ . . . ૪૦	< બ આણિ < ક ચાં- ચી વેરીજ
ત્યાં-ચી-વજા = ૧૭૦'૨૩	૭૭ . . . ૨૦	ત્રિ-વેં-અર્ધ.
વાકી જશી અબ આણિ અક ચા બાજૂ-ચી વેરીજ	૫૧૯'૦૭	લાગ ૨'૭૧૫૨૨૬
અબ, અક, બાજૂ-ચે વજા વાકી સ હોત્યે	૧૭૦'૨૩	૨'૨૩૨૮૧૮
તજી < ક < બ, ચાં-ચે અર્ધ-વેરિજે-ચી સ્પર્શરેષ	૭૭° ૨૦'	૧૦'૪૭૧૨૯૮
અપ્રકટ < ક < બ, ચાં-ચે અર્ધ વજા વાકી-ચે	૪૪° ૧૬'	૯'૯૮૮૮૯૦
સ્પર્શ રેષે સ હોઈલ.		

ચા

(२३)

या दोन अर्धांची बेरीज स्रोटा क कोन ११५... ३६ जाता.

त्याच अर्धांची बेरीज बाकी लाहान व कोन २७... ०४ जाता.

तेव्हां पूर्व सिद्धांता प्रमाणें.

जगां क की ११५... ३६ अथवा $६४^{\circ} २४'$ भुजज्या... लाग ९९५५१२६

त्याचे समाने अव. ३४५ या बाजूस होत्ये २५३७८१९

तशी \angle अ ३७... २० या कोनाची भुज्या ९७८२७९६

त्याचे समाने बंक २३२ या बाजूस होईल २३६५४८९

तिसर्या ५३ गीतीनें

प्रथम प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक रेषस्केलांत ५१९ चे खुणेवर ठेवावें आणि दुसरें टोंक त्याच स्केलांत १७१ चे खुणेवर ठेवावें; नंतर त्या मापाचे त्या कूपासाचें एक टोंक स्पर्शरेषस्केलावर $७१^{\circ} \frac{१}{२}$ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक $४०^{\circ} \frac{१}{२}$ चे खुणेवर जाईल म्हणजे तें इच्छा फळ जालें.

दुसर्चे प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक भुजज्या स्केलावर $६४^{\circ} \frac{१}{२}$ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक त्याच स्केलावर $३७^{\circ} \frac{१}{२}$ याजवर ठेवावें. नंतर त्या मापाचे कूपासाचें एक टोंक रेषस्केलावर ३४५ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक त्याच स्केलावर २३२ चे खुणेवर जाईल म्हणजे तें इच्छा फळ जालें.

दुसरें उदाहरण

(२४)

दुसरें उदाहरण

अबक, हा सरळ रेघ त्रिकोण आहे.

सांगीतले अवयव	{	अब	२६५	यार्ड
		अक	१५४.३३	यार्ड
		अ	५७.१२	

यां पासून अप्रकट अवयव काय निघतात.

उत्तर	{	बक	२००.६५
		अ	२४.४५
		क	९०.३

तिसरें उदाहरण

अबक हा एक सरळ रेघ त्रिकोण आहे

सांगीतले अवयव	{	अक	१२०	यार्ड
		बक	११२	
		क	५७.५७	

यां पासून अव्यक्त अवयव काय निघतात.

उत्तर	{	अब	११२.६
		अ	५७.२०
		ब	६४.३५

तिसरा

तिसरा सिद्धान्त

तेव्हा सांगितल्ये अवयवांत तीन बाजू आहेत.

प्रथम त्रिकोणाचे खोटा बाजूपासून त्या कोनाचे समोरची बाजू पायामातून त्याजवर एक लंब उतार, असा की, त्या पायाचे दोन खंड करील; आणि त्या लंबापासून त्या त्रिकोणाचे दोन काटकोन त्रिकोण होतील. तेव्हा या रीतीने प्रमाण होईल.

जसे पाया अथवा दोन खंडांची बेरीज.

दुसरे दोन बाजूंचे बेरिजेस होत्ये.

तसे त्या दोन बाजूंची वजा बाकी.

त्या दोन खंडांचे वजा बाकीस होईल.

नंतर या दोन खंडांचे वजा बाकीचे अर्ध त्या खंडांचे बेरिजेचे अर्धास मिळवावे; म्हणजे खोटा खंड होईल. तसे दोन खंडांचे वजा बाकीचे अर्ध आणि त्याच खंडांचे बेरिजेचे अर्ध यांची वजा बाकी करावी, म्हणजे लाहान खंड होईल.

यांतून दोन काटकोन त्रिकोण जाले, म्हणून प्रत्येकांत दोन बाजू आणि एक काटकोन प्रकट होतो. तेव्हा प्रथम सिद्धान्त रीतीने दोन राहिले कोन प्रकट होतील.

वियरण, भू. २५, सि. प्र. त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजा बाकी

(२६)

बाकी यांचा काटकोन चौकोन दोन खंडांनी वेगळी आणि वजाबाकी यांचे काटकोन चौकोनाचे बरोबर आहे. याजकरिता भू. ७६ सि. प्र., या काटकोन चौकोनाचे बाजूनी प्रमाण करून बर लिहिले प्रमाणें उत्पन्न होईल.

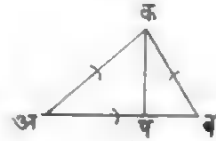
या प्रकारांतील उदाहरणाचें पृथक्करण केल्याचें पूर्वी या शीटने पाहा की त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे की नाही. ~~याने दोन बाजूनी वेगळी~~ कर्णाचे वर्गा बरोबर आहे तर तो काटकोन त्रिकोण आहे, याचें पृथक्करण चौथे सिद्धान्ताने वस्तुन होईल.

प्रथम उदाहरण

अबक, हा सरळरेष त्रिकोण आहे.

सांगितले	अब ३४५ यार्ड
अवयव	अक २३२
	बक १७४.०७

यांपासून कोन करा याचे.



प्रथम भूमिती कृत्य शीटने

रेषे स्केलावरून अब पाया ३४५ यार्ड कर. नंतर २३२ यार्ड कृपासांन घेउन याचें एक टोंक अ शेवटावर ठेउन वरल्ये आंगास एक कोन कर.

तसें

तमें १७४०७ याईकूपासांत घेउन त्याचे एकटोंक व शंकरावर ठेउन वरत्ये आंगास एक कौस कर. असा कीं पूर्व कौसास छेटील, आतां त्या कौस छेद-
न विंदुपाशून दोन सगळ रेषां करून पायाचे दोनी शेवर माध, सणजे कोना-
ये माप त्या स्केलावरून याप्रमाणें निघेल.

दुसरे गणित शीर्षक

स्मृणान	३४५ : ४०६०७ : ५७९३ : ६८१८	याचें
		अर्ध
	पायाचें अर्ध	१७२५
बेरीज	२०६५९	या दोन अर्धांची
दोन अर्धांची वजा बाकी	१३८४१	सोदा अप खंड
		लाहान पब खंड

२७०० ४ बाकी हा \angle अ जाला.

આતાં

(२८)

आतां बपक त्रिकोण, जांन प काटकोन आहे.

जसें बक १७४.०७ ही बाजू लाग २.२४०.७२४
 तिचे समोरचे \angle प ९०° याचे भुजज्यास होत्ये १०.०००००
 तसें बप १३८.४१ ही बाजू २.००११६८
 तिचे समोरचे \angle वकप ५२.००४० चे भुजज्यास होत्ये १.०००४४४

९०.००००
 \angle ब ३७.००२०
 आणि \angle अकप ६२.००५६
 \angle बकप ५२.००४०
 ११५.००३६ बेरीज

याजकरितां तीन कोनांचें माप याप्रमाणें आहे.

\angle अ $२७^\circ.०४'$ \angle ब $३७^\circ.२०'$ आणि \angle क $११५^\circ.३६'$

तिसर्यें यंत्र शीतीनें.

प्रथम प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक रेघस्केलावर ३४५ वर ठेऊन दुसरें टोंक ४०६ वर ठेवावें; तें माप कूपासांत घेउन त्या कूपासाचें एक टोंक त्याच स्केलावर ५८ वर ठेवावें स्पर्णजे दुसरें टोंक ६८ पर्यंत जाईल; स्पर्णजे ही गवंडांची बजावाकी जाती.

दुसरें प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक रेघस्केलावर २२२ वर ठेऊन दुसरें टोंक २०६ $\frac{१}{२}$ याजवर ठेवावें; आणि तें माप कूपासांत घेउन त्याचें एक टोंक

(२९)

टोंक भुजज्या स्केलावर ९०° वर ठेवावे, लणजे दुसरे टोंक ६३° वर जाईल.

तिसर्या प्रमाणांत रेघस्केलावर कूपासाचे एक टोंक १७४ पासून १३८ $\frac{१}{२}$ पर्यंत माप कूपासांत घेउन त्याचे एक टोंक भुजज्या स्केलावर ९०° वर ठेवावे, लणजे दुसरे टोंक ५२ $\frac{१}{२}$ पर्यंत जाईल.

दुसरे उदाहरण

अबक, हा सरळ रेघ त्रिकोण आहे.

सांगितले अवयव	{	अब	३६५	याई
		अक	१५४.३३	
		बक	३०९.८६	

यां पासून कोन करायाचे.

उत्तर	{	∠अ	५७°-१२
		∠ब	२४°-४५
		∠क	९८°-२

तिसरे उदाहरण

अबक, हा सरळ बाजू त्रिकोण आहे.

सांगितले अवयव	{	अब	१२०	याई
		अक	११२.६	
		बक	११२	

यां पासून कोन करायाचे.

उत्तर	{	∠अ	५७°-२८
		∠ब	५७°-५७
		∠क	६४°-१५

सरळ

संस्पर्श त्रिकोणाचे स्पर्शजे काटकोन त्रिकोण अथवा विशालकोन त्रिकोण किंवा लघुकोन त्रिकोण यांचे अव्यक्त अवयव काढायाचे सर्वप्रकार या तीन सिद्धांतांत येतात. आतां कित्येक दुसरे सिद्धांत आहेत; परंतु ते त्रिकोणाचे आकृती विशेषीं लागतात; जाणसून त्यांचे अव्यक्त अवयव कोणे वेळेस पूर्वी सांगितलेले त्या सामान्य तीन सिद्धांतां पक्षां लवकर मिथतात.

त्या विशेष सिद्धांतांनून बहुत उपयोगी एक सिद्धांत संगतो.

चवथा सिद्धांत.

जेव्हां काटकोन त्रिकोण आहे, तेव्हां त्याचे अव्यक्त अवयव या पुढील प्रमाणानें निघतात.

अशी त्रिज्या.

त्याचे कोण त्याही बाजूस होत्ये.

तशी तिचे अवयव कोनाची स्पर्शरेष.

त्याचे समोरचे दुसरे बाजूस होईल.

आणि.

अशी त्रिज्या.

त्याचे कोण त्याही बाजूस होत्ये.

तशी तिचे अवयव कोनाची छेदनरेष.

त्याचे कर्णरेषेस होईल.

विवरण

(३१)

विवरण, अब क काटकोन त्रिकोणांत अब सांगितली बाजू असावी, अ, मध्यापासून कोण त्वेही अउ त्रिज्यानें दुई कौस कर, आणि उफ, अबवर लंब, अथवा बक शी समांतर कर, आतां व्याख्यापासून स्पष्ट आहे कीं दुई कौसाची अथवा अ कोनाची उफ स्पर्शरेष आहे, आणि अई छेदनरेष आहे, अउ त्रिज्यानें आतां पुनः बक, उफ, समांतर असून अउ : अब :: उफ : बक, आणि :: अफ : अक, आणि हें वर प्रमाणांत लिहित्या प्रमाणेच आहे, हें सिद्ध.



टीप

त्रिज्या ९०° चे भुजज्याचे अथवा ४५° चे स्पर्शरेषेचे बराबर आहे आणि स्वाभाविक भुजज्या कोष्टकांत त्या त्रिज्याची किंमत १ हा अंक दाखविला आहे, आणि लागरतंत्रिक भुजज्या कोष्टकांत १० हा अंक दाखविला आहे

प्रथम उदाहरण

अब क, हा सरळरेष काटकोन त्रिकोण आहे:

सांगितले	{	अब	१६२	यार्ड
अवयव		\angle अ	$५३^\circ ७' ४''$	

यांपासून दुसरे अवयव काढायाचे.

प्रथम

प्रथम भूमिती कृत्य रीतीने.

रेषस्केलावरून १६२ याई अब सरळरेष कर, आणि कोनूस्केलावरून ५३' . ७' . ४" \angle अ कर; नंतर ब.पासून वर एक लंब खटीव, असा की, कोनरेषेस छेदील; नंतर ~~अक~~ २७० आणि ब.व १६ हे माप रेषस्केलावरून कळेल.

दुसर्यें गणित रीतीनें

जशी बिज्या	लाग	१०००००००
अब बाजूस १६२		२२०९५१५
तशी \angle अ ५३' . ७' . ४" याची स्पर्शरेष		१०१२४९२७
बक बाजूस होईल २१६		२३३४४५२

आणि

जशी बिज्या	लाग	१०००००००
अब बाजूस १६२		२२०९५१५
तशी \angle अ ५३' . ७' . ४" याची छेदनरेष		१०१२१८४८
अक कर्णास होईल २७०		२४३१३६३

तिसरें

(३३)

तिसर्ये यंत्र रीतीने

कूपासाचे एक टोंक स्पर्शरेषेलावर ४५° वर ठेवून दुसरे टोंक त्याच स्केलावर $५२^{\circ}\frac{१}{२}$ याजवर ठेव, आणि तेंमाप कूपासांत घेवून त्याचे एक टोंक सूरव्यास्केलावर १६२ वर ठेव, सणजे दुसरे टोंक २१६ वर जाईल, तें इच्छाफल जातें.

दुसरे उदाहरण

अबक, हासरळरेष काटकोन त्रिकोण आहे.

सांगीतले अवयव $\left\{ \begin{array}{l} \text{अब} \quad १८० \\ \angle \text{अ} \quad ६२^{\circ} \cdot ४०' \end{array} \right.$

यांपासून अव्यक्त अवयव काढायाचें.

उत्तर $\left\{ \begin{array}{l} \text{अक} \quad १९२.०१४६ \\ \text{बक} \quad १४८.२४६४ \end{array} \right.$

प्रथम टीप.

समय विशेषी काटकोन त्रिकोणाचे अवयव करायाची दुसरी रीति आहे, ती सांगतो.

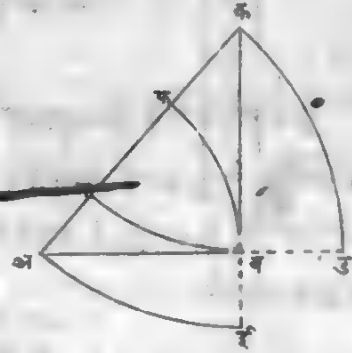
अबक

(३४)

अबक, हा एक सरळरेष काटकोन त्रिकोण आहे.

त्याची अब बाजू त्रिज्या कर.

आतां अ मध्य मानून अब ची
सांगीत घेऊन बफ एक कौस कर;
तेव्हां या त्रिकोणाची बक बाजू या
बफ कौसाची स्पर्शरेष जाली, आणि
अक कर्ण छेदनरेष जाली.



याचरीती प्रमाणें बक बाजू त्रिज्या घेऊन क मध्य मानून बग कौ-
स केला, तेव्हां अब बाजू या बग कौसाची स्पर्शरेष जाली, आणि अक
कर्ण छेदनरेष जाली.

परंतु कर्ण त्रिज्या करून कौस केले तर दोनही बाजू समोरचे कोनांचा
भुजज्या होतात.

लणून अब बाजू अई कौसाची अथवा \angle क ची भुजज्या होत्ये,
आणि बक बाजू कडु कौसाची अथवा \angle अ ची भुजज्या होत्ये.

तेव्हां ही रीति सर्वकाटकोन त्रिकोणांचे बाजूंचें परस्पर प्रमाण दाखवि-
त्ये. या रीतीस सर्वबाजू त्रिज्यारीति लणतात.

दुसरी टीप.

जेव्हां काटकोन त्रिकोणाचे सांगीतल्ये दोन बाजू पासून तिसरी बा-
जू काढायाची आहे, तेव्हां भूमितीचे ३४ व्या सिद्धांतांत काटकोन त्रिकोणा-
चे गुण सांगितले आहेत, तेथे याचे दोन बाजूंचे वर्गांची बेरीज कर्णाचे

वर्गा

(३५)

वर्ग बराबर आहे, लणून सांगितले आहे; याजकरिता हीन बाजू सांगितल्या असतील तर त्यांचे वर्गांचे बेरिजेचे वर्गमूळ कर्ण होईल. कदाचित् एक बाजू आणि कर्ण सांगितला असेल तर त्या बाजूचा वर्ग करून कर्णाचे वर्गात वजा करून बाकी राहिल त्याचे वर्गमूळ दुसरी बाजू होईल. अथवा, जेव्हा कर्ण ह, आणि पाया ब, अथवा लंब प सांगितला आहे, तेव्हा त्या बेरिजेचे अर्ध लणजे लाग (ह+प) आणि लाग (ह-प) = ला ब, आणि ही अर्धबेरिज लाग (ह+ब) आणि ला (ह-ब) = लाग प, जेव्हा ब आणि प सांगितले आहेत तेव्हा हे पुढील लागतम कृत्य कामांत घेण्याचे उपयोगी फार आहे, लणजे २ ला प - ला ब, या वजा बाकीचे = न, संख्या काढ, आणि ब + न = म, कर, तेव्हा १/२ (ला म + ला ब) = लाग ह.

या शितीची सत्यता स्पष्ट आहे. कारण, लागतमाचे गुणांवासून $\frac{1}{2}$ = न, याजकरिता ब + न = ब + $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ (ला म + ला ब) = $\frac{1}{2}$ ला मब - $\frac{1}{2}$ ला (ब + प) = ला १/२ (ब + प) = ला ह.

टीप, इछेप्रमाणे कोणत्याही कोटकोन त्रिकोणाचे अन्वय पूर्णकांत असल्यास निघतील, जर याप्रमाणे केले.

$$\begin{aligned} \text{म} + \text{न} &= \text{कर्ण} \\ \text{म} - \text{न} &= \text{लंब} \\ २\text{मन} &= \text{पाया} \end{aligned}$$

यांत म आणि न इछेस येईल तसे घे, परंतु म, न पेशां होटा असावा,

त्रिकोण

त्रिकोणसितीतील का ही उपयोगी सास्त्री कोष्टकांश प्रकार.

अब, अक, अड, तीस कोस आसवे, असे की वक = कड, आणि ओ, वर्तुवमध्य, अओ, ओक, बड, सांधा, डईक आणि ओऐ, अओ चर लंब कर, आणि अओ ही समानर वसेस कर, मुकु सांध, आणि तिला ओन चिन्यानें दुभाक, आणि अह बड ही समानर कर.

तेहां अह = अक की भुज्या

ओह = अक की कोसुन्या

पुनः डई = डई = अड की भुज्या

ईके = ओऐ = अब की भुज्या

कके = अड की भु + अब की भु

उके = अड की भु - अब की भु

वसे = वसे = अक की भुज्या

ओई = केऐ = अड की को भुज्या

मुके = अड की को भुज्या + अड की को भुज्या

वके = अब की को भुज्या - अड की को भुज्या

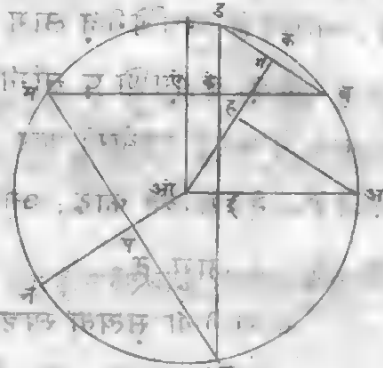
यास्तव की के कडील कोन काटकोन आहेत. वड कोस + मक कोस = 90° आणि डक कोस +

मन कोस = 90° याजकरितां मप = पक = ओग = उक की को भुज्या =

वक की को भुज्या; पुनः यास्तव की अक = $\frac{1}{2}$ (अब + अड) =

$\frac{1}{2}$ वअक = अओक कोन (मध्यांतील) = बडक कोन (परिधावरील) =

बमक कोन (सामकोन) याजकरितां अओह, वडके,



(१७)

क्रम के, हेत्रिकोण समकोन आहेत

यापासून हे उत्पन्न होतें-

१ ओअः अहः : मकः कके

लणजे त्रिज्या : अकचे भुजज्याला : : बकची २ कोभुजज्या : अउची भुजज्या + अबचे भुजज्याला,

२ ओअः अहः : बडः डक,

लणजे त्रिज्या : अकचे भुजज्याला : : बकची २ भुजज्या : अउची भुजज्या - अबचे भुजज्याला,

३ अओः ओहः : क्रमः मके,

लणजे त्रिज्या : अकचे कोभुजज्याला : : बकची २ कोभुजज्या : अबची कोभुजज्या + अउचे कोभुजज्याला.

४ अओः अहः : उबः बके,

लणजे त्रिज्या : अकचे भुजज्याला : : बकची २ भुजज्या : अबची कोभुजज्या - अउचे कोभुजज्याला,

पुनः

५ बके. केम = डके. केक, लणजे (अबची कोभुजज्या - अउची कोभुजज्या) × (अबची कोभुजज्या + अउची कोभुजज्या) = (अउची भुजज्या - अबची भुजज्या) × (अउची भुजज्या + अबची भु.)

वरचे चार प्रमाणास समीकरणाचें रूप देउन आणि त्रिज्या १ करून हे पुढील दोन प्रकारचे साधारण समीकरण कोष्टक उत्पन्न होतात

प्रथम प्रकार

प्रथम प्रकार

अक = अघे, कब = बघे; तर अड = अ + ब, अब = अ - ब;

- (१) $(अ + ब) ची भु० + (अ - ब) ची भु० = अची २ भु० \times बचे को भु०$
- (२) $(अ + ब) ची भु० - (अ - ब) ची भु० = अची २ को भु० \times बचे भु०$
- (३) $(अ - ब) ची को भु० + (अ + ब) ची को भु० = अची २ को भु० \times बचे को भु०$
- (४) $(अ - ब) ची को भु० - (अ + ब) ची को भु० = अची २ भु० \times बचे भु०$

दुसरा प्रकार

अड = अघे, अब = ब; तर अक = $\frac{१}{२}(अ + ब)$, बक = $\frac{१}{२}(अ - ब)$

- (५) $अची भु० + बची भु० = \frac{१}{२}(अ + ब) ची २ भु० \times \frac{१}{२}(अ - ब) ची को भु०$
- (६) $अची भु० - बची भु० = \frac{१}{२}(अ + ब) ची २ को भु० \times \frac{१}{२}(अ - ब) ची भु०$
- (७) $बची को भु० + अची को भु० = \frac{१}{२}(अ + ब) ची २ को भु० \times \frac{१}{२}(अ - ब) ची को भु०$
- (८) $बची को भु० - अची को भु० = \frac{१}{२}(अ + ब) ची २ भु० \times \frac{१}{२}(अ - ब) ची भु०$

यांत प्रथम प्रकाराचा उपयोग हा आहे कीं भुज ज्याचे गुणाकाराची किंमत दुसऱ्यां वाजून सरळ भुज ज्यांत निघले.

आणि दुसऱ्या प्रकाराचा उपयोग हा आहे कीं गुणाकाराची बदली भुज ज्यांची बेरीज अथवा वजाबाकी कामांत घेतां येते.

आतां प्रथम आणि दुसऱ्या समीकरणांची बेरीज आणि वजाबाकी घेऊन तसें तिसऱें आणि चौथें यांची बेरीज आणि वजाबाकी घेऊन आणि भुज ज्याचे = स्पर्श रेखेची को भुज ज्या हे पक्षेपणें स्मरणांत ठेऊन हीं समीकरणें उसल होतात.

तिसरा प्रकार

तिसरा प्रकार

- (९) $(अ+ब) ची भु० = अची भु० \times बची को भु० + बची भु० \times अचे को भु०$
 $= अची को भु० \times बची को भु० \times (अची स्पर्शरेषा + बची स्पर्शरेषा)$
- (१०) $(अ-ब) ची भु० = अची भु० \times बची को भु० - बची भु० \times अचे को भु०$
 $= अची को भु० \times बची को भु० \times (अची स्पर्शरेषा - बची स्पर्शरेषा)$
- (११) $(अ+ब) ची को भु० = अची को भु० \times बची को भु० - अची भु० \times बची भु०$
 $= अची को भु० \times बची को भु० \times (१ - अची स्पर्शरेषा \times बची स्पर्शरेषा)$
- (१२) $(अ-ब) ची को भु० = अची को भु० \times बची को भु० + अची भु० \times बची भु०$
 $= अची को भु० \times बची को भु० \times (१ + अची स्पर्शरेषा \times बची स्पर्शरेषा)$

जर अ=ब के लानर दुपट को सांचा भुजज्या आणि को भुजज्या यांचा किमती पूर्व समीकरणां पासून स्वस्थानें निघतील, पुनः यांतील नववें समीकरण अकरा व्यानें भागून आणि दाहावें बारा व्यानें भागून तर अ+ब आणि अ-ब यांचे स्पर्शरेषांचा किमती दाखवायास समीकरणें उत्पन्न होतात. जसें

चौथा प्रकार

- (१३) $२ अची भु० = अची २ भु० \times अचे को भु० - अची २ को भु० \times अचे स्पर्शरेषा$
- (१४) $२ अची को भु० = अची को भु०^२ - अची भु०^२ = अची को भु०^२ (१ - अची स्पर्शरेषा^२)$
- (१५) $(अ+ब) ची \frac{भु०}{को भु०} = (अ+ब) ची स्पर्शरेषा = \frac{अची स्पर्शरेषा + बची स्पर्शरेषा}{१ - अची स्पर्शरेषा \times बची स्पर्शरेषा}$
- (१६) $(अ-ब) ची \frac{भु०}{को भु०} = (अ-ब) ची स्पर्शरेषा = \frac{अची स्पर्शरेषा - बची स्पर्शरेषा}{१ + अची स्पर्शरेषा \times बची स्पर्शरेषा}$

(४०)

$$(१७) \quad २अ-वीस्पर्श० = \frac{अ-वी२स्पर्श०}{१-अ-वीस्पर्श०}$$

$$(१८) \quad २अ-वीकोस्पर्श० = \frac{१-अ-वीस्पर्शरेष०}{अ-वी२स्पर्शरेष०}$$

दूसरे प्रकारांत

$\frac{१}{२}$ (अ+ब) वे भुज्या-वे स्थळीं $\frac{१}{२}$ (अ+ब) ची कोभुज्या $\times \frac{१}{२}$
 (अ+ब) ची स्पर्शरेषां हें ठेवून आणि $\frac{१}{२}$ (अ-ब) ची भुज्या-वे स्थळीं $\frac{१}{२}$
 (अ-ब) ची कोभुज्या $\times \frac{१}{२}$ (अ-ब) ची स्पर्शरेषां हें ठेवून तर हीं समीकर-
 णें उत्पन्न होतात.

पांचवा प्रकार

$$(१९) \quad ब-वीकोभु० + अ-वीकोभु० = \frac{१}{२} (अ+ब) ची २कोभु० \times \frac{१}{२}$$

(अ-ब) ची कोभुज्या पाहा ७ वें समीकरण.

$$(२०) \quad ब-वीकोभु० - अ-वीकोभु० = \frac{१}{२} (अ+ब) ची स्पर्श० \times \frac{१}{२} (अ-ब)$$

$$ची स्पर्शरेषा \times \frac{१}{२} (अ+ब) ची २कोभु० \times \frac{१}{२} (अ-ब) ची कोभु० = \frac{१}{२}$$

$$(अ+ब) ची स्पर्श० \times \frac{१}{२} (अ-ब) ची स्पर्शरेषा \times (ब-वीकोभु० + अ-वीकोभु०)$$

$$(२१) \quad अ-वीभु० + ब-वीभु० = \frac{१}{२} (अ+ब) ची स्पर्श० \times \frac{१}{२} (अ+ब) ची २$$

$$कोभु० \times \frac{१}{२} (अ-ब) ची कोभु० = \frac{१}{२} (अ+ब) ची स्पर्शरेषा \times (अ-वी$$

$$कोभु० + ब-वीकोभु०)$$

$$(२२) \quad अ-वीभु० - ब-वीभु० = \frac{१}{२} (अ-ब) ची स्पर्श० \times \frac{१}{२} (अ+ब) ची$$

$$२कोभु० \times \frac{१}{२} (अ-ब) ची कोभु० = \frac{१}{२} (अ-ब) ची स्पर्श० \times (अ-वीको-$$

$$भु० + ब-वीकोभु०)$$

(२२)

$$(२३) \frac{\text{अ-बी भु.} + \text{ब-बी भु.}}{\text{अ-बी भु.} - \text{ब-बी भु.}} = \frac{\frac{३}{२}(\text{अ} + \text{ब}) \text{ ची स्पर्श.}}{\frac{३}{२}(\text{अ} - \text{ब}) \text{ ची स्पर्श.}} \text{ हैं २१ आणि २२ या समीकर-}$$

णा पासून उत्पन्न जालें.

$$(२४) \frac{\text{अ-बी भु.} + \text{ब-बी भु.}}{\text{अ-बी को भु.} + \text{ब-बी को भु.}} = \frac{३}{२}(\text{अ} + \text{ब}) \text{ ची स्पर्शरेष, हैं २१ ज्ये समीकर-}$$

णा पासून उत्पन्न जालें.

$$(२५) \frac{\text{अ-बी भु.} - \text{ब-बी भु.}}{\text{अ-बी को भु.} + \text{ब-बी को भु.}} = \frac{३}{२}(\text{अ} - \text{ब}) \text{ ची स्पर्शरेष, हैं २२ ज्ये समीकर-}$$

णा पासून उत्पन्न जालें.

उदाहरणें

प्रथम, सिद्ध कर कीं कोणत्याही सरळरेष काटकोन त्रिकोणांत हे पुढील गुण निश्चय आहेत.

$$(१) \frac{\text{लंब}}{\text{पाया}} = \text{पायाकडील कोनाची स्पर्शरेष आहे.}$$

$$(२) \frac{\text{पाया}}{\text{लंब}} = \text{शिरकोनाची स्पर्शरेष आहे.}$$

$$(३) \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \text{पायाकडील कोनाची भुजज्या आहे.}$$

$$(४) \frac{\text{पाया}}{\text{कर्ण}} = \text{शिरकोनाची भुजज्या आहे.}$$

$$(५) \frac{\text{कर्ण}}{\text{पाया}} = \text{पायाकडील कोनाची छेदनरेष आहे.}$$

$$(६) \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \text{शिरकोनाची छेदनरेष आहे.}$$

दुसरें, सिद्ध कर कीं अ-बी छेदनरेष = $(४५ + \frac{३}{२}\text{अ})$ ची स्पर्शरेष आहे.

(४२)

तिसरें, सिद्धकर कीं २ अ-वी छेदनरेष = $\frac{१+अ-वीस्पर्शः}{१-अ-वीस्पर्शः}$ आणि २ अ-
वी कोभुजज्या = $\frac{१+अ-वीस्पर्शः}{अ-वी २ स्पर्शः} = \frac{अ-वी छेदनरेष}{अ-वी २ स्पर्शरेष}$

चौथें, अक्षय = बर्ष + उक्षे यांनून क्ष आणि य त्या कोणत्येही कौसा-
चा भुजज्या आणि कोभुजज्या काढायचा.

पांचवें, हें सिद्धकर कीं कोणत्येही कौसाचा स्पर्शरेष = भुजज्या = स्पर्श-
रेष \times भुजज्या.

साहायें, हें सिद्धकर कीं जर कोणत्येही कौसाची स्पर्शरेष = \sqrt{n} तर
त्याच कौसाची भुजज्या = $\sqrt{\frac{n}{n+१}}$

उंचीची आणि लांबीचीं

पुढें उदाहरणें तीं मागील सिद्धांत रीतीनें होताना.

उदाहरणें

प्रथम, एक मनोरा आहे, जाची उंची वर चढून कोणीही मोजूं सकत
नाहीं, त्याचे पायापासून एक सरळ समरेष २०० फुट मोजून तेथून शिरापर्यंत
कर्ण आणि पाया यांचे आंतील कोन माजिला तो ४७° १०' जात्य पायापासून त्या
मनोराची लंबोंची काय निघत्ये ती सांग.

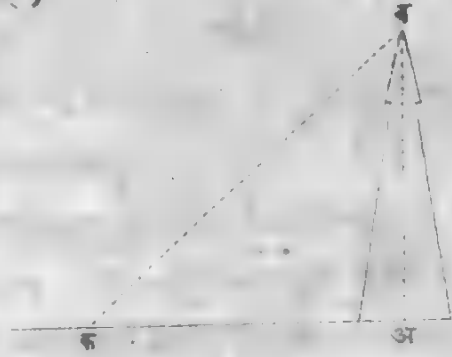
भूमिती कृत्य रीतीनें

एक सरळरेष कर आणि तिज
वर रेषेस्केलावरून एक २०० फुट

वाजू

(४३)

बाजू कर. या रेषेचे अ शेवटापासून
वर एक अब लंब चढीव; नंतर कब
रेष कर, अशी की, $\angle क ४७^{\circ} ३०'$ हो-
ईल, स्थळजे त्या मनोर्याची लंबोंची
कळेल. अब बाजूचें माप त्या रेषेक
लावून २१८ ३ फुट आहे.



गणित रीतीनें

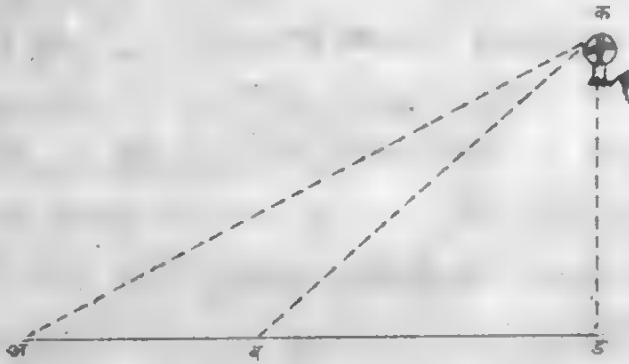
जशी त्रिज्या	लाग १०००००००
अक २०० फुट बाजूस होत्ये.	२३०१०३०
तशी $\angle क ४७^{\circ} ३०'$ याची स्पर्शरेष.	१००३७९४८
अब २१८.२६ फुट बाजूस होईल.	२३३८९७८

दुसरे, समपातळी भूमीवर एक पर्वताचे मस्तकीं बुरुज आहे. त्या
पर्वताचे पायाजवळ समपातळी पायाचे आंतील कोन मापिला तो ६४° अंश
आला तेथून बाहेर ८८० याडींवर पुनः त्या समपातळी पायाचे आंतील कोन
मापिला तो ३५° आला, तेव्हां त्या समपातळी भूमीपासून बुरुजाचे शिखर
पर्यंत लंबोंची आणि त्या दोन स्थळांपासून शिखर पर्यंत लांबी काय आहे
ती सांग

भूमिती कृत्य रीतीनें

भूमिती कृत्य रीतीने

भूमीची समपातळी दाखवाया करितां एक सरळरेष कर, त्या रेषेवर दोन स्थळें दाखवाया करितां स्केलावरून ८८० चार्डवर अ आणि ब चिह्नें कर, हीं दोन कोनांचीं मापस्थळें दाखवितील; आतां अ चिन्हावर ३५° चा \angle अ कर; नंतर ब चिन्हावर ६४° चा \angle ब कर; आतां या दोन कोनरेषा जेथे मिळतील ते बुलजाचे शिखराचें स्थळ होईल; तेथुन पाया सरळ रेषेवर लंब उतार, ह्मणजे ती लांबी आणि उंची कळेल; ह्मणून स्केलावरून मापितां अक १६३१ बक १०४१ आणि डक ९३६



(४५)

१८०° यांदून

आदिकारण भूमिति रीतीने

∠डबक ६४ वजाकरून

∠डबक = ∠बअक + ∠अकब आहे.

∠अबक ११६ बाकी आहे

तेव्हा ∠अकब = ∠डबक - ∠बअक आहे.

∠अवक ११६

= ६४ - ३५ = २९

∠बअक $\frac{३५}{१५१}$ बेरीज

∠अकब $\frac{२९}{२९}$ बाकी

तेव्हां अबक त्रिकोणांत

जशी ∠अकब २९ याची भुजज्या

ताम ९.६८५५७१

त्याचे समोरचे अब ८८० याई बाजूस होत्ये

२.९४४४८३

तशी ∠बअक ३५ याची भुजज्या

९.७५८५९१

त्याचे समोरचे वक १०४१.१२५ बाजूस होईल

३.०१७५०३

जशी ∠अकब २९ याची भुजज्या

९.६८५५७१

त्याचे समोरचे अब ८८० या बाजूस होत्ये

२.९४४४८३

तशी ∠अबक ११६ अथवा ६४ याची भुजज्या

९.९५३६६०

त्याचे समोरचे अक १६३१.४४२ बाजूस होईल

३.२१२५७२

आणि

(४६)

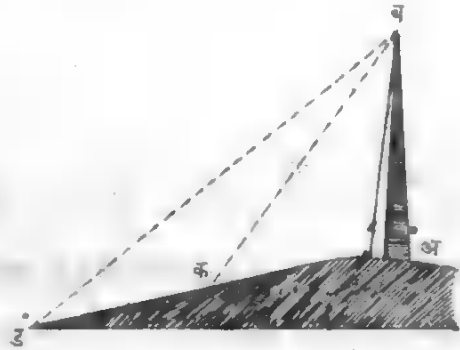
आणि ब कड त्रिकोणांत

जशी \angle उ ९०° याची भुजज्या	१०००००००
त्याचे समोरचे ब क १०४११२५ बाजूस होत्ये	३०१७५०३
तशी \angle क बड ६४° याची भुजज्या	९९५१६६०
त्याचे समोरचे कड ९३५७५७ या बाजूस होईल	२९७११६३

तिसरें, एक डोंगरावर मनोरा आहे त्याची उंची मोजावया करितां त्या-
पासून ४० फुट त्या डोंगराचे पाखरेवर यंत्रांनें पाखरेसंगातीं एक कोन मापिला
तो ४१° जाला, तेथुन पुढें ६० फुटींवर पाखरें संगाती दुसरा कोन मापिला
तो $२३^{\circ} ४५'$ जाला, तेव्हां मनोर्याची उंची किती आहे ती सांग.

भूमिती कृत्य रीतीनें.

डोंगराची पाखर दाखवा
या करितां एक तिर्कस रेष कर,
तीजवर मनोर्याचापाया दाखवाव
या करितां अ कर, नंतर स्केलावरून
न अ क ४० फुट बाजू कर, तेथुन
कड ६० फुट बाजू कर; नंतर
 \angle क ४१° कर, पुढें उ स्थळावर
 \angle उ $२३^{\circ} ४५'$ कर. नंतर या
दोन कोनरेषा परस्पर छेदीतील



नें

(४७)

तें बस्थळ होईल. आतां स्केलावरून अब मनीषाची उंची कळेल.

गणित रीतीनें

— \angle क	४९	००	यांतून
— \angle उ	२३	४५	हे वजा करून
— \angle उबक	१७	१५	बाकी

उबक त्रिकोणांत

जशी \angle उबक	१७	१५	याची भुजज्या	लाग	९४७२०८६
त्याचे समोरचे	६०	फुट बाजूस होत्ये			१७७८१५१
तशी \angle उ	२३	४५	याची भुजज्या		९६०५०३२
त्याचे समोरचे	बक	८१४८८	यास होईल		१९११०९७

अबक त्रिकोणांत

जशी अबक, कब, यांची बेरीज	१२१४८८	लाग	२०८४५७७
अक, कब, यांचे वजा बाकीस होत्ये	४१४८८		१६१७९२३
तशी \angle अ, \angle ब, यांची अर्धबेरीज	६९	३०	स्पर्शरेष
त्यांचे अर्धवजा बाकीचे स्पर्शरेषेस	४२	२४	होईल
यांची वजा बाकी \angle अबक	२७	५३	

शेवटील

(४८)

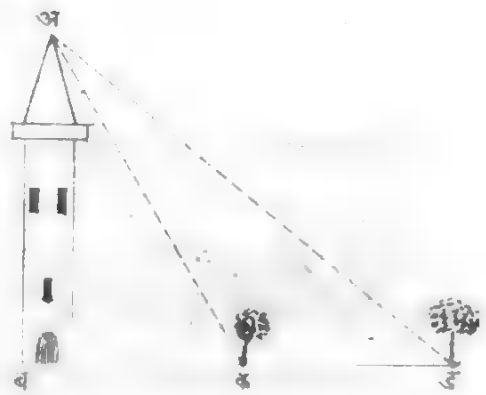
शिवदील जशी \angle अबक २७°	$५\frac{१}{२}$	याची भुजज्या	लाग ९६५८२८४
त्याचे समोरचे अक	४०	याबाजूस होत्ये	१६०२०६०
तशी \angle क	४१°	याची भुजज्या	९८१६९४३
त्याचे समोरचे अब	५७६२३	याबाजूस होईल	१७६०७१९

चौथें उदाहरण

अतिदुर्गमस्यळीं दोन साडे आहेत. त्यांत अंतर भूमि किति ती कळावी लष्णीन त्या खालचे समपातळीवर त्यांशीं समरेषेन एक बुरुज १२० फुट लंबाची आहे त्याचे लंब शिरावर यंत्रांन साडां खालची समपातळी लक्षून लंबाशीं दोन कोन मापिले, त्यांत प्रथम कोन $६४^{\circ}\frac{१}{२}$ आणि दुसरा ३३ जाला तेव्हा त्या दोन साडांमध्ये अंतरभूमि किति आहे सांग.

भूमिती कृत्यरीतीनें

भूमीची समपातळी दाखवाया करिता एक बड सरळरेष कर. तिजवर स्केलावरून वरावर १२० यार्डे बुरजाची उंची दाखवाया करितां अब लंब कर, नंतर \angle बअक ३३ कर, आणि \angle बअड $६४^{\circ}\frac{१}{२}$ कर, त्या दोन कोन रेघा त्या समपातळीस जेथे छेदितील ती त्या साडांची क, दु स्थळें जालीं



नंतर

(४९)

मंतर स्केलावरून त्यांचे मधील अंतर भूमि किती आहे ती कढेल.

गणित शीतीनें

प्रथम अबक काटकोन त्रिकोणांत

जशी त्रिज्या लांब १०००००००

अब १२० या बाजूस होत्ये २०७९९८१

तशी \angle बअक ३३ याची स्पर्शरेष ९८९१६९७

त्याचे समोरचे बक ७७९२९ या बाजूस होईल १८९१६९८

आतां बअड काटकोन त्रिकोणांत

जशी त्रिज्या १०००००००

अब १२० या बाजूस होत्ये २०७९९८१

तशी \angle बअड $६४\frac{१}{२}$ याची स्पर्शरेष १०३२१५०४

त्याचे समोरचे बड २५१५८५ या बाजूस होईल २४००६८५

बाजू खंड बक ७०९२९ वजा करून

बाकी १७३६५६ कड साडांची अंतर भूमी

पांचवें उदाहरण

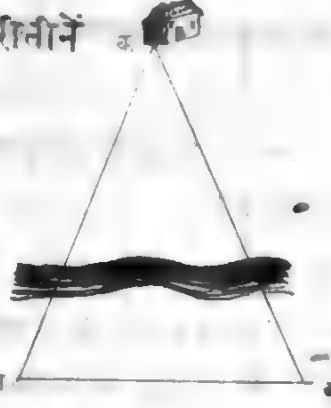
दुस्तर नदीचे परतीरीं एक घर आहे तें नदीचा आलीकडील तीरापासून किती लांब आहे तें कळावें, तेव्हां त्या नदीआलीकडे एक सरबरेष २०० यार्ड करून तीचे दोन शेवटांवर घात्रां घराचें मध्यस्थळ लक्षून दोन कोन मापिलें, त्यांत एक ६८° २ आणि दुसरा ७३° १५ आला, तेव्हां दोन शेवटांपासून तें घर किती लांब आहे तें सांग.

भूमिती

(५०)

भूमितीकृत्यरीतीने

स्केलावरून अब २०० चार्ड स
रळ रेघ कर, नंतर अक रेघ कर, अशी
कीं \angle अ $६०^{\circ} \dots २$ होईल. मग बक रेघ
कर, अशी कीं \angle ब $७३^{\circ} \dots १५$ होईल, या
दोन रेषांचा छेदनबिंदु घराचा मध्य कृत्य
क होईल. आतां दोन शेवटांपासून ते घर
किती लांब आहे ते स्केलावरून कवेल.



गणितरीतीने

\angle अ $६०^{\circ} \dots २$

\angle ब $७३^{\circ} \dots १५$

बेरीज $१४१^{\circ} \dots १७$

चातून $१८०^{\circ} \dots$ वजाकरून.

\angle क $३८^{\circ} \dots ४३$ बाकी.

जशी \angle क $३८^{\circ} \dots ४३$ याची भुजज्या	लाग	९७९६२०६
त्याचे समोरचे अब २०० या बाजूस होत्ये		२३०१०३०
तशी \angle अ $६०^{\circ} \dots २$ याची भुजज्या		९९६७२६८
त्याचे समोरचे बक २९६५४ या बाजूस होईल		२४७२०९२
जशी \angle क $३८^{\circ} \dots ४३$ याची भुजज्या		९७९६२०६
त्याचे समोरचे अब २०० या बाजूस होत्ये		२३०१०३०
तशी \angle ब $७३^{\circ} \dots १५$ याची भुजज्या		९९८११७१
त्याचे समोरचे अक २०६१९ या बाजूस होईल		२४८५९९५

(५१)

साहावें, एक किल्याचे बाहेर ३६ फुट रुंदीचा चर आहे, याजकरिता चराचे बाहेरील काठावर समोर किल्याचे भिंतीचे शिखर लक्षून कोन मापला तो ६२° ४०' आला तेव्हां त्या भिंतीची उंची किती आहे आणि चराचे बाहेरून किल्यावर चढणें नर शिडी किती लांब असावी तें सांग

उत्तर { भिंतीची उंची ६९.६४ फुट
शिडीची लांबी ७०.४ फुट

सातवें, एक भिंत अथवा कांहीं आहे त्यास मूळापासून २३ फुट १० इंचाचा टेंकु लागला पाहिजे आणि त्या भिंतमूळापासून ११ फुट जागा सोडून टेंकू रोवणें आहे तेव्हां तो टेंकू किती फुट लांब असावा तो सांग.

उत्तर २६.३

आठवें, एक शहराचे राजमार्ग ४० फुट लांबीची शिडी नेत होत ती रस्तांत उभी केली आणि उजव्या कडील हवेलीशीं टेंकिली ती भूमीपासून ३३ फुटीवर खिडकीस लागली, तशी तेथूनच डाव्या कडील हवेलीशीं टेंकिली ती २१ फुटीवर लागली तेव्हां तो राजमार्ग किती फुट रुंद आहे तो सांग.

उत्तर ५६.६४९ फुट

नववें, एक स्थळीं सप्तभूमीवर ताडाचें साड होतें तें वार्यानें मोडून त्याचें शेवट मूळापासून १५ फुटवर लागलें तो मोडल्यापासून तुकडा ३९ फुट लांब होता तेव्हां मोडल्यापूर्वी तें साड मूळापासून शेडवापर्यंत किती

(५२)

किती लांब होतें तें सांग.

उत्तर ७५ फुट

दहावें, सपाट भूमीवर एक बुरुज आहे, त्याचे पायापासून १७० फुट सरळरेषेवर त्या बुरुजाचे शिखराशी कोन मापिला तो ५२° ३१' आला तेव्हां त्या भूमीपासून बुरुजाची उंची किती आहे ती सांग.

उत्तर २२१.५५ फुट

अकरावें, समुद्राचे किनार्यावर १४३ फुट उंचीचा एक बुरुज आहे आणि समुद्रांत एक गलबन नागरलें होतें, त्या गलबनाचे खालचे बाजूपासून शिखराशी कोन मापिला तो ३५° आला, तेव्हां त्या बुरुजाचे पायापासून तें गलबन किती फुट लांबीवर आहे तें सांग.

उत्तर २०४.२२ फुट.

बारावें, सपाट भूमीवर एक डोंगर आहे, त्याचे पायाजवळ शिखराशी कोन मापिला तो ४६° आला तेथून २०० यार्डावर दुसरा कोन मापिला तो ३१° आला तेव्हां त्या भूमीपासून डोंगराची उंची किती आहे ती सांग.

उत्तर २०६.२८ यार्ड

तेरावें, एक दुर्गम ठिकाणी बुरुज आहे तेथे पराकाष्ठा करून जाव वलें ते ठिकाणी त्या बुरुजाचे शिखराशी कोन मापिला तो ५८° आला, तेथून ३०० फुट समरेषेनें मागे येउन दुसरा कोन मापिला, तो ३२° आला; तेव्हां त्या बुरुजाची उंची किती व प्रथम कोन मापिला तें ठिकाण बुरु-

जा

(५३)

जा पासून किती लांब तें सांग.

उत्तर { उंची ३०७.५३ फुट
लांबी १९२.१५ फुट

चौदावें. समपातळी भूमीवरील दुर्गम डोंगरावर एक मनोरा आहे. त्याची उंची कळावी म्हणोन त्या पानळीवर मनोर्याचे शिखराशीं कोन मापिला तो ५१° आला. आणि त्या मनोर्याचे पायाशीं मापिला तो ४०° आला. तेथून मागे २०० फुटीवर शिखराशीं कोन मापिला तो ३३° ४५' आला. तेव्हां त्या मनोर्याची उंची किती आहे ती सांग.

उत्तर ९३३३१.४८ फुट.

पंधरावें. एक घर आहे त्याचे पायावरील खिडकीचे खालचे बाजू शिं समरेष याया असा एक मनोरा आहे. तेव्हां कोणी त्या खिडकीतून त्याचे शिखराशीं कोन मापिला तो ४०° आला. तेथून १८ फुट उंच दुसरे मजल्यावरील खिडकीतून शिखराशीं कोन मापिला तो ३१° ३०' आला. तेव्हां तो मनोरा उंच किती व खिडकीपासून लांब किती तो सांग.

उत्तर { उंच २१०.८८
लांब ३५०.७९ } फुट

सोळावें. एक दुर्गम नदीचे परतीरी, दीपमाळ आहे. तीचे अलीकडील तीरी दीपमाळेचे पायाशीं समरेष स्थळी निशाणा केले. तेथून मागे चढत्ये पाटावर २८४ फुट मोठून तेथून पाहिले तो दीपमाळच शिखर समरेषेखाली आहे. तेव्हां त्या समरेषेची निशाणाकडे उतरता कोन मापिला तो

४२°

(५४)

४२ आला : आणि तेथूनच दीपमाळेचे पायाकडे मापिला तो २३ आला, आणि शिखराकडे मापिला तो १९ आला, तेव्हां त्या दीपमाळेची उंची आणि आणि निशाणापासून लांबी किती आहे ती सांग.

उत्तर { उंची ५७२६
लांबी १५०० } फुट

सतरावें, विलायतेकडे टनरीफ द्वीपांत पृथ्वीचे परिघ पातळी पासून २५ मैल लंबोचीचा एक पर्वत आहे. त्याचे शिखरावरून गोलपृथ्वीचे परिघ पातळीवर दृष्टी पावत्ये ते स्थळ लक्षांत कोन मापिला तो ८७ ... ५८ आला, तेव्हां शिखरापासून दृष्टिपावली ते लक्ष्य लांब किती आणि गोलपृथ्वीचा व्यास किती आहे ते सांग.

उत्तर { लांब १४०८७६
व्यास ७९३६ } मैल

अठरावें, समुद्रकांठीं एक किल्ला आहे तो फोडावा या संकेतानें दोन स्तोठां गलबतें समोर येउन कित्यांजवळ पुढें पाणी उथळ असेल या भेदा नें ओंठ पाण्यांत राहिली. तेथून गोळे लागू होतील किंवा नाही हा विचार ठरवायाकरितां दोनीं गलबतें पावमैल अथवा ४४० यांतीं चें मध्यें अंतर ठेवून दोहोंकडे जातील. आणि तेथून समरेघेंत एक गलबत आणि किल्ला लक्षांत परस्परांनीं दोन अंतरकोन मापिले, त्यांत एक ८३ ... ४५ आणि दुसरा ८५ ... १५ आला, तेव्हां एक एक गलबतापासून किल्ला किती लांब आहे तो सांग.

उत्तर

(५५)

उत्तर { २२९२.२६. याई
२२९८.०५. याई

एकविंसावें, नदीचे एके तीरीं उभा राहून दुसरे तीरीं घर आहे. तेथून किती लांब असेल ते कळावें या विचारानें ४०० याई एक समरेषा मापून तीचे दोन शेवटांवर एक शेवट आणि ते घर लक्षून दोन अंतर कोन मापिले त्यांत एक ७३.१५ आणि दुसरा ६८.०० आला. तेव्हां एक एक शेवटापासून ते घर किती लांब आहे ते सांग.

उत्तर { ५९३.८८ याई
६१२.३८ याई

विसावें, एक नदीची लंबरुंदी किती आहे ती कळावी या बुद्धीनें एक तीरीं पाण्यासंनिध ५०० याई समरेषा मोजून तिचे शेवटांवर एक शेवट आणि परतीरीं साड आहे ते ऐशीं लक्षून दोन अंतर कोन मापिले त्यांत एक ५३ आला, आणि दुसरा ७६.१२ आला, तेव्हां नदीची लंबरुंदी किती आहे ती सांग.

उत्तर ५२९.४८ याई

एकविंसावें, भूमीचे दोन सोडें समुद्रांत गेले आहेत, त्यांचे शेवटांवर मनोरे आहेत, त्यांचे मध्यें अंतर किती आहे ते कळावें म्हणून भूमीवर एक दीपमाळ आहे तेथून त्या मनोर्यांपर्यंत समरेषा मोजल्या, त्यांत एक ७३५ याई आणि दुसरी ८४० व दीपमाळे जवळ दोनी मनोरे लक्षून कोन मापिला तो ५५.४० आला, तेव्हां त्या दोन मनोर्यांमध्ये

अंतर

(५६)

अंतर किती आहे तें सांग.

उत्तर ७४१२ यार्ड

बाविसावें, एक नदीचे तीरीं कोणीं उभा राहून परतीरीं एक मनो-
रा व झाड आहे, त्या दोहोंमध्ये अंतर किती तें कळावें लक्षण त्याणे
त्या तीरीं ६०० यार्ड समरेष मापून त्या रेषेचे दोन शेवटांवर प्रत्येकीं मनो-
रा व झाड लक्षून दोन दोन कोन मासिले, तें ५३ २० आणि
९८ ४५ आणि ५८ २० व ९५ २० आले. तेव्हां मनोरा व
झाड यांचे मध्य अंतर किती आहे तें सांग.

उत्तर ९५९५०६६ यार्ड

तेविसावें, दुसरी नदीचे पलीकडे एक झाड आहे. तें अलीकडील
तीरापासून किती लांब आहे, तें कळावें आणि कोन मापायाचे यंत्र
अवळनाहीं, सांकळमान आहे. तेव्हां अलीकडील तीरीं ५०० यार्ड अब-
रेष मापून शून्याचे समरेषेत अ. शेवटावरून पुढे १०० यार्ड अक रेषे के-
ली. तशीच शून्याचे समरेषेत ब शेवटावरून पुढे १०० यार्ड बड रेषे केला
नंतर अड कर्णरेष ५५० आणि बक ५६० आहे, तेव्हां अ व या
शेवटांपासून शून्य लक्षणजे झाड किती यार्ड लांब आहे तें सांग.

उत्तर { अ ५२६२५ यार्ड
ब ५०००९ यार्ड

चोविसावें, कोणीं एक किल्या भोंवता. फौजेचा वेढा पडला,
आणि किल्यांतल सर्वे कृष्ट तीन लक्ष्ये अ, ब, क, त्यांत अ, क,
लक्ष्यांचे

(५७)

लक्षांचे अलीकडे ब लक्ष्य स, चे समोर आहे, त्या तिहींची लांबी
अब २६६ $\frac{१}{४}$ बक ३२७ $\frac{१}{२}$ अक ५३० याप्रमाणे कोंजवाल्यास कि-
त्याचे पूर्व नकाशावरून ठाऊक आढेत आणि जेथे मोर्चा करणार तेथे
क स, त्यापासून अ, ब, क, हीं लक्ष्ये किती दूर आहेत तीं कळावीं
हणोन स, पासून दोन समकोन मापिले, त्यांत \angle असब १३ $\cdot \cdot$ ३०
आणि \angle बसक ०१ $\cdot \cdot$ ५० जाणा, तेव्हां तीं लक्ष्ये तेथून किती लांब
आहेत तीं सांग.

उत्तर	{	सअ ७५७.१४
		सब ५३७.१०
		सक ६५५.३०

पंचविसावें. हें उदाहरण पूर्वी सारखेंच आहे, परंतु यांत विशेष
षट्काच आहे कीं अक बाजू स चे समोर आणि त्याचे पलीकडे ब
लक्ष्य त्या बाजूचे सुमारे मध्य समोर आहे, आणि अक ८००
अब ६०० बक ४०० आणि \angle असब ३३ $\cdot \cdot$ ४५ \angle बसक २२ $\cdot \cdot$ ३०
तेव्हां स पासून अ, ब, क, किती किती लांब आहेत ते सांग.

उत्तर	{	सअ ७०० $\frac{१}{३}$
		सब १०४२ $\frac{३}{४}$
		सक ०३४

PART VI.

MENSURATION.

CONTENTS.

	PAGES.
Mensuration of Planes and Areas	1
Mensuration of Solids	32

साहावा भाग

भूमापन

अनुक्रमणिका

	पृष्ठ
क्षेत्रफल	१
घनफल	३२

श्री

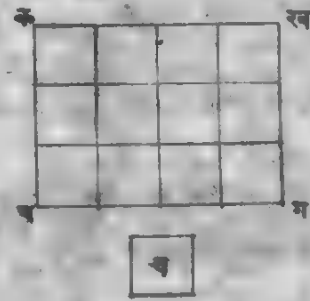
क्षेत्रफल

सपाटीचे अथवा पातळीचे क्षेत्रफल मणजे मर्यादेचे आंत जाडीशिवाय समकोष्टक्षेत्राचे केवळ पातळीचेच जें मान आहे त्या स पातळीचे क्षेत्रफल म्हणतात.

या सरळपातळीचे मानाची रीति ही आहे कि त्या क्षेत्रांत लाहान लाहान चौरस कोष्टक आहेत जांची लांबी व रुंदी एक एक इंच अथवा एक एक फुट किंवा एक एक यार्ड आहे त्या सर्व कोष्टकांचे मानाची जी एकंदर बेरीज आहे तें क्षेत्रफल होय.

लाहान चौरस कोष्टकाची बाजू जर एक इंच आहे तर त्या समकोष्ट क्षेत्रांत जितके लाहान चौरस कोष्टक आहेत तितके चौरस इंच त्या पातळीचे क्षेत्रफल जालें. जर लाहान चौरस कोष्टकाची बाजू एक फुट आहे तर तितक्या चौरस फुट जाल्या. जर लाहान चौरस कोष्टकाची बाजू एक यार्ड आहे तर तितके चौरस यार्ड जाले.

आतां मनांत आण किं कसबगघ या काढकोन चौकोनाचे क्षेत्रफल करणें आहे त्याचे रवाली लाहान चौरस आहे



हें

(२)

हैं त्या मोठे काटकोन चौकोनांत जितके वेळ जातें तितकें क्षेत्रफळ आहे या जागेवर १२ वेळ जातें लाहान चौरसाची बाजू १ इंच आहे तेव्हा या काटकोन चौकोनाचें क्षेत्रफळ १२ चौरस इंच जालें एक फुट आहेत १२ चौरस फुट जाल्या एक यार्ड आहेत १२ चौरस यार्ड जाले

प्रथम कृत्य

समांतर रेघ चौकोन क्षेत्राचें क्षेत्रफळ करायचें चौरस अथवा काटकोन चौकोन किंवा रांबस किंवा रांबायद असेल

समांतर रेघ चौकोनाची लांबी व लंबाईची असेल ती परस्प-
र गुणून जो गुणाकार येईल तो त्या समांतर रेघ चौकोनाचें क्षेत्र-
फळ जालें *

* या शीतीची सत्यता भूमितीचे ८१ सिद्धांताचे दुसऱ्या कुरलरी वरून कळते ही सत्यता दुसऱ्या शीती वरूनही सिद्ध होई; वर केलेला काटकोन चौकोन सांगितली आकृती असावी; आणि त्याची लांबी आणि रुंदी कित्येक भागांनी भागली असावी; म्हणजे प्रत्येक भाग सांगितल्या एकूण भागाचे बरोबर, म्हणून या आकृतीत लांबीचे ४ भाग आणि रुंदीचे ३ भाग आहेत; आणि समोरासमोरी भागविणें सरळरेषांनी साधितों असावी. तेव्हा प्रकट होतें किंवा या रेघा काटकोन चौकोनास कित्येक लाहान लाहान चौरसांनी भागितान, ते चौरस सांगितल्या मापाचे एकूण (२४) चौरसाचे बरोबर आहेत; आणि अधिक प्रकट होतें किंवा लाहान चौरसांची संख्या त्या आकृतीचें क्षेत्रफळ म्हणजे लांबीचे रेषेत जितके एकूणचे भाग आहेत त्याचे आणि रुंदीचे रेषेत जितके एकूणचे भाग आहेत त्याचे गुणाकाराचे बरोबर आहे; आणि या आकृतीत एकूणचे भाग $४ \times ३ = १२$ आहेत

आणि भूमितीचे २५ व्या सिद्धांताचे दुसऱ्या कुरलरी वरून निश्चय होतो किंवा कोणतीही निकसे समांतर रेघ चौकोन आकृती एक काटकोन चौकोनाचे बरोबर आहे, याची लांबी आणि लंबाई याचे बरोबर आहे याजकरिता ही शीती सर्व समांतर रेघ चौकोनास साधारण आहे

उदाहरणें

(७)

उदाहरणें

प्रथम एक समांतररेख चौकोन आहे जाची लांबी १२२५
आणि लंबोंची ८५ आहे त्याचें क्षेत्रफळ किती होईल तें सांग

$$\begin{array}{r} १२२५ \text{ लांबी} \\ \times ८५ \text{ लंबोंची} \\ \hline ६१२५ \\ ९८०० \\ \hline १०४१२५ \end{array} \quad \text{क्षेत्रफळ हें उत्तर}$$

दुसरें एक चौरस आहे त्याची बाजू ३५२५ आहे त्याचें
क्षेत्रफळ किती होईल तें सांग

उत्तर १२४२५६२५

तिसरें एक तकता काटकोन चौकोन आहे जाची लांबी
१२३ फुट व रुंदी ९ इंच आहे त्याचें क्षेत्रफळ किती फुट होईल
तें सांग

उत्तर ९३ फुट

चवथें रांबस आकृतीचें एक शेत आहे जाची लांबी ६२
साकळ आणि लंबोंची ५४५ साकळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ कि
ती होईल तें सांग

उत्तर ए रू पच

पांचवें रांबायद आकृति पातळीवर रंग लावावयाचा आहे
तिची लांबी ३७ फुट व लंबोंची ५ फुट ३ इंच आहे आणि

रंगणाबळ

(४)

रंगणावळ चौरस यार्डावर आहे तेव्हा या पातळीचे क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होतील ते सांग

उत्तर २१ १/२ चौरस यार्ड

दुसरें कृत्य

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ करायाचे

त्याची प्रथम रीति त्रिकोणाचे पायाची लांबी आणि लंबांची या दोन्ही परस्पर गुणून जो गुणाकार येईल त्याचे अर्ध करावे ते अर्ध त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ जालें* अथवा लांबी व उंची यांत एकास एकाचे अर्धाने गुणावे जो गुणाकार येईल ते क्षेत्रफळ जालें

उदाहरणें

प्रथम एक त्रिकोण आहे जाचे पायाची लांबी ६२५ आणि उंची ५२० आहे त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती होईल

$$\begin{array}{r} ६२५ \\ ५२० \\ \hline १२५०० \\ २) १२५ \\ \hline ३२५००० \\ १६२५०० \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ६२५ \\ २६० \\ \hline ३७५०० \\ १२५० \\ \hline १६२५०० \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ३१२५ \\ ५२० \\ \hline ६२५०० \\ १५६२५ \\ \hline १६२५००० \end{array}$$

हे उत्तर

* या रीतीची सत्यता प्रकट आहे, कारण भूमितीचे २६ वे सिद्धांत पासून नि-
श्चय जाला कि कोणताही त्रिकोण एक समान्तर बाजू त्रिकोणाचे अर्धावरीवर आहे,
जाचा पाया आणि लंबांची त्याचे बरोबर आहे

दुसरें

(५)

दुसरें एक त्रिकोणाच्या पाया ४० फुट आणि उंची ३० फुट आहे त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होईल

उत्तर $६६ \frac{२}{३}$ चौरस यार्ड

तिसरें एक त्रिकोणाच्या पाया ४९ फुट आणि उंची $२५ \frac{१}{२}$ फुट आहे त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होतील

उत्तर $६८ \frac{५३}{४}$ } चौरस यार्ड
अथवा ६८.७३६१

चवथें एक त्रिकोणाच्या पाया १८ फुट ४ इंच आणि उंची ११ फुट १० इंच आहे त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ किती चौरस फुट होईल

उत्तर $१०८ \frac{५}{३}$ फुट

दुसरी रीति, जेव्हां त्रिकोणाचे दोन बाजूंची लांबी आणि आंतील कोनाचें माप सांगितलें आहे :

सांगितल्या दोन बाजू परस्पर गुणून गुणाकाराचें अर्ध घ्यावें : नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या जशी त्रिज्या : सांगितल्ये कोनाचे भुज ज्यास आहे : : तसा तो अर्धा गुणाकार : त्रिकोणाचे क्षेत्रफळास

अथवा क्षेत्रफळा करितां तो अर्धगुणाकार सांगितल्ये कोनाचे वास्तवीक भुज ज्याने गुणावा *

* लघुन अब अक या दोन सांगितल्या बाजू असल्या, जांचे आंमला कोन सांगितला. अबवर फपूलं व कर. आता प्रथमरीती प्रमाणें $\frac{१}{२}$ अब x कप हें त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ आहे.

(६)

उदाहरणें

प्रथम, त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काय आहे, जाचे दोन बाजूंची लांबी ३० आणि ४० आहे, आणि त्यांचे आंतरा कोन $20^{\circ} \cdot 59'$?

वास्तवीक संख्येने

लाग्रतमाने

प्रथम $\frac{1}{2} \times 40 \times 30 = 600$

तरजसा $1:600::\frac{40 \times 40 \times 40}{600}$ { ही $20^{\circ} \cdot 59'$ ची वास्तवीक भुजज्या } लाग $2 \cdot 6648669$

उत्तर $200 \cdot 4236$ हे क्षेत्रफळ; याचा लाग $2 \cdot 463025$

दुसरें त्या त्रिकोणांत किती चौरस यार्ड आहेत, जाचा एक कोन 45° आहे, आणि त्या कोनाचे दोहोंकडील बाजू २५ आणि $22\frac{1}{2}$ फुट आहेत ?

उत्तर $20 \cdot 66989$

तिसरी शीति त्रिकोणाचे सांगीतल्ये तीन बाजूंचे मापांवरून क्षेत्रफळ करायाची तीन बाजूंचे लांबीची वेरिजे घ्यावी आणि त्या वेरिजेचे दोन भाग करावे नंतर एक भागांतून तीं तीन बाजूंचीं मापें वेगळा लीं वजा करावीं नंतर त्या तीन बाक्या आणि पूर्व वेरिजेचा दुसरा भाग हे अंक

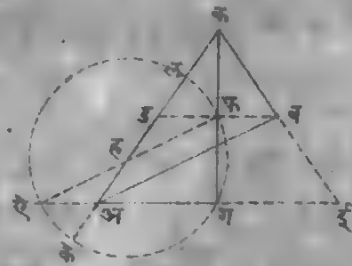
आहे. परंतु त्रिकोणमितीप्रमाणें जशी $<$ पची भुजज्या अथवा भिज्या : अक :: $<$ अची भुजज्या : कप, तशीच भिज्या $\frac{1}{2}$ असोन कप = अक \times $<$ अचे भुजज्यानें. याजकरितां क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}$ अथवा कप = $\frac{1}{2}$ अथवा अक \times $<$ अचे भुजज्यानें, जेव्हा भिज्या १ आहे अथवा जशी भिज्या : $<$ अचे भुजज्या :: $\frac{1}{2}$ अथवा अक : क्षेत्रफळास.



परस्पर

परस्पर गुणून गुणाकारानें वर्गमूळ करावें तें वर्गमूळ त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ होय *

✱ सप्तोऽन्यक सांगीतज्ञा वि कोण
 असावा. आई बड या समांतर रेखा कर, अशा कीं
 अक बाजूस उ स्थळावर आणि कब बाजू वा
 टवून विला ई स्थळावर मिळतील आणि
 कड = कब आणि कई = कअ होईल. नंतर
 कफग रेफ कर अशी की उब आई रेखांवर लंब
 असोन त्यांस फ आणि ग या स्थळांवर दुभा
 गील; आणि फहरे रेफ बअशीं समांतर कर;
 अशी कीं अक रेघेंस ह स्थळावर मिळेल आ-
 णि वाढित्ये आई रेघेंस रे स्थळावर मिळे-
 ल. आता शीबरी ह मध्यकरून फह मिज्येने
 एक वर्तुळ कर असे कीं अकरेफ वाढवून वि-
 ला के स्थळावर मिळेल, या वर्तुळाचा परिघ
 ग बिंदूचे पार जाईल, कारण ग कोन (५०.५)
 पार जाईल, कारण समांतर रेखांचे आश्रया-
 हूड = हअ आणि हफ = हरे = $\frac{1}{2}$ अब आहे



यांतून निघतेकीं हंअ अथवा हड हा अक कब या दोन बाजूंचे वजावाकीचे अर्धा बरोबर आहे; आणि हक = त्याचे बेरिजेचे अर्थ; अथवा $\frac{1}{2}$ अक + $\frac{1}{2}$ कब; पुनः हके = हऐ = $\frac{1}{2}$ ऐफ अथवा $\frac{1}{2}$ अब; याजकरितां कके = $\frac{1}{2}$ अक + $\frac{1}{2}$ कब + $\frac{1}{2}$ अब सणजे हा अबक त्रिकोणाचे तीन बाजूंचे बेरिजेचे अर्धा बरोबर आहे; अथवा या त्रिकोणाचे तीन बाजूंचे बेरिजेचे स्थळांस अक्षर चिन्ह घेतलें तर कके = $\frac{1}{2}$ स; पुनः हक = हऐ = $\frac{1}{2}$ ऐफ = $\frac{1}{2}$ अब अथवा केल = अब याजकरितां कल = कके - केक = $\frac{1}{2}$ स - अब आणि अके = कके - कअ = $\frac{1}{2}$ स - अक आणि अल = उके - कक - कड = $\frac{1}{2}$ स - कब

आतां त्रिविधेषु स्वरफलात्वे प्रथमं रीतिं प्रमाणेन अगः कग = Δ अकई आणि अगः
 फग = Δ अबई याजकरितां अगः कफ = Δ अबक, आणि समान्तररेषात्वे आश्रयाने
 अगः कग :: उफ अथवा ऐअः कफ, याजकरितां अगः कफ = (Δ अबक) = कग. ऐअं =
 कग. उफ संप्रोक्तं अगः कफ. कग. उफ = Δ^2 अबक.

परंतु कग-कफ = कके-कल = $\frac{1}{2}$ स- $\frac{1}{2}$ स-अब, आणि अग-इफ = अके-अल = $\frac{1}{2}$ स-अक- $\frac{1}{2}$ स-बक या अक्षरां अग-कफ-कग-इफ = Δ अबक = $\frac{1}{2}$ स- $\frac{1}{2}$ स-अब- $\frac{1}{2}$ स-अक- $\frac{1}{2}$ स-बक, म्हणजे हा अबक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळाचा वर्ग आहे हे सिद्ध

अथवा या शीतने

या कारणा पासून अगः कफः = Δ अबक आणि कगः अगः :: कफः उफः तेव्हा प्रथम आणि दुसरे या पक्षांनी कफला गुणून तसें तिसरे आणि चौथे याणीं अगला गुणून प्रमाण राशी याप्रमाणें होतात. कगः कफः :: अगः कफः :: अगः कफः उफः अगः, अथवा कगः कफः Δ अबकः :: Δ अबकः उफः अगः स्तूनीन अबक त्रिकोणाचें

क्षेत्रफल

(८ ७)
उदाहरणे

प्रथम एक त्रिकोणाच्या बाजू २००३००४० लांब आहे त्याचे क्षेत्रफल काय होईल

$\begin{array}{r} २० \\ ३० \\ ४० \\ \hline २०० \end{array}$	$\begin{array}{r} ४५ \\ २० \\ \hline २५ \end{array}$	$\begin{array}{r} ४५ \\ ३० \\ \hline १५ \end{array}$	$\begin{array}{r} ४५ \\ ४० \\ \hline ५० \end{array}$
	२५ प्र. बाकी	१५ दु. बाकी	५० ति. बाकी

२) २०० अर्धवेगज

$४५ \times २५ \times १५ \times ५ = ८४३७५$ यांचे वर्गमूल
 २९०४७३७ हे क्षेत्रफल

दुसरें एक त्रिकोणाकृति भिंतीस गितावा करायाचा आहे जिच्या तीन बाजूंची लांबी ३००४००५० फुट आहे आणि गिताव्याची मेहेनत चौरस यार्डवर आहे तेव्हा या त्रिकोणाकृति भिंतीचे क्षेत्रफल किती चौरस यार्ड होतील

उत्तर $६६ \frac{३}{४}$ चौरस यार्ड

तिसरें एक त्रिकोणाकृति शेताचे तीन बाजूंची लांबी २५६९४९०० आणि ५०२५ फुट आहे तेव्हा त्याचे क्षेत्रफल किती चौरस यार्ड होतील

उत्तर

क्षेत्रफल कग. कफ आणि डफ. अग या पदांमध्ये मध्यप्रमाण आहे. अथवा याचे बरोबर किमती या हे स. हे स-अब. हे स-अक. हे स-बक हे सिद्ध
 तिसरें कृत्य

(९)
तिसरें कृत्य

त्रापीज्यायदाचें क्षेत्रफल करायाचें

त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर बाजूंचे लांबीची बेरीज घ्यावी
नंतर ती बेरीज त्या बाजूंचे मध्यांतर लांबीने गुणावी जो गुणाकार
येईल त्याचें अर्ध त्या त्रापीज्यायदाचें क्षेत्रफल होईल (भू०२९सि०प्र०)

उदाहरणें

प्रथम एक त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर बाजूंची लांबी
७५० आणि १२२५ यार्ड आहे तशी अंतर लांबीची १५४० यार्ड आहे त्या
चें क्षेत्रफल किती चौरस यार्ड आहे तें सांग

$$\begin{array}{r} १२२५ \\ ७५० \\ \hline १९७५ \\ ७५० \\ \hline १३८२५० \\ १३८२५ \\ \hline १५२०७५० \end{array}$$

चौरस यार्ड क्षेत्रफल हें उत्तर

दुसरें एक तक्त्याची लांबी १२ फुट ६ इंच आणि रुंदी एक
बाजूची १५ इंच आणि दुसरी बाजूची ११ इंच आहे तेव्हां त्याचें क्षेत्र-
फल किती चौरस फुट जात्या तें सांग

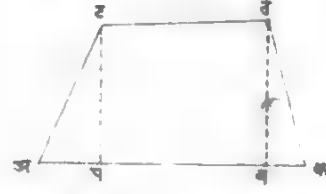
उत्तर १३ ३/४ चौरस फुट

तिसरें एक चौ बाजू शेत आहे त्याची एक बाजू अक आणि
त्या

(१०)

त्या बाजू वर समोरचे दोन कोनां पासून दोन लंबांची लांबी मोजिली आहे ती रवाली लिहिल्या प्रमाणें आहे

अ प = ११० फुट.
अ ब = ७४५ फुट.
अ क = १११० फुट.
ट प = ३५२ फुट.
ठ ब = ५९५ फुट.



उतर ४२८६२० चौरस फुट

चवथें कृत्य

त्रापीज्यमाचें क्षेत्रफल करायाचें

त्रापीज्यमांत एक कर्णरेष करून त्याचे दोन त्रिकोण करावे नंतर पूर्व रीतीने दोन त्रिकोणाचें क्षेत्रफल करून बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्या त्रापीज्य माचें क्षेत्रफल होईल

अथवा या प्रमाणें

कर्णरेषेवर समोरचे दोन कोनां पासून दोन लंब करावे त्या दोन लंबांची बेरीज घ्यावी नंतर ती बेरीज कर्णरेषेचे लांबीने गुणावी गुणाकाराचे अर्थ त्या त्रापीज्यमाचें क्षेत्रफल होईल

उदाहरणें

प्रथम एक त्रापीज्यमाचे कर्णरेषेची लांबी ४२ समोरचे दोन कोनां पासून

(११)

पासूनचे दोन लंबांची लांबी १६ आणि १८ आहे त्या बापीज्यमाचे क्षेत्रफळ काय होईल ते सांग

आता $१६ + १८ = ३४$ याचे अर्थ १७

नंतर $४२ \times १७ = ७१४$ क्षेत्रफळ हे उत्तर

दुसरे एक बापीज्यमाची कर्णरेघ ६५ आणि समोर कोनापासूनचे लंब ५८.३३ हे फुट आहेत त्या बापीज्यमाकृति भूमीम फरसबंदी करणे आहे ते-
का एक दगड एक चौरस यार्ड असे किती दगड लागतील

उत्तर $३३ \times ४१६ \frac{१}{२}$ चौरस यार्ड

तिमरे एक चोबाजू अबकद क्षेत्र आहे तेथे अडचणीमुळे रबाली लि-
हिनी इतकी मात्र मापे मोजितां आलि बकबाजू २६५ यार्ड दुसरी अडबा-
जू २०० यार्ड अक कर्णरेघ ३७८ यार्ड कर्णावर समोर कोना पासून दोन
लंब लागतान तेथपर्यंत दोहोंकडून कर्णाचे माप अई लबपर्यंत कर्णरेघ
१०० यार्ड दुसरा कफ लंब पर्यंत दुसरे कडून कर्णरेघ ७० यार्ड याप्रमाणे मा-
पें मिळाली आहेत तेव्हा ही आकृति कृपास त्रिकोणांनी करून क्षेत्रफळ
किती चौरस यार्ड येईल ते सांग

उत्तर ८६५६२ चौरस यार्ड

पान्यवेकृत्य

विषम बहुकोनाचे क्षेत्रफळ करा याचे

विषम बहुकोनांत कर्णरेघा कराव्या अशाकिं त्यांत सर्व बापी-
ज्यम आणि

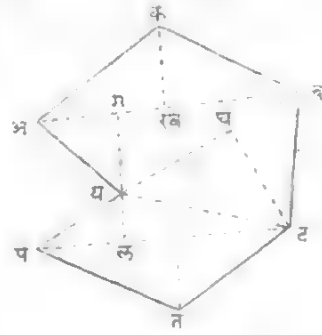
(१२)

ज्यम आणि त्रिकोण होतील नंतर एक एक त्रिकोणाकृतीचें क्षेत्रफळ करून त्या सर्व क्षेत्रफळांची मेळवणी करावी ती बेरीज त्या विषम बाजू बहुकोनाचें क्षेत्रफळ होय

उदाहरणें

अकचटतपय ७ एक विषम बहुकोन आहे जाचे कर्ण व त्यांजवर लंब यांची लांबी खाली लिहितों या प्रमाणें आहे

अ-च	५५
प-ट	५२
य-च	४४
य-ग	१३
क-ख	१८
य-ल	१२
त-ब	१८
घ-ट	२३



उत्तर १८७८ ३

साहायें कृत्य

समबाजूबहुकोनाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथमरीति सर्वबाजूंचे लांबीची बेरीज घ्यावी नंतर ती बेरीज त्याचे मध्यापासून एक बाजूवर लंब करून त्या एक लंबाचे लांबी में गुणावी जो गुणाकार होईल त्याचें अर्ध करावें तें अर्ध त्या समबाजू बहुकोनाचें क्षेत्रफळ होय *

* ही रीति अशी आहे किं मध्यापासून बहुकोनाचे कोनांपर्यंत लंब करूनजे त्रिकोण होतील त्यांची येगळाती क्षेत्रफळें करून त्यांची बेरीज घ्यावी ती या बहुकोनाचे क्षेत्रफळा बरोबर आहे

(१३)

उदाहरण

प्रथम एक समबाजू पंचकोन आहे त्याचे एक एक बाजूची लांबी २५ फुट आणि मध्यापासून एक बाजूवर लंबाची लांबी १७.२०४७७३७ आहे त्याचे क्षेत्रफळ किती होईल

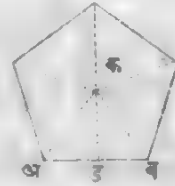
आता $२५ \times ५ = १२५$ बेशीज बाजूंची

आणि $१७.२०४७७३७ \times १२५ = २१५०.५९६७१२५$ हा गुणाकार याचे अर्ध १०७५.२९८३५६२५ क्षेत्रफळ जें इच्छितें होतें

दुसरी रीति समबाजू बहुकोनाचे एक बाजूचे लांबीचा वर्ग करावा आणि कोष्टकांत बाजूसंख्येचे समोर जे अंक आहेत त्याणीं तो वर्ग गुणावा म्हणजे गुणाकार होईल तें क्षेत्रफळ आलें +

+ या रीतीस आश्रय हा गुण आहे की सर्व सरूप समबाजू बहुकोन सरूपाकृतीचे आहेत; याजकृती (भू. ८९ सि. प्र०) ते परस्परांस आहेत असे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग; आतां कोष्टकांत जे गुणक लिहिले आहेत ते आपआपल्ये बहुकोन आकृतींची क्षेत्रफळां आहेत; जेव्हां त्यांची बाजू एकमेव आहे, यावरून सांगितल्ये रीतीची सत्यता प्रकट आहे.

टीप कोष्टकांत जें क्षेत्रफळ लिहिलें आहेत तीं जेव्हां एक एक बाजू एकमेव आहे, या रीतीनें गणित करून निघेल; बहुकोनाचे क मध्यापासून सर्व कोनां पर्यंत रेखा कर, आशा कीं आकृतीस जितक्या बाजू आहेत तितके त्यांत त्रिकोण होतील; आतां या त्रिकोणांत एक अबक त्रिकोण असावा, जाची लंबोंची कड आहे. बहुकोनाचे बाजूसंख्येनें ३६० भागावे, जी भागाकार येईल ती अकड कोनाचे माप होईल; या मापानें अर्ध अकड कोन होईल; हा अकड कोन ९० तून वजा केला तर बाकी राहील ती कअड कोनाचे माप होईल; नंतर या रीतीनें प्रमाणसारी होतील; अशी विज्या: अड:; कअड कोनाची स्पर्शरेषा: कड; हा लंब पायाचे अर्ध अड याचें गुणून गुणाकार अबक त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ होईल; नंतर या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ दुसरे त्रिकोणाचे संख्येनें गुणून जो गुणाकार येईल तो सगळ्या आकृतीचें क्षेत्रफळ होईल.



कोष्टक

बाजू संख्या	क्षेत्रनाम	क्षेत्र अथवा गुणकांक	बाहेरील वर्तुळाची विज्या
३	त्रिकोण क्षेत्र	०.४३३०१२७	०.५७७३५०३
४	चौकोन अथ. चौरस	१.०००००००	०.७०७१०६८
५	पंचकोन क्षेत्र	१.७२०४७७४	०.८५०६५०८
६	षट्कोन क्षेत्र	२.५९८०७६२	१.०००००००
७	सप्तकोन क्षेत्र	३.६३३९१२४	१.१५२३८२४
८	अष्टकोन क्षेत्र	४.८९८४२७१	१.३०६५६३८
९	नवकोन क्षेत्र	६.१८१८२४२	१.४६१९०२२
१०	दशकोन क्षेत्र	७.६९४२०८८	१.६१८०३४०
११	एकादशकोन क्षेत्र	९.३६५६३९९	१.७७४७३२४
१२	द्वादशकोन क्षेत्र	११.१९६१५२४	१.९१९८५१६

उदाहरणे

प्रथम पूर्वीचे उदाहरण घ्यावे. जा पंचकोणाचे बाजूंची लांबी

२५ पंचवीस आहे

आता २५ = ६२५

बाजूसंख्येचे समोर अंक १.७२०४७७४

याजकरिता $१.७२०४७७४ \times ६२५ = १०७५.२९८३७५$ पूर्वीप्रमाणे क्षेत्र
फल जाले

दुसरे

(१५)

दुसरें जाचे एकएक बाजूची लांबी २० असें एक समबाजू त्रिकोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १७३.२०५०८

तिसरें जाचे एकएक बाजूची लांबी २० वीस असें एक समबाजू षट्कोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १०३९.२३०४८

चवथें जाचे एकएक बाजूची लांबी २० वीस असें एक समबाजू अष्टकोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल.

उत्तर १९३१.३७०८४

पांचवें जाचे एकएक बाजूची लांबी २० वीस असें एक समबाजू दशकोन आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल.

उत्तर ३०७७.६८३५०

सातवें कृत्य

वर्तुळाचे व्यासापासू परिघ आणि परिघापासून व्यास करायाचें आतां रचालीं होन शीती सांगतो त्यांतून कोणत्याही एक्या शीतीनें हें कृत्य होईल.

जसें ७ : २२ :: व्यास : परिघाला :
अथवा जसा १ : ३.१४१६ :: व्यास : परिघाला :

उदाहरणें

दु. जसे ३१४१६ : १ : : २५००० : ७९५७ $\frac{३}{४}$ मैल व्यास हें उनर
आठवें कृत्य

बरोबर

आठवें कृत्य

कौणे वर्तुळाचे कौसाची लांबी करायाचें

कौसांत जितके अंश आहेत ते ०१७४५ नीं गुणाचे जो गुणाकार

येईल

बरोबर आहे. या पासून निघतें कीं वरचा प्रमाणराशी स्पर्णजे उई : उब : : उब : उफ = उअ + अफ : या प्रमाणें रूप होतें. उई : उब : : उब : २ उई + उक : तेव्हां आघेत पदांचा आदि दोन मध्यपदांचा काटकोन चौकोन करून उब = २ उई + उई × उक.

आतां जर उई विज्या = १ घेतला तर या समीकरणास हें रूप होतें उब = २ + उक आणि याचें वर्गमूळ करून उब = $\sqrt{२ + उक}$: हें दोरबवितें कीं जर कोणत्याही कौसाचें सप्तमेटल ज्याचें माप २ या संख्येनें अधिक केलें तर त्याचे बेरिजेचें वर्गमूळ त्याच कौसाचे अर्धाची सप्तमेटल ज्या होईल.

आतां हें वर्तुळ परिघाचें गणित करायास या प्रमाणें कामांत घ्यावें; अक कौस परिघाचे द्वे बरोबर घ्यावा आणि वरचे सिद्धांतांत सांगितल्या प्रमाणें त्यास पुनः पुनः दुभागवें; असें करून अक ज्या स्पर्णजे परिघाचा $\frac{१}{२}$ हा आंतील समबाजू पट्टकोणाचे एक बाजूचे बरोबर आहे; याजकरितां तो अई विज्याचे अथवा एकाचे बरोबर आहे; तर अक उ या काटकोन त्रिकोणांत

उक = $\sqrt{अउ^२ - अक^२} = \sqrt{२^२ - १^२} = \sqrt{३} = १.७३२०५०८०७६$ स्पर्णजे हें सर्वपरिघाचें $\frac{१}{२}$ चे सप्तमेटल ज्याचें माप आहे.

तेव्हां वर सांगितल्ये सिद्धांता प्रमाणें कौसास पुनः पुनः दुभागून रोबटील वर्गमूळांत २ हा अंक मिळवून या शीतीनें बारावा चौबिसावा अठ्पेताळिसावा शाहोणवावा इत्यादिक परिघ भागांचे सप्तमेटल ज्याचें माप केलें. असें

$$\sqrt{३.७३२०५०८०७६} = १.९३१८५१६५२५$$

$$\sqrt{३.९३१८५१६५२५} = १.९८०३८८९७२२७$$

$$\sqrt{३.९८०३८८९७२२७} = १.९९५७१७८४६५$$

$$\sqrt{३.९९५७१७८४६५} = १.९९८९७१७४३$$

$$\sqrt{३.९९८९७१७४३} = १.९९९७१२२७५७$$

$$\sqrt{३.९९९७१२२७५७} = १.९९९९१७७५७८$$

$$\sqrt{३.९९९९१७७५७८} = १.९९९९९८७२६६९$$

$$\sqrt{३.९९९९९८७२६६९} = \dots$$

माप सप्तमेटल ज्याचें

१.९३१८५१६५२५
१.९८०३८८९७२२७
१.९९५७१७८४६५
१.९९८९७१७४३
१.९९९७१२२७५७
१.९९९९१७७५७८
१.९९९९९८७२६६९
१.९९९९९९८७२६६९

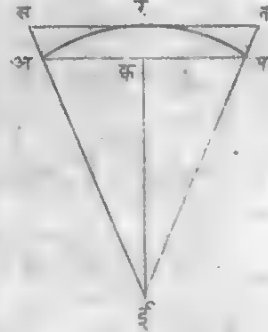
परिघाचे लिन कान्वे भागाचें

आतां या पासून स्पष्ट कळतें कीं ३.९९९९९८७२६६९ हा परिघाचे १५३६ वे भागाचे सप्तमेटल ज्याचा

येईल तो वर्तुळाचे त्रिज्याचे लांबीने गुणावा गुणाकार होईल तो त्या को-
साची लांबी होय[†]

ज्याचा वर्ग आहे; हा वर्ग ४ सणजे ज्याचा वर्ग यांतून घजा करून बाकी सणजे ००००१६७१११ ही परिघाचे सांगीतल्ये १५३६ व्या भागाचे ज्याचा वर्ग होईल; याजकरिता त्याचे वर्गमूळ सणजे १००००१६७१११ = ०००४०२०६११२ हे त्या ज्याचे लांबीने माप आहे. ही संख्या १५३६ याणीं गुणून गुणाकार ६२८११७८८ हे वर्तुळातील समबहुबाजू आकृतीचे परिमितीचे माप आहे; जीस बाजू १५३६ आहेत; आणि यास्तबच त्या बाजू परिघाचे संनिध येतुन केवळ परिघाकारच आल्या याजकरिता त्या परिमितीचे माप परिघाचे मापाजबजब जवळ होईल.

परंतु हे माप खरें मापाचे जवळ किती येतें तें दाखवावा करितां अकप = ०००४०२०६११२ ही वर्तुळातील समबाजू बहुकोन आकृतीची पूर्वी सांगितल्या प्रमाणें १५३६ ची एक बाजू असावी आणि सरत ही वर्तुळाचे बाहेरील तीरी सरूप समबाजू बहुकोन आकृतीची एक बाजू असावी; आणि ईवर्तुळ मध्यापासून ईफर लंब कर सणजे तो अप सत यांस क आणि र या स्थळीं दुभागील आतां अक = ३ अप = ०००२०४०२०५६ आणि ईअ = १ याजकरितां ईक = ईअ - अक = ०००१९९९५८१६७ आणि याजकरितां यांचे वर्गमूळ ईक = ०००१९९९९०८४ तेव्हां अप सत या समानर असोन ईक : ईर :: अप : सत अथवा आतील बहुकोनाकृतीची सर्व परिमिति : बाहेरील बहुकोनाकृतीचे सर्व परिमिति सं आहे;



सणजे जसा ०००१९९९९०८४ : १ :: ६२८११७८८ : ६२८११९२० हे बाहेरील समबाजू बहुकोन आकृतीचे परिमितीचे माप आहे आतां वर्तुळाचा परिघ आतील बहुकोनाकृतीचे परिमितीपेक्षां लोटा आहे परंतु बाहेरील बहुकोनाचे परिमितीपेक्षां लाहान आहे याजकरितां ६२८११७८८ यापेक्षां लोटा आहे

परंतु ६२८११९२० यापेक्षां लाहान आहे आणि याजकरितां यांचे बेरिजेचे अर्धा जवळ येईल; सणजे ६२८११८५४ यांत शेवटील अंक ४ याचे स्थळीं ३ लिहून माप खरें आहे.

या शीतीवरून सिद्धात्तां कीं जेव्हां व्यास २ आहे तेव्हां परिघ ६२८११८५४ आहे याजकरितां जेव्हां व्यास १ आहे तेव्हां परिघ पूर्वीचे अर्धा ३१४१५९२७ आहे सणून वरचे शीतींत जें प्रमाण १ : ३१४१६ हे सांगितलें आहे तें याचे जवळ जवळ आहे; आणि शीतींत दुसरें प्रमाण सांगितलें आहे जसे ७ : २२ अथवा १ : २३ = ३१४२८ इत्यादि हे जवळ जवळचें दुसरें प्रमाण आहे.

† पूर्व कृत्वाचे शीतीची सत्यता सिद्धकरावाकरितां दाखविलें गेलें कीं जेव्हां वर्तुळाची त्रिज्या १ आहे तेव्हां त्याचा परिघाची लांबी जात ३६० अंश आहेत ती = ६२८११८५४ आहे याजकरितां जसे ३६० : ६२८११८५४ :: १ : ०१७४५ इत्यादि ही लांबी एक अंशाचे कोसाची आहे याजकरितां हे ०१७४५ कितीही अंशांचे संख्येनें गुणून तो गुणाकारानितख्ये अंशांचे कोसाची लांबी होईल. पुनः याच कोणास्तव परिघ अथवा कोस हे परस्पर प्रमाणोत आहेत जसें त्यावर्तुळाचे व्यास अथवा त्रिज्या याजकरितां जशी त्रिज्या १ : दुसरे कोण लेही र त्रिज्येस : : सांगितल्ये पूर्व की साची लांबी = ०१७४५ : जितक्ये अंशाचा कोस आहे त्या संख्येनें ०१७४५ हे गुणून तो गुणाकार \times र सणजे हे वर लिहिल्ये शीती प्रमाणें आहे

उदाहरणें

(१९)

उदाहरणें

प्रथम एक वर्तुळाचा कौस आहे त्यांत ३० अंश आहेत आणि त्या वर्तुळ त्रिज्याची लांबी ९ फुट आहे त्या कौसाची लांबी किती होईल

उत्तर ४.७११५

दुसरें एक वर्तुळाचे कौसांत १२ अंश १० कळा आहेत आणि वर्तुळ त्रिज्याची लांबी १० फुट आहे तर त्या कौसाची लांबी किती होईल

उत्तर २.१२३१

नववें कृत्य

वर्तुळाचें क्षेत्रफळ करायाचें *

प्रथम शीति परिघाई आणि व्यासाई हीं दोनीं परस्पर गुणाचीं गुणाकार येईल तो त्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ जालें अथवा सगळा परिघ आणि सगळा व्यास हे परस्पर गुणून तो गुणाकार ४ याणीं भागावा भागाकार येईल तें त्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ जालें

* प्रथम शीतीची मत्पता भूमितीचे ९४ व्या सिद्धांता पासून स्पष्ट कळत्ये आणि दुसरी तिसरी शीती प्रथम शीतीपासून याप्रकारानें उत्पन्न होतात. वर्तुळाचा व्यास दाखवावाकरितां उ आणि परिघ दाखवावाकरितां कचे. आतां प्रथम शीती प्रमाणें $डक + ४$ हें क्षेत्रफळ जालें परंतु यातील सातव्या कृत्यावरून $क = ३.१४१६$ उ याजकरितां वरचें क्षेत्रफळ $डक + ४$ यास हें रूप होतें $ड \times ३.१४१६$ $ड + ४ = ७८.५४३$ ही दुसरी शीति आसी. आणि त्याच सातव्या कृत्यावरून $ड = क + ३.१४१६$ याजकरितां पूर्वीचें क्षेत्रफळ $डक + ४$ यास हें रूप होतें $क + ३.१४१६ \times क + ४ = क + १२.५६६४$ अथवा १२.५६६४ यांचा व्युत्क्रम घेऊन या सर्वास हें रूप होतें $क \times ०.७९५८$ ही तिसरी शीति आहे.

चतुर्थी थापासून स्पष्ट कळतें कीं वेगळ्या वर्तुळांचीं क्षेत्रफळां परस्पर प्रमाणांत आहेत जसे त्यांचे व्यासांचे वर्ग अथवा परिघांचे वर्ग; हीच मत्पता भूमितीचे ९२ व्या सिद्धांतावरून ही सिद्ध होत्ये.

(२०)

दुसरी रीति व्यासांचा वर्ग करावा आणि तो वर्ग ७८५४ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तें क्षेत्रफळ जालें

तिसरी रीति परिघांचा वर्ग करावा आणि तो वर्ग ०७९५८ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तें क्षेत्रफळ जालें.

उदाहरणें

प्रथम जांचा व्यास १० आणि परिघ ३१४१६ असें एक वर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

$$\begin{array}{r} \text{प्रथम रीतीनें} \\ ३१४१६ \\ १० \\ \hline ४) ३१४१६० \\ \hline ७८५४ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{दुसरें रीतीनें} \\ ७८५४ \\ १०० \\ \hline ७८५४ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{तिसरें रीतीनें} \\ ३१४१६ \\ ३१४१६ \\ \hline ०७९५८ \text{ याणीं गुण} \\ \hline ७८५४ \text{ क्षेत्रफळ} \end{array}$$

यावरून दिसतें या नीतही रीतीं करून क्षेत्रफळ ७८५४ बराबर येतें

दुसरें जांचा व्यास ७ आणि परिघ २२ असें एक वर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल.

उत्तर $२८ \frac{१}{२}$

तिसरें जांचा व्यास $२\frac{१}{२}$ फुट आहे त्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होतील.

उत्तर १००६९ चौ० या०

चौथें

(२१)

व्यास जात्रा परिघ १२ फुट असें एक वर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ११.४५२५

दाहावें कृत्य

दोन वर्तुळ परिघांचे मध्यें जें स्थळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथम रीति पूर्वरीतीप्रमाणें दोन वर्तुळांचीं क्षेत्रफळे करून त्यांत वजाबाकी करावी जी बाकी राहिल तें त्याचें क्षेत्रफळ होईल

दुसरी रीति मोठे वर्तुळाने व्यासाचा वर्ग करून त्यांत लहान वर्तुळाने व्यासाचा वर्ग वजा करावा जी बाकी राहिल ती ७८५४ याणीं गुणावी जो गुणाकार होईल तें क्षेत्रफळ होईल

तिसरी रीति दोन व्यासांची बेरीज घेऊन ती त्या दोन व्यासांचे वजाबाकीनें गुणावी गुणाकार येईल तो ७८५४ याणीं गुणावा जो गुणाकार होईल तें क्षेत्रफळ होय कारण भलत्ये दोन अंकांची बेरीज त्यांचे वजाबाकीनें गुणावी तो गुणाकार त्याच अंकांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे

उदाहरणें

प्रथम एक मध्य असून एक आंत आणि एक त्याचे बाहेर ऐशीं दोन

(२२)

दोन वर्तुळें आहेत त्यांत एकाचा व्यास १० आणि एकाचा व्यास ६ आहे तेव्हां त्या दोन परिघांचे मधील स्थळाचें क्षेत्रफळ काय होईल

आतां $१० + ६ = १६$ बेरीज आणि $१० - ६ = ४$ बाकी याजकरितां
 $७८५४ \times १६ \times ४ = ७८५४ \times ६४ = ५०२६५६$ क्षेत्रफळ उत्तर

दुसरें एक मध्य असून एक आंत आणि एक त्याचे बाहेर ऐशीं दोन वर्तुळें आहेत त्यांत एकाचा व्यास २० आणि एकाचा व्यास १० आहे तेव्हां त्या दोन परिघांचे मधील स्थळाचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर २३५६२

अकरावें कृत्य

वर्तुळाचे सेकतोरानें क्षेत्रफळ करावयाचें.

प्रथम रीति वर्तुळाची त्रिज्या सेकतोराने कोसाचे अर्धानें गुणावी गुणाकार येईल तें क्षेत्रफळ होय अथवा वर्तुळाचा व्यास सेकतोराने सर्वकोसानें गुणावा आणि तो गुणाकार ४ नीं भागावा जो भागाकार येईल तें क्षेत्रफळ होईल

दुसरी रीति सर्व वर्तुळाचें क्षेत्रफळ करून मग तें प्रमाण करून घ्यालावें जसे १६० या क्षेत्रफळास आहेत तसे सेकतोराने कोसांत जे अंश आहेत ते त्या सेकतोराने क्षेत्रफळास होतील

उदाहरणें

प्रथम जाचे कोसांत १८० असा एक वर्तुळाचा सेकतोर आहे त्या वर्तुळाचा

(२३)

वर्तुळाच्या व्यास ३ फुट आहे तेव्हां त्या सेकतोरान्चें क्षेत्रफळ काय होईल
प्रथम शीतीनें

पहिल्यान $३१४१६ \times ३ = ९४२४८$ परिघ-जाला

आणि जसे $३६०^{\circ} : ९४२४८ :: १८^{\circ} : ४७१२४$ कौसाची लांबी

नंतर $४७१२४ \times ३ \div ४ = ३५३४३$ क्षेत्रफळ हें उत्तर
दुसरें शीतीनें

पहिल्यान $७८५.४ \times ३ = ७०६८६$ हें सर्व वर्तुळाचें क्षेत्रफळ

नंतर जसे $३६०^{\circ} : ७०६८६ :: १८^{\circ} : ३५३४३$ सेकतोरान्चें क्षेत्रफळ

दुसरें जाचे कौसाची लांबी २० असा एक वर्तुळाचा सेकतोर आहे
हें आणि वर्तुळाची त्रिज्या १० तेव्हां त्या सेकतोरान्चें क्षेत्रफळ काय होईल
उत्तर १००

तिसरें जाचे कौसांत १४७००० २९ असा एक सेकतोर आहे आ-
णि वर्तुळाची त्रिज्या २५ तेव्हां त्या सेकतोरान्चें क्षेत्रफळ काय होईल
उत्तर ८०४३९८६ क्षेत्रफळ

बारावें कृत्य

वर्तुळ खंडाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथम शीति जा सेकतोर कौसाची लांबी वर्तुळखंड कौसाचे लांबी ब-
राबर आहे त्याचें क्षेत्रफळ पूर्वशीती प्रमाणें करावें

नंतर

(२४)

नंतर दोन त्रिज्या आणि वर्तुळखंडाची ज्या ऐसा त्रिकोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ करावें

नंतर वर्तुळखंड अर्धवर्तुळाहून लाहान आहे तर त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ सेकतोराचे क्षेत्रफळांत वजा करून बाकी राहिल ती त्या वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ जालें.

जर वर्तुळ खंड अर्धवर्तुळाहून मोठा आहे तर मोठे सेकतोराचें क्षेत्रफळ आणि त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ यांची मेळवणी करून जी बेरीज येईल ती त्या मोठे वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ जालें

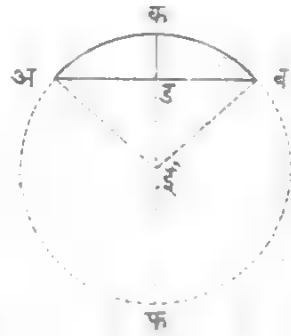
याची सत्यता आकृतीचें रूप पाहिल्यानें स्पष्ट कळत्ये

उदाहरणें

प्रथम अबकडअ या वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ काय आहे
जर अब ज्याची लांबी १२ आहे
आणि वर्तुळ त्रिज्या अई किंवा कई
१० आहे

प्रथम

जशी अई = १० : < डचे भुजज्या =
९० : : अड = ६ : ३६ ... ५२ $\frac{१}{२}$ =
३६ : ७७ सणजे हे अंश अईक कोनाम
ध्ये अथवा अक को सामध्ये आहेत,
त्यांची दुपट ७२ : ७४ हे अंश सगळ्ये



अबक

(२५)

अकब कौसांत आहेत.

आतां $७८५४ \times ४०० = ३१४१६$ हें सगळ्ये वर्तुळाचें क्षेत्रफळ आहे
याजकरितां जर $३६० : ७३७४ :: ३१४१६ : ६४३५०४$ हें अकबई सेकतोर
चें क्षेत्रफळ आहे

$$\text{पुनः } \sqrt{\text{अई}^2 - \text{अड}^2} = \sqrt{१०० - ३६} = \sqrt{६४} = ८ = \text{उई}$$

नंतर $\text{अड} \times \text{उई} = ६ \times ८ = ४८$ हें अईब त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ आहे

याजकरितां अकबई सेकतोर - अईब त्रिकोण = $६४३५०४ - ४८ =$
 ६४३५०४ हें अकबडअ या वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ आहे.

दुसरी शिनि वर्तुळखंडाची उंची वर्तुळाचे व्यासानें भागावी भागाकार ये-
ईलतो उंचीशब्दाचे खालचे कोष्टकांत पाहावा उंचीशब्दाचे उजव्ये कडे क्षेत्रफळ
शब्द आहे त्याचे खाली भागाकार अंकाचे समोर जे अंक आहेत ते काढ नंतर
ते अंक वर्तुळ व्यासाचे वर्गांनी गुण गुणाकार येईल तो त्या वर्तुळखंडाचें स्-
वफळ जालें.*

टीप जेव्हां भागाकार कोष्टकांत बरोबर मिळत नाही तेव्हां जसें लागर
तमकोष्टकांत अधिकतर पुनर संख्या घेउन त्यांपासून संख्या काढितात तसें
करावें.

* याशिनीस हा आशय आहे कीं सरूप सरळकृती परस्परांस आहेत जसे त्यांचे सरूप स-
रूप बाजूचे वर्ग कोष्टकांत वर्तुळखंडाचें माप त्या वर्तुळाचें आहे कीं जात्या व्यास १ आहे. आण-
खी प्रथम ओळीतील अंक त्या त्या वर्तुळ खंडाची उंची त्याचे त्याचे व्यासानें भागिली ते आहे
त. नंतर सरूप वर्तुळ खंडाचें क्षेत्रफळ कोष्टकांतून काढून ते सांगितल्ये व्यासाचे वर्गांनी गुणून जे
गुणाकार येईल तो त्या त्या सांगितल्ये व्यासाचे वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ होईल.

उंची

(२६)

उंची	क्षेत्रफल	उंची	क्षेत्रफल	उंची	क्षेत्रफल	उंची	क्षेत्रफल	उंची	क्षेत्रफल
००१	००१११	११	००४७०१	२१	११९९०	३१	२०७२८	४१	३०३१९
००२	००१७५	१२	००५११९	२२	१२८११	३२	२१६६७	४२	३११०४
००३	००६८७	१३	००६०००	२३	१३६४६	३३	२२६०२	४३	३२२९३
००४	००१०५४	१४	००६६८१	२४	१४४९१	३४	२३५४७	४४	३३१८४
००५	००१४६८	१५	००७३८७	२५	१५३५४	३५	२४४९८	४५	३४२७८
००६	००१९३४	१६	००८१११	२६	१६२२६	३६	२५४५५	४६	३५२७४
००७	००२४१९	१७	००८८५३	२७	१७१०९	३७	२६४१८	४७	३६२७२
००८	००२९४४	१८	००९६१३	२८	१८००२	३८	२७३८६	४८	३७२७०
००९	००३५०३	१९	१०३९०	२९	१८९०५	३९	२८३५९	४९	३८२७०
१०	००४०८८	२०	१११८३	३०	१९८१७	४०	२९३३७	५०	३९२७०

दुसरें जाची उंची २ आणि वर्तुळ व्यास २० असा एक वर्तुळ खंड आहे त्याचें क्षेत्रफल काय होईल .

$२ \div २० = .१$ हा भागाकार उंची शब्दाखालचे कोष्टकांत पाहून त्याचे समोर क्षेत्रफळाखाली अंक ०४०८८ आहेत ते काढ
नंतर $०४०८८ \times २०^२ = ०४०८८ \times ४०० = १६३५२$ हें खंडाचें क्षेत्रफल
उत्तर

तिसरें जाची उंची १८ आणि वर्तुळाचा व्यास ५० असा एक वर्तुळ खंड आहे त्याचें क्षेत्रफल काय होईल

उत्तर ६३६३७५ क्षेत्रफल
बबथे

(२७)

चवथें जावे ज्याची लांबी १६ आणि वर्तुळाचा व्यास २० असा
एक वर्तुळ खंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ४४.७२८ क्षेत्रफळ

तेरावें कृत्य वांकड्ये रेखाकृतीचें क्षेत्रफळ करावयाचें

दोनीं नोडांची रुंदी मोजून त्यांचे बेरिजेचें अर्ध करवें नंतर लांबीचे
हाचे नेबडे बराबर अंतराचें भाग करून मधील भागचिन्हां वरील लांबीची
लांबी मोजून त्यांची बेरीज घ्यावी आणि त्यांत तें अर्ध मेळवून लांबीचें
गुणावी आणि क्षेत्राचे जिनके भाग केले आहेत त्या अंकांनीं भागावी
ओ भागाकार येईल तें क्षेत्रफळ जाणावें *

* या गीतीची सत्यता यापासून स्पष्ट कळत्ये कीं अबकड सांगितली वांकडी रेखाकृती
असावी, जीस अड ईफ गड ऐके बक अशी वेगवाली रुंदी असावी अई ईग गऐ ऐब या बरो-
बर अंतराचें; वेगवाली रुंदी दाखवायास अनुक्रमानें अ ब क ड ई हीं अक्षरे घे; सगळीं लां-
बी अब दाखवायास ल घे, तेव्हां या आकृतींत वेगवात्ये भागांची क्षेत्रफळे तिसरें कृत्यांतील
भावीज्यायदा प्रमाणे काढ आणि त्यांची बेरीज घे. जसें सर्व भागांची बेरीज ही आहे

$$\frac{अ+ब}{२} \times अई + \frac{ब+क}{२} \times ईग + \frac{क+ड}{२} \times गऐ +$$

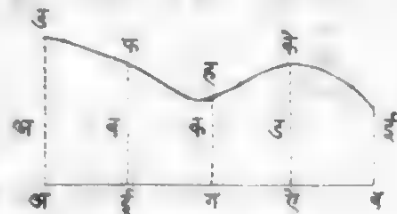
$$\frac{ड+ई}{२} \times ऐब = \frac{अ+ब}{२} \times \frac{१}{४} ल + \frac{ब+क}{२} \times \frac{१}{४} ल$$

$$ल + \frac{क+ड}{२} \times \frac{१}{४} ल + \frac{ड+ई}{२} \times \frac{१}{४} ल =$$

$$\left(\frac{१}{२} अ + ब + क + ड + \frac{१}{२} ई \right) \times \frac{१}{४} ल =$$

$\left(म + ब + क + ड \right) \frac{१}{४} ल$ हें सर्व आकृतीचें गीती
प्रमाणें क्षेत्रफळ आहे; यांत म दोन शेवटील पदांचे
बेरिजेचें अर्ध किंवा त्यांचें गणित मध्यप्रमाण आहे;

या आकृतीचे बरोबर ४ अवयव केले परंतु इतस येईल तेवढे अवयव केले तरी याप्रमाणेंच सत्यता
स्पष्ट कळेल



या गीती

यारीतीवरील टीप .

जर भाग बराबर अंतराचे नाहीत तर ते भाषी ज्या यद आले त्यांनी क्षेत्रफळें भाषी ज्या यदाचे रीतीने वेगळालीं करून त्यांची बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्या वांकडी रेखाकृतीचें क्षेत्रफळ होईल

अथवा सर्व भाग चिन्ह लांबांची बेरीज घे नंतर ती बेरीज लांबांचे मध्यप्रमाणाकरितां लंबसंख्येचा अंकांनीं भाग तो भागाकार लांबांचें गुण गुणाकार येईल तो जवळ जवळ क्षेत्रफळ जालें

उदाहरणें

प्रथम जीची लांबी ३९ आणि त्याजवर बराबर अंतराचें भाग चिन्ह लंब ८२, ७४, ६२, ५०, ४६ याप्रमाणें ५ आहेत अशी एक वांकडी रेखाकृति आहे त्या आकृतीचें क्षेत्रफळ असावें तर काय होईल

आतां ८२		३५२	बेरीज
८६		३९	
२) १६८	दोन तोंडांची बेरीज	११६८	
८४	त्या बेरीजेचें अर्ध	१०५६	
७४		४) १३७२८	
६२		३४३२	क्षेत्रफळ
५०			हें उत्तर
१०२			
३५२	बेरीज		

दुसरें जीची लांबी ८४ आणि तिजवर बराबर अंतराचे भाग चिन्ह लंब १७४, २०६, १४२, १६५, २०१, २४४ याप्रमाणें एक वांकडी

(२९)

वांकडीरेषाकृती आहे तिचें क्षेत्रफल काय होईल

उत्तर १५५०.६४

चौदावें कृत्य

दीर्घवर्तुळाचा परिघ करावयाचें

दोन आंसांचे वर्ग करून त्यांची बेरीज घ्यावी नंतर त्या बेरीजेचें अर्धकरून त्याचें वर्गमूळ करावें आणि तें ३१४१६ याणीं गुणावें तो गुणाकार दीर्घवर्तुळ परिघाचे जवळ जवळ होतो

उदाहरण

जाचा लाहान आंस ४ आणि छोटा आंस ८१६६६ या दीर्घवर्तुळाचा परिघ किती आहे सांग

उत्तर २०२

पंधरावें कृत्य

दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफल करावयाचें

आडवा आणि उभा हे दोनीं आंस परस्पर गुणून गुणाकार येईल तो ७८५४ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तो क्षेत्रफल जावें

याची सत्यता शंकुछिन्नाचे आदि कारणांतील दीर्घवर्तुळाचे तिसर्ये सिद्धांताचे दुसर्ये कुरलरीवरून स्पष्ट कळत्ये

उदाहरणें

(३०)

उदाहरणें

प्रथम जाचा आडवा आंस ७० आणि उभा आंस ५० असें
एक दीर्घवर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर २७४०.९

दुसरें जाचा आडवा आंस २४ आणि उभा आंस १० आहे
त्या दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ३३९.२९३०

सोळावें कृत्य

दीर्घवर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथम रीति एक वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ करावें जा वर्तुळखंडा-
ची उंची आणि ज्या सांणीतल्ये दीर्घवर्तुळ खंडाचे उंचीचे आणि ज्या-
चे अनुक्रमें बरोबर आहे, नंतर हें प्रमाण कर, जसा सांणीतला उ-
भा आंस : वर्तुळ खंडाचे पायाशीं समांतर दुसरें आंसास आहे : :
पूर्व काढिलें वर्तुळ खंडाचें क्षेत्रफळ : इतिल्ये दीर्घवर्तुळ खंडाचे क्षेत्र-
फळास होईल

या रीतीची सत्यता शंकुछिन्नाचे आदिकारणांतील दीर्घवर्तुळा-
चे निसर्ग सिद्धांताचे दुसरें कुरलरीवरूनच कळत्ये

दुसरी

(२१)

• दुसरी रीति दीर्घवर्तुळखंडाची उंची दीर्घवर्तुळाचे उभे आंसाने भागाची आणि तो भागकार घेउन बाराव्ये कृत्याचे कोष्टकांतून उंचीस मोरचे क्षेत्रफळ अंक घ्यावे नंतर ते अंक व दोन्ही आंस ऐसे तीन अंक परस्पर गुणून गुणाकार येईल तो क्षेत्रफळ जाईल

उदाहरणे

पथम जाची उंची २० आणि दीर्घवर्तुळाचा उभा आंस ७० तसा आडवा आंस ५० असा एक दीर्घवर्तुळखंड आहे त्याचे क्षेत्रफळ काय होईल

आतां $२० \div ७० = ०.२८५$ कोष्टकांत उंचीसमोर क्षेत्रफळ अंक १८५९८

उत्तर १३.९६२६०

दुसरे जाची ज्या लाहीन आंसाशी समान्तर रेघ आहे आणि उंची १० असा एक दीर्घवर्तुळखंड आहे त्या दीर्घवर्तुळाचे दोन आंसांची लांबी २५ आणि ३५ आहे त्या दीर्घवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १६२.०३

तिसरे जाची ज्या ह्योनये आंसाशी समान्तर रेघ आहे आणि उंची ५ दीर्घवर्तुळाचे दोन आंसांची लांबी २५ : ३५ असा एक दीर्घवर्तुळखंड आहे त्याचे क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ९७.८४२५

(३२)

सत्रावें कृत्य

पराबलेचें अथवा पराबलेचे खंडाचें क्षेत्रफळ करायाचें
पराबलेचे पायाची लांबी आणि उंची परस्पर गुणावी जो गुणा-
कार येईल त्याचे दोन तृतीयांश घ्यावे तें त्या पराबलेचें क्षेत्रफळ
होय

यारीतीची सत्यता शंकुछिन्नाचे आदिकारणांतील पराबलेचे
सत्राव्ये सिद्धांतावरून स्पष्ट कळत्ये.

उदाहरणें

प्रथम जीची उंची २ आणि पाया १२ अशी एक पराबला किं-
वा पराबलेचा खंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

आतां $2 \times 12 = 24$ नंतर 24 चे $\frac{2}{3} = 16$ क्षेत्रफळ हें उत्तर

दुसरें जीची उंची १० आणि पाया १६ अशी एक पराबला
आहे तिचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १०६ $\frac{2}{3}$

घनफळ

घनफळांत दोन भेद आहेत एक बाहेरील प्रानळीचे आंत
जो भरीव पिंड आहे त्याचें माप आणि दुसरें त्या भरीव पिंडाचे बा-
हेर

(१३)

हेर जी केवळ पानळी आहे तिचे माप

त्यान पानळीचे आन जें भरीवपिंडाचे माप आहे त्यास घन फळ स्मरणतान

आणि त्या भरीव पिंडाचे बाहेर जी केवळ पानळी आहे तिचे जें माप त्यास पृष्ठफळ स्मरणतान

सर्व भरीव मानाचे घनानें मापनें स्मरणजे जा मानें मापणे त्या मानाचे घनानें मापनें जसें घनइंच स्मरणजे जाचा साहा बाजू एकेक इंच आहेत घनफुट स्मरणजे जाचा साहा बाजू एकेक फुट घनयार्ड स्मरणजे जाचा साहा बाजू एकेक यार्ड प्रमाण आहेत यांतून जा मापानें मापिलो त्यामापांत घनफळ येईल घनइंच घनफुट घनयार्ड याप्रमाणें

भरीव मापावया करितां घनमानाचें कोष्टक लिहितो

१७२८ घनइंच	=	१ घनफुट
२७ घनफुट	=	१ घनयार्ड
१६६६ घनयार्ड	=	१ घनपोल
६४००० घनपोल	=	१ घनफर्लींग
५१२ घनफर्लींग	=	१ घनमेल

प्रथम कृत्य

कोणतें एक पृजम अथवा शिलिदर याचें पृष्ठफळ कराया

चें

पृजमाचें

(३४)

पृजंमाचे एक शेवटाची परिमिति त्याचे लांबीने किंवा उंचीने गुणावी. गुणाकार येईल तो त्याचे सर्व बाजूंचें पृष्ठफळ होईल. आणि पाहिजे तर त्याचे दोन शेवटांची क्षेत्रफळें त्यांत मिळवावी.*

अथवा सर्व बाजूंचीं रवालीं वर सद्धां क्षेत्रफळें वेगळालीं करून त्यांची बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्याचें पृष्ठफळ होय

उदाहरणें

प्रथम जाचे सर्व बाजूंची लांबी २० वीस फुट असें एक भरांव घन आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर २४०० चौरस फुट

दुसरें जाची उंची अथवा लांबी २० वीस फुट आणि दोन ही शेवटांची एकएक बाजू १० अठरा इंच असें एक त्रिकोण पृजंम आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर ९१०२४८ चौरस फुट

तिसरें जाची लांबी अथवा उंची २० फुट आणि शेवटाचा व्यास २ फुट असें एक शिलिंदर आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर १२५६६४ चौरस फुट

* या शितीची सत्यता स्वल्पानें स्पष्ट होत्ये. जर मनांत हा विचार केला कीं कोणत्या ही पृजंमाचा बाजू समान्तर रेघ काटकोन चोकोन आहेत. जा समान्तर रेघ काटकोन चोकोनांची साधारण लांबी पृजंमाची लांबी आहे, आणि त्यांचीं रदीं मिळून शेवटाची परिमिति आहे; आणि स्पष्ट दिसते कीं हीच शिती शिलिंदरावर ही लागत्ये.

चवथें

(३५)

चवथें एक लांकडी टांका आहे : जीची गर्भातील लांबी ३ फुट २ इंच रुंदी २ फुट ८ इंच आणि ओंडी ३ फुट ६ इंच आहे, त्यांतून पाणी न सुराबें स्पर्ण शिंशाचे पत्रे आंतोन बसवीणें आहेत : ते असे आहेत कीं : एक चौरस फुट पत्रा ३ शेर वजन ; आणि दगशी ३ पावले पडनात : तेव्हां यास किती रुपये लागतील .

उत्तर

दुसरें कृत्य

कोणत्याही शंकूचें पृष्ठफल करायाचें

शंकूचे पायाची परिमिति झोकउंचीनें स्पर्णजे त्रिकूस उंचीनें अथवा बाजूचे लंबीनें गुणून त्या गुणाकाराचें अर्ध त्याचें पृष्ठफल स्पष्ट होईल

अथवा बाजूचे त्रिकोणाचे क्षेत्रफळाची बेरीज पृष्ठफल होईल पाहिजे तेव्हां याजवर पायाचें क्षेत्रफल मिळवावें .

याचा ताळा

शंकूचे शिरापासून पायापर्यंत एके बाजूवर बाजूप्रमाणें त्रिकूस लंबरेष करावी आणि तेंथून अर्धी पायाची बाजू त्या लंबरेषेनें गुणावी तो गुणाकार त्या शंकूचे एक बाजूचें पृष्ठफल आले नंतर जिनक्या बाजू असतील तिनकीं पृष्ठफळे करून त्यांची बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्या शंकूचे पृष्ठफळा बराबर होय .

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम जाचें उभें बाजूंची तिचें बराबर तिकंस रेष ३० फुट आ
णि पायाचें एकएक बाजूंची लांबी ३ फुट असा एक त्रिकोण शंकु आ
हे त्याचें पायाशिवाय पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर ९० फुट

दुसरें जाचें उभें बाजूंची तिचें बराबर तिकंस लंबवत् रेष ५०
फुट आणि पायाचा व्यास ८ ३/४ फुट असा एक वर्तुळ शंकु आहे
त्याचें पायाशिवाय पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर ६६७.५९ फुट

तिसरें कृत्य

शंकूचें समांतर खंडाचें पृष्ठफळ करायाचें

(पायाशीं समांतर पानळीचें कापलेल्या शंकूचें खालचें समांतर खंड)

शंकूचें समांतर खंडाचा दोन तोंडांचें परिमितीची बेरीज घ्यावी
आणि ती बेरीज तिकंस उंचीने गुणून गुणाकागचें अर्धकगचें ते अ
र्ध त्या समांतर खंडाचें दोन तोंडां शिवाय पृष्ठफळ होईल.

ही शीति उघड आहे, कारण, या समांतर खंडाचा बाजू बांधी
ज्यायद आहेत, जाचा समोरासमोरचा बाजू समांतर आहेत.

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम पायाचे एकएक बाजूची लांबी ३ फुट ४ इंच व वरचे तोंडाचे एकएक बाजूची लांबी २ फुट २ इंच आणि एक बाजू बराबर उभी तिकिस लंबरे घेची उंची १० फुट असा एक चौकोन शंकूचा समांतर खंड आहे त्याचें दोन तोंडां शिवाय पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर ११० फुट

दुसरें जाचे दोन शेवटांचे परिघ ६ आणि ८.४ फुट आणि बाजू बराबर उभी तिकिस लंबरे घे १२.३ असा एक वर्तुळ शंकूचा समांतर खंड आहे त्याचें दोन तोंडां शिवाय पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर ९० फुट

चौथें कृत्य

पृजंग अथवा शिलिंदर याचें घनफळ करायाचें

पायाचे पातळीचें क्षेत्रफळ करून तें उंचीनें गुणावें गुणाकार येईल तो त्याचें घनफळ होय *

टीप

* या शीतीची सत्यता भूमितीचे ११० व्या सिद्धांताचे दुसर्बे कुरलशी वस्तु स्पष्ट होत्ये. आणि हीच सत्यता दुसर्बे शीतीनें ही विशेष कळत्ये ! ही संविधानी आकृति एक समांतर भरीव काट-

(३८)

टीप भरीं व घनाचें घनफळ करणें तर एक बाजू मापून त्या मापाचा घन करावा समांतर भरींवाचें घनफळ करणें तर त्याची लांबी रुंदी आणि उंची परस्पर गुणावी तो गुणाकार त्याचें घनफळ होय.

उदाहरणे

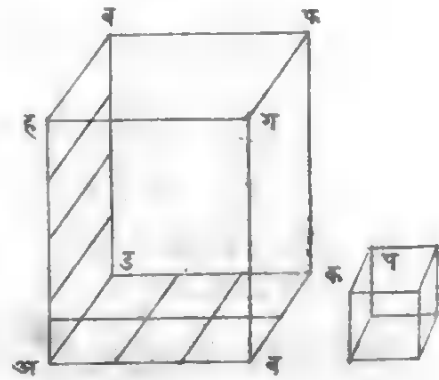
प्रथम जाची बाजू २४ इंच असें एक भरीं व घन आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर १३८२४ इंच

दुसरें जाची लांबी ३ फुट २ इंच व रुंदी २ फुट ८ इंच आणि उंची २ फुट ६ इंच असा एक संगमनर्वरी दगडाचा तुकडा आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर २१ $\frac{१}{२}$ फुट

कोन कोन असावी, जीवें माप घ्यावयाचें आहे; आणि प घन तीचें समिध आहे, हें घनाचें एक माप असावें; जाचा बाजू एक इंच अथवा एक फुट किंवा एक यार्ड इत्यादि असाव्या; आणि अबकड पाचाची लांबी आणि रुंदी तशी अह उंचीही अशी भागावी की प्रत्येक भाग प भरींवाचे पाया बरोबर होतील, त्याजे पा आकृतीचे पायामध्ये जातील तीन भाग आणि रुंदीन दोन भाग आहेत, याजकरिता ३ वेळा २ = ६ चौरस अक पाया मध्ये, जें चौरस प्रत्येकी प भरींवाचे पाया बरोबर आहेत. यामासून स्पष्ट आहे की समांतर भरींवा मध्ये इन के वेळ प घन आहे की, जिन के वेळ अक पायामध्ये प घनाचा पाया येतो, आणि अह उंचीमध्ये जिन के वेळ प घनाची उंची येत्ये. म्हणून कोणत्याही समांतर भरींवाचा घन याशीतीने मापला जातो की त्याचे पायाचें क्षेत्रफळ उंचीने गुणावें.



आणखी याच कारणास्तव भूमितीचे १०८ ज्ये सिद्धांता प्रमाणें सर्व घजमें आणि शिल्लिदरें जाचा पाया आणि उंची बरोबर ती सर्व परस्पर बरोबर आहेत; याजकरिता हीरीति तशीच सर्व भरींवां स सामान्य आहे; त्याच पायाची आकृती कशीही असो.

(३९)

तिसरें जाची बाजू बराबर उंची १० फुट आणि पायाचे बाजूंची लांबी ३ · ४ · ५ फुट असा एक त्रिकोण शंकु आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ६० फुट

चवथें जाची उंची २० फुट आणि परिघ ५ फुट ६ इंच असा एक शिलिंदर आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ४८१४५९ फुट

पांचवें दुसऱें उदाहरणाचे मानाप्रमाणें एक टांकें आहे त्यांत किती पाणी राहील जर शेर पाणी राहानें त्या पात्राचें घनफळ २१०५ घनइंच आहे

उत्तर खं म शे
२ .. २ .. १६७४

पांचवें कृत्य

कोणत्याही शंकूचें घनफळ करायाचें,

शंकूचे पायाचें जें रूप असेल त्या रूपाचे शितीनें त्याचें क्षेत्रफळ करावें आणि तें शंकूचे उंचीनें गुणावें गुणाकाराचा जो $\frac{1}{3}$ तो त्याचें घनफळ होय *

* ही शिती घृजमाचे शिती पासून उत्पन्न होत्ये. कारण, भूमितीचे ११५ व्या सिद्धांतातील कुरलरी वरून सिद्ध जालें कीं, कोणताही शंकु घृजमाचा तिसरा भाग आहे, जाचा पाया आणि उंची बरोबर आहे.

उदाहरणें

(४०)

उदाहरणें

प्रथम जाचे पायाचे बाजूची लांबी ३० आणि उंची २५ असा एक चौरस शंकू आहे त्याचे घनफळ काय होईल.

उत्तर ७५००

दुसरे जाचे पायाचे बाजूची लांबी ३ आणि उंची ३० असा एक समत्रिकोण शंकू आहे त्याचे घनफळ काय होईल.

उत्तर ३८९११७

तिसरे जाचे पायाचा तीन बाजू ५ . ६ . ७ फुट आणि उंची १४ फुट ६ इंच असा एक विषम त्रिकोण शंकू आहे. त्याचे घनफळ काय होईल

उत्तर ७१०३५२

चौथे जाचे पायाचे बाजूची लांबी २ आणि उंची १२ असा एक पंचकोण शंकू आहे त्याचे घनफळ काय होईल

उत्तर २७५२७६

पाचवे जाचे पायाचे बाजू लांबी ६ इंच आणि उंची ६४ फुट असा एक षट्कोण शंकू आहे त्याचे घनफळ काय होईल.

उत्तर १३८५६४ घन फुट

साहावे जाचे पायाचा परिघ ९ आणि उंची १० $\frac{१}{२}$ फुट असा एक

वर्तुळ

वर्तुळ शंकू आहे त्याचें घनफळ काय होईल

साहायें कृत्य

उत्तर २२.५६.९३

शंकूचे समांतर खंडाचें घनफळ करायाचें, पायाशीं समांतर पातळीनें काप-
लेला शंकूचा पायाकडील जो तुकडा त्यास समांतर खंड स्मरणान.

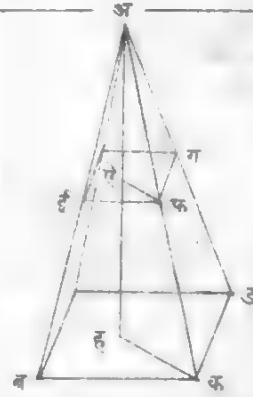
समांतर खंडाचे दोनी शेवटांचीं क्षेत्रफळे आणि त्याचें मध्यप्रमाण
या तीन अंकांची बेरीज घ्यावी नंतर त्या बेरीजेचा $\frac{1}{3}$ खंडाचे मध्याचें क्षे-
त्रफळ होईल. मग तें मध्याचें क्षेत्रफळ खंडाचे उंचीनें गुणावें गुणाकार
येईल तो त्या समांतर खंडाचें घनफळ होईल *

* अबकड कोणताही शंकू असावा, जाचा
एक खंड बकडगफई आहे, आतां बकड पायाचें क्षे-
त्रफळ दाखवायाकरितां अ घे, आणि या खंडाचे ईफग
वरचे बाजूचें क्षेत्रफळ दाखवाया करितां ब घे, खंडा
ची ऐह उंची दाखवाया करितां ह घे, खंडाचे वरसहिल्ये
शंकूची उंची ऐअ दाखवाया करितां क घे, तेव्हां क +
ह = अह, शंकूची सर्व उंची,

आतां याचें पूर्वचे कृत्यावरून $\frac{1}{3}$ अ (क + ह)
हें अबकड सर्व शंकूचें घनफळ आहे, आणि $\frac{1}{3}$ बक =
समांतर खंडावरील आईफग तुकड्याचें घनफळ
आहे, याजकरितां या दोहोंची वजाबाकी स्मरणजे
 $\frac{1}{3}$ अ (क + ह) - $\frac{1}{3}$ बक हें बकडगफई खंडाचें घ-
नफळ आहे, परंतु क पद खंडाचे कोणत्याही अव-
यवाचें माप नाही, याजकरितां या कोष्टकांतून क
पद काढून त्याचे स्थळीं त्याची किंमत ठेविली पा-

हिजे, तीयारीतीनें निघत्ये, भूमितीचे ११३ ये सिद्धांत प्रमाणें अ : ब :: (क + ह) : क, अथवा
अ : ब :: क + ह : क, याजकरितां भूमितीचे ६९ ये सिद्धांत प्रमाणें अ - ब : ब :: ह : क, आणि
अ - ब : अ :: ह : क + ह. याजकरितां क = $\frac{अ-ब}{अ-ब}$ आणि क + ह = $\frac{अ-ब}{अ-ब}$, तर कोष्टकांत क आणि
क + ह यांची किंमत ठेवून खंडाचें घनफळ दाखवायाकरितां कोष्टकाचें रूप याप्रमाणें होतें,

$\frac{1}{3}$ अ × $\frac{अ-ब}{अ-ब}$ - $\frac{1}{3}$ ब × $\frac{अ-ब}{अ-ब}$ = $\frac{1}{3}$ ह × $\frac{अ-ब}{अ-ब}$ = $\frac{1}{3}$ ह × (अ + अब + ब) ही वरसांगीतली
रीति आहे, जांत अब हें अ आणि ब यांचें मध्यप्रमाण आहे.



टीप

(४२)

टीप. ही सामान्य रीति दुसरें प्रकारनें ही लिहिली जात्ये, जेव्हां समांतर खंडाचीं दोनही शेवटें वर्तुळ अथवा समबाजू बहुकोन आहेत. असें आहे तेव्हां प्रत्येक बहुकोनाचे एकेक बाजूचा वर्ग घ्यावा. आणि एकाची एक बाजू दुसऱ्याचे एक बाजूनें गुणावी. नंतर या तीन गुणाकारांची बेरीज घ्यावी मग ती बेरीज जशी बहुकोन आकृति आहे, तशा आकृतीचे कोष्टकांतील क्षेत्र अथवा गुणकांक घेऊन त्यांणीं गुणावी. त्या गुणाकाराचा जो $\frac{1}{2}$ तो समांतर खंडाचें मध्यप्रमाण क्षेत्रफल होईल. ज्यास खंडाचे उंचीनें गुणून तो गुणाकार समांतर खंडाचें घनफल होईल. आणि जेव्हा वर्तुळ शकुन्यंड आहे, दोनीं शेवटें वर्तुळ आहेत. तेव्हां त्या दोन शेवटांचे व्यासांचे अथवा परिघांचे वर्ग घ्यावे, आणि जांचे वर्ग घेतल्याने व्यास अथवा परिघ परस्पर गुणावे, नंतर या तीन गुणाकारांची बेरीज घ्यावी, ती बेरीज कोष्टक संख्येनें गुणावी, स्तणजे व्यास घेतला आहे तर ०८५४ याणीं, आणि परिघ घेतला आहे तर ०७९५८ याणीं गुणावी, नंतर या गुणाकाराचा $\frac{1}{2}$, खंडाचे उंचीनें गुणावा, तो गुणाकार त्या समांतर खंडाचें घनफल होईल.

उदाहरणें

प्रथम जाचीं दोनीं तोडे चौरस त्याचा बाजू १५.६ इंच आणि उंची २४ फुट असा एक समांतर खंड लांकडाचा तुकडा आहे त्याचें घनफल काय होईल.

उत्तर १९३ घनफुट

दुसरे

(४३)

दुसरें जाचीं दोनीं तोंडें पंचकोण त्याचा बाजू १८.६ इंच आणि उंची ५ फुट असा एक समांतरखंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ९३१.२५ घनफुट

तिसरें जाचें दोन तोंडांचे व्यास ८.४ आणि उंची १८ असा एक वर्तुळ शंकूचा समांतर खंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ५२७.७८८८

चवथें जाचें दोन तोंडांचे परिघ २०.१० आणि उंची २५ असा एक वर्तुळ शंकूचा समांतर खंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर ४६४.२१६

पाचवें एक पिंप आहे जाचें दोन शेवटांचे व्यास २०.२० आणि मध्याचा व्यास २८ आणि उंची ४० इंच आहे तेव्हां त्या पिंपांत किती पाणी महील (पिंप सणजे दोन वर्तुळ शंकूंचे समांतरखंड जांची मोठी तोंडें एकत्र सांधलेलीं असैं);

खं म शे

उत्तर १००१.०९४४.६७४४ पाणि

सातवें कृत्य

गोल अथवा गोलखंड याचें घृष्टफळ करायाचें

प्रथम रीति गोलाचा आंस आणि गोलाचा परिघ हे परस्पर गुणून जो गुणाकार येईल तो गोलाचें घृष्टफळ आलें

दुसरी

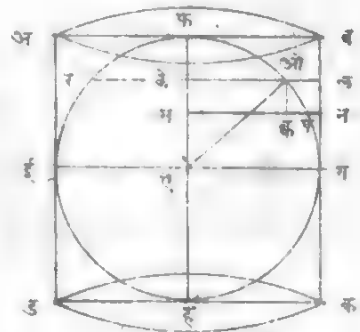
दुसरी रीति गोलाचे आंसाचा वर्ग करून तो ३१४१६ याणीं गुणा-
वा गुणाकार घेईल तो त्या गोलाचें पृष्ठफळ जालें

तिसरी रीति गोलाचे परिघाचा वर्ग करून तो ३१८३ याणीं गुणा-
वा अथवा ३१४१६ याणीं भागावा भागाकार घेईल तो त्या गोलाचें पृष्ठ-
फळ जालें *

टीप

※ याशेती पुढील गोल पृष्ठफळाचें सिद्धांत वरून उत्पन्न होतात. सृणजे कीं, गोलाचें पृष्ठफळ त्या गोलाचे भोंवतील शिलिंदराचें बांकड्ये वाजूचे पृष्ठफळा बरोबर आहे. अथवा, गोलाचें पृष्ठफळ, गोलाचे आंसावरील वर्तुळाचे भोंवट आहे. तें याप्रमाणें सिद्ध होतें

अबकड एक शिलिंदर जें ईफगह गोला-
भोंवती संलग्न आहे. फह आंसावर फबकह काट-
कोन चौकोन फिरण्या पासून शिलिंदर उत्पन्न जालें
आणि फह आंसावर फगह अर्धवर्तुळ फिरण्या
पासून गोल उत्पन्न जालें. आतां केल मन दोन रे-
षा फह आंसावर लंबकर, अशा कीं शिलिंदराचा
आणि गोलाचा लन आणि ओप खंड आंत घेतील,
तेव्हां लनचे फिरण्या पासून जें शिलिंदर होतें त्याचें
पृष्ठफळ, ओप चौसाचे फिरण्या पासून जो गोल-
खंड होतो त्याचे पृष्ठफळा बरोबर होईल. सृणोन
मनांत आण कीं, केल आणि मन या दोन समांतर
रेषा अतिसमीप आहेत, आतां ऐओ सांध, आणि
लनशीं समांतर ओक कर, तेव्हां ऐकेओ ओकप
हे दोन त्रिकोण समकोन असोन ओप : ओक अथवा
लन : ऐओ अथवा केल : केओ, सृणोन असा
केल पासून परिघ होतो तो : केओ पासून चें परिघा-
त्ता, याजकरितां ओप x केओ रेघेचें परिघानें याचा
काटकोन चौकोन, लन x केल रेघेचें परिघानें याचे काटकोन चौकोनाचे बरोबर आहे, सृणोन ओप
कोस फिरून जें गोल खंडाचें पृष्ठफळ करितो तें, लनचे फिरण्या पासून जें शिलिंदर होतें त्याचे पृष्ठ-
फळाचे बरोबर आहे.



आणि कोणत्याही जागेवर याप्रमाणे केलें असतां असेंच सिद्ध होईल, याजकरितां याचे
कित्येक संख्यांची बेरीज ही बरोबर होईल, सृणजे फगह अर्धवर्तुळाचे फिरण्या पासून जें गोल उत्पन्न
होतें त्याचें पृष्ठफळ, शिलिंदराचे बांकड्याचे फिरण्या पासून जें शिलिंदर उत्पन्न होतें त्याचे बांकड्ये
वाजूचे पृष्ठफळा बरोबर आहे, त्याप्रमाणें ही कोणत्या गोलखंडाचें पृष्ठफळ, जसें फओचे फिरण्या
पासून उत्पन्न जाल्ये गोलखंडाचें पृष्ठफळ, त्याचे प्रतियोगी बलचे फिरण्या पासून उत्पन्न जाल्ये शिलिं-
दराचे पृष्ठफळा बरोबर आहे.

प्रथम कुरलरी बांमून निघतें कीं गोलाचें पृष्ठफळ, त्याचे लोट्ये चार वर्तुळांचे बरोबर आहे,

अथवा

(४५)

टीप गोलखंडाचें पृष्ठफळ करणें तर जा गोलाचा खंड आहे. त्या गोलाचा परिघ खंडाचे उंचीनें गुणावा तो गुणाकार त्या खंडाचें पृष्ठफळ होय.

उदाहरणे

प्रथम जाणा आंस ७ आणि परिघ २२ असा एक गोल आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर १५४

दुसरें जाणा आंस २४ इंच असा एक गोल आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर १८०९.५६१६

तिसरें पृथ्वीचा आंस ७९५७ ३/४ मैल आणि परिघ २५००० मैल आहे तेव्हां पृथ्वीचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर १९८९४३७५० चौरस मैल

चवथें जाणा उंची ९ इंच आणि त्याचे गोलाचा आंस ४२ इंच असा एक गोल खंड आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर ११८७.५२४८ चौरस इंच

अथवा ईफगहई परिघ किंवा उकचा परिघ \times बक उंचीनें अथवा फह व्यासाचें याचे बरोबर आहे. दुसरी कुरलरी यांतूनही निघते की गोलाचा कोणताही अवयव स्पर्शजे खंड अथवा (ओन) स्पर्शजे अनेतिमखंड याचें पृष्ठफळ याचे बरोबर आहे की तोच गोलखंडाचा परिघ \times त्याचे उंचीनें, याअकरितां गोलखंडाचें पृष्ठफळें परस्परस आहेत, जशा त्यांचा उंच्या.

पांचवें

(४६)

पांचवें जाची उंची २ फुट आणि त्याचे गोलाचा आंस १२ $\frac{१}{२}$ फुट असा एक गोलखंड आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर ७८-५४ चौरसफुट

आठवें कृत्य गोलाचें घनफळ करायाचें

प्रथम रीति गोलाचें पृष्ठफळ आंसानें गुणावें त्या गुणा काराचा $\frac{१}{६}$ त्या गोलाचें घनफळ होईल * अथवा याचेच बराबर हें आहे जे गोलाचे आंसाचा वर्ग करून परिधानें गुणावा गुणाकार येईल त्याचा $\frac{१}{६}$ त्या गोलाचें घनफळ होईल.

दुसरी रीति गोलाचे आंसाचा घनकरावा आणि तो ५२३.६ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तो त्या गोलाचें घनफळ होईल.

तिसरी रीति गोलाचे परिधाचा घनकरावा आणि तो ०१६८८ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तो त्या गोलाचें घनफळ होईल.

* स्तंभान आंस दारववायास दु अक्षर घे, परिध दारववायास क घे, पृष्ठफळ अथवा त्याचे भोंवतील शिलिंदर दारववायास संघ; आणि २१४१६ ही संख्या दारववायास अ घे,

तेव्हां $\frac{१}{६}$ स = शिलिंदराचा पाया अथवा गोलाचें एक मोटें वर्तुळ; आणि दु शिलिंदराची उंची दारवविता; याजकरितां $\frac{१}{६}$ उस शिलिंदराचें घनफळ आहे; परंतु भूमितीचे ११० येथे सिद्धांता पासून कोणतेंही गोल त्याचा भोंवतील शिलिंदराचे $\frac{१}{६}$ आहे, स्तंभान $\frac{१}{६}$ उसचे $\frac{१}{६}$ = $\frac{१}{६}$ उस गोलाचें घनफळ आहे; स्तंभान ही प्रथम रीति आहे.

पुनः यासव को स पृष्ठफळ = अडे; याजकरितां $\frac{१}{६}$ उस = $\frac{१}{६}$ अडे = ५२३.६ डे, स्तंभजे ही दुसरी रीति आहे; पुनः उ = क ÷ अ; याजकरितां $\frac{१}{६}$ अडे = $\frac{१}{६}$ क ÷ अ = ०१६८८ ही घनफळाची तिसरी रीति आहे.

उदाहरणें

(४७)

उदाहरणें

प्रथम जाणा आंस १२ असा एक गोळा आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर ९०४०७८०८

दुसरें पृथ्वी गोळाचा परिघ २५००० मैल आहे तेव्हां पृथ्वीगोळाचें घनफळ काय होईल.

उत्तर २६३७५००००००००

नवें कृत्य

गोलखंडाचें घनफळ करायाचें.

※ प्रथम रीति जा गोळाचा खंड आहे त्या गोळाचे आंसाची तिपट करून त्यांत खंडाचे उंचीची दुपट वजा करावी बाकी राहिल ती उंचीचे वर्गानें गुणावी आणि तो गुणाकार ५२३६ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तो त्यागोलखंडाचें घनफळ होईल.

दुसरी

※ भूमितीचे ११७ व्या सिद्धांताचे तिसरें कुरलरी पासून स्पष्ट जातें कीं एका गोलखंडा, अबलओ शिलिंदर आणि अबलक शंकुखंड यांचे वजाबाकीचे बरोबर आहे. आतां अब अथवा फह गोळाचा किंवा शिलिंदराचा व्यास दाखवा यास ड अक्षर घे; गोलखंडाची उंची फकें दाखवा यास ह घे; त्यागोलखंडाचे पायाची विज्या पकें दाखवा यास र घे, आणि ५२३६

हा

(४८)

दुसरी रीति गोलखंडाचे पायाचे त्रिज्याचा वर्ग तिपट करून नंतर खंडाचे उंचीच्या वर्ग करावा दोहोंची बेरीज घ्यावी नंतर ती बेरीज खंडाचे उंचीने गुणावी तो गुणाकार ५२३६ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तें त्या गोलखंडाचें घनफळ होईल.

ही संख्या दाखवायास अ पे, तेव्हां अवघे शंकूचें घनफळ = $\frac{1}{3}$ अउ^३ × $\frac{1}{3}$ फये = $\frac{1}{9}$ अउ^३; आणि अवघे कमघे हे दोन सरूप शंकू आहेत; याजकरितां फये : केये ::

$$\frac{1}{9} \text{ अउ}^३ : \frac{1}{9} \text{ अउ}^३ \times \left(\frac{\frac{1}{2} \text{ उ} - \text{ह}}{\frac{1}{2} \text{ उ}} \right)^३ \text{ हें}$$

कमघे शंकूचे बरोबर आहे; याजकरितां अवघे शंकू कमघे शंकू = अवमक शंकू खंड आहे; लणजे याचे बरोबर की $\frac{1}{9}$

$$\text{अउ}^३ - \frac{1}{9} \text{ अउ}^३ \times \left(\frac{\frac{1}{2} \text{ उ} - \text{ह}}{\frac{1}{2} \text{ उ}} \right)^३ = \frac{1}{9}$$

$$\text{अउ ह}^३ - \frac{1}{9} \text{ अउ ह}^३ + \frac{1}{9} \text{ अ ह}^३$$

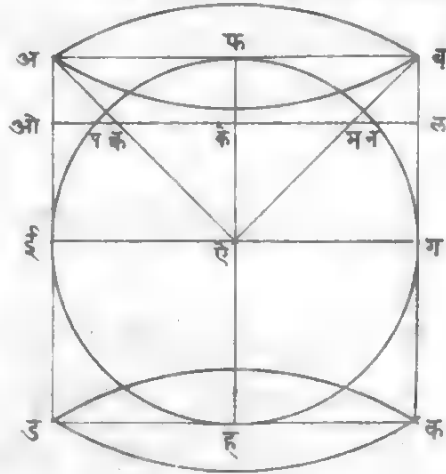
आतां हे अउ ह = अवलओ शिळिर शचें घनफळ आहे.

तेव्हां या दोहोंची वजा याकी ही आ हे की $\frac{1}{9}$ अउ ह^३ - $\frac{1}{9}$ अ ह^३ = $\frac{1}{9}$ अ ह^३ × (३उ - ३ ह) लणजे हें पफन गोलखंडाचें घनफळ होय; लणोन ही प्रथमरीति आहे.

पुनः पास्तबन्ध की भूमितीने ८७ व्या सिद्धांताचे कुरलरीवरून पके = फके × के ह, लणजे र^२ = ह (उ - ह); याजकरितां उ = $\frac{र^२}{ह} + ह$ आणि, ३उ - २ह = $\frac{३र^२}{ह} + ह = \frac{३र^२ + ह^२}{ह}$; ही किमत पूर्वरीतीचे समीकरणांत ठेविल्यानंतर त्याचें रूप याप्रमाणें होईल, $\frac{1}{9}$ अ ह^३ × $\frac{३र^२ + ह^२}{ह} = \frac{1}{9}$ अ ह × (३र^२ + ह^२) ही वर सांगितलेली दुसरी रीति आहे.

टीप अर्ध गोलान त्याचा खंड वजा केल्यानें त्याचे (ओ नाचें) अनंतिसखंडाचें घन फळ होईल

उदाहरणें



(४९)

उदाहरणें

प्रथमे जाची उंची २ फुट आणि गोलाचा आस ८ फुट असा
एक गोलखंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर ४१.८८८

दुसरे जाची उंची ९ आणि पायाचा व्यास २० असा एक गोल
खंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर १७९५.४२४४



TABLES
OF
LOGARITHMS.
&c.

कोष्टक
लाग्रतमांशे
इत्यादि

कोष्टक

जोन

संख्या-वीं लाग्रतमें

आहेत

१ पासून १०००० पर्यंत

प्रथम कोष्टक

संख्या-वीं लाग्रतमें

संख्या १ — १०० पर्यंत				लाग्रतमें १०००००० — २००००००			
संख्या	लाग्रतमें	संख्या	लाग्रतमें	संख्या	लाग्रतमें	संख्या	लाग्रतमें
१	०००००००	२६	१४१४१३	५१	१३०१०१५०	७६	१८८०८५४
२	०३०१०३०	२७	१४३१३६४	५२	१३१६००३	७७	१८८६४९१
३	०४७७१२१	२८	१४४७१५८	५३	१३०४२३६	७८	१८९२०९५
४	०६०३०६०	२९	१४६३३९८	५४	१३१०३९४	७९	१८९७६२७
५	०६९८०७०	३०	१४७७१२१	५५	१३४०३६३	८०	१९०३०९०
६	०७७८१५१	३१	१४९१३६३	५६	१३४८१८८	८१	१९०८४८५
७	०८४५०९८	३२	१५०५१५०	५७	१३५५८७५	८२	१९१३८१४
८	०९०३०९०	३३	१५१८५१४	५८	१३६३४२८	८३	१९१९०७८
९	०९५४२४३	३४	१५३१४७९	५९	१३७०८७३	८४	१९२४३७९
१०	१००००००	३५	१५४४०६८	६०	१३७८१५१	८५	१९२९४१९
११	१०४१३९३	३६	१५५६३०२	६१	१३८५३३०	८६	१९३४४९८
१२	१०७९१८१	३७	१५६८००३	६२	१३९२३९०	८७	१९३९५१९
१३	१११६३९४	३८	१५७९७८४	६३	१४०९३४१	८८	१९४४४८३
१४	११४६१२८	३९	१५९१०६५	६४	१४०६१८०	८९	१९४९३९०
१५	११७६०९१	४०	१६०३०६०	६५	१४१२९१३	९०	१९५४३४३
१६	१२०४१२०	४१	१६१३७८४	६६	१४१९५४४	९१	१९५९०४१
१७	१२३०४४९	४२	१६२३२४९	६७	१४२६०७५	९२	१९६३७८८
१८	१२५५२७३	४३	१६३३४६८	६८	१४३२५०९	९३	१९६८४८३
१९	१२७८७५४	४४	१६४३४५३	६९	१४३८८४०	९४	१९७३१२८
२०	१३०१०३०	४५	१६५३२१३	७०	१४४५०९८	९५	१९७७७२४
२१	१३२२२१९	४६	१६६२७५८	७१	१४५१२५८	९६	१९८२२७१
२२	१३४२४२३	४७	१६७२०९८	७२	१४५७३३२	९७	१९८६७७०
२३	१३६१७२८	४८	१६८१२४१	७३	१४६३३२३	९८	१९९१२२६
२४	१३८०२११	४९	१६९०१९६	७४	१४६९२३३	९९	१९९५६१५
२५	१३९७९४०	५०	१६९८९७०	७५	१४७५०६१	१००	२००००००
संख्या	लाग्रतमें	संख्या	लाग्रतमें	संख्या	लाग्रतमें	संख्या	लाग्रतमें

प्रथम कीटक
संख्या-वी लाग्रनेम

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
१००	००००००	०००४३४	०००८६८	००१३०१	००१७३५	००२१६९	००२६०३	००३०३७	००३४७०	००३९०४	४३३
१०१	४३३३	४७६७	५२०१	५६३५	६०६९	६५०३	६९३७	७३७१	७८०५	८२३९	४३८
१०२	८६००	९०३४	९४६८	९९०२	१०३३६	१०७७०	११२०४	११६३८	१२०७२	१२५०६	४४३
१०३	०१२८३७	०१३२७१	०१३७०५	०१४१३९	०१४५७३	०१५००७	०१५४४१	०१५८७५	०१६३०९	०१६७४३	४४८
१०४	०१६२०८	०१६६४२	०१७०७६	०१७५१०	०१७९४४	०१८३७८	०१८८१२	०१९२४६	०१९६८०	०२०११४	४५३
१०५	०२०५८९	०२१०२३	०२१४५७	०२१८९१	०२२३२५	०२२७५९	०२३१९३	०२३६२७	०२४०६१	०२४४९५	४५८
१०६	०२४९२०	०२५३५४	०२५७८८	०२६२२२	०२६६५६	०२७०९०	०२७५२४	०२७९५८	०२८३९२	०२८८२६	४६३
१०७	०२९२५१	०२९६८५	०३०११९	०३०५५३	०३०९८७	०३१४२१	०३१८५५	०३२२८९	०३२७२३	०३३१५७	४६८
१०८	०३३५८२	०३४०१६	०३४४५०	०३४८८४	०३५३१८	०३५७५२	०३६१८६	०३६६२०	०३७०५४	०३७४८८	४७३
१०९	०३८०१३	०३८४४७	०३८८८१	०३९३१५	०३९७४९	०४०१८३	०४०६१७	०४१०५१	०४१४८५	०४१९१९	४७८
११०	०४२४४४	०४२८७८	०४३३१२	०४३७४६	०४४१८०	०४४६१४	०४५०४८	०४५४८२	०४५९१६	०४६३५०	४८३
१११	०४६८७५	०४७३०९	०४७७४३	०४८१७७	०४८६११	०४९०४५	०४९४७९	०४९९१३	०५०३४७	०५०७८१	४८८
११२	०५१३१०	०५१७४४	०५२१७८	०५२६१२	०५३०४६	०५३४८०	०५३९१४	०५४३४८	०५४७८२	०५५२१६	४९३
११३	०५६०४१	०५६४७५	०५६९०९	०५७३४३	०५७७७७	०५८२११	०५८६४५	०५९०७९	०५९५१३	०६००४७	४९८
११४	०६०४७२	०६०९०६	०६१३४०	०६१७७४	०६२२०८	०६२६४२	०६३०७६	०६३५१०	०६३९४४	०६४३७८	५०३
११५	०६४९०३	०६५३३७	०६५७७१	०६६२०५	०६६६३९	०६७०७३	०६७५०७	०६७९४१	०६८३७५	०६८८०९	५०८
११६	०६९३३४	०६९७६८	०७०२०२	०७०६३६	०७१०७०	०७१५०४	०७१९३८	०७२३७२	०७२८०६	०७३२४०	५१३
११७	०७३७६५	०७४२००	०७४६३४	०७५०६८	०७५५०२	०७५९३६	०७६३७०	०७६८०४	०७७२३८	०७७६७२	५१८
११८	०७८२००	०७८६३४	०७९०६८	०७९५०२	०७९९३६	०८०३७०	०८०८०४	०८१२३८	०८१६७२	०८२१०६	५२३
११९	०८२६३५	०८३०६९	०८३५०३	०८३९३७	०८४३७१	०८४८०५	०८५२३९	०८५६७३	०८६१०७	०८६५४१	५२८
१२०	०८७०६६	०८७५००	०८७९३४	०८८३६८	०८८८०२	०८९२३६	०८९६७०	०९०१०४	०९०५३८	०९०९७२	५३३
१२१	०९१५०७	०९१९४१	०९२३७५	०९२८०९	०९३२४३	०९३६७७	०९४१११	०९४५४५	०९४९७९	०९५४१३	५३८
१२२	०९६०४८	०९६४८२	०९६९१६	०९७३५०	०९७७८४	०९८२१८	०९८६५२	०९९०८६	०९९५२०	१०००००	५४३
१२३	१००४४९	१००८८३	१०१३१७	१०१७५१	१०२१८५	१०२६१९	१०३०५३	१०३४८७	१०३९२१	१०४३५५	५४८
१२४	१०४९००	१०५३३४	१०५७६८	१०६२०२	१०६६३६	१०७०७०	१०७५०४	१०७९३८	१०८३७२	१०८८०६	५५३
१२५	१०९३४१	१०९७७५	११०२०९	११०६४३	१११०७७	१११५११	१११९४५	११२३७९	११२८१३	११३२४७	५५८
१२६	११३७८२	११४२१६	११४६५०	११५०८४	११५५१८	११५९५२	११६३८६	११६८२०	११७२५४	११७६८८	५६३
१२७	११८२२३	११८६५७	११९०९१	११९५२५	११९९५९	१२०३९३	१२०८२७	१२१२६१	१२१६९५	१२२१२९	५६८
१२८	१२२६६४	१२३०९८	१२३५३२	१२३९६६	१२४४००	१२४८३४	१२५२६८	१२५७०२	१२६१३६	१२६५७०	५७३
१२९	१२७१०५	१२७५३९	१२७९७३	१२८४०७	१२८८४१	१२९२७५	१२९७०९	१३०१४३	१३०५७७	१३१०११	५७८
१३०	१३१५४६	१३१९८०	१३२४१४	१३२८४८	१३३२८२	१३३७१६	१३४१५०	१३४५८४	१३५०१८	१३५४५२	५८३
१३१	१३६०८७	१३६५२१	१३६९५५	१३७३८९	१३७८२३	१३८२५७	१३८६९१	१३९१२५	१३९५५९	१४००००	५८८
१३२	१४०५२८	१४०९६२	१४१३९६	१४१८३०	१४२२६४	१४२७००	१४३१३४	१४३५६८	१४४००२	१४४४३६	५९३
१३३	१४४९६९	१४५४०३	१४५८३७	१४६२७१	१४६७०५	१४७१३९	१४७५७३	१४८००७	१४८४४१	१४८८७५	५९८
१३४	१४९४१०	१४९८४४	१५०२७८	१५०७१२	१५११४६	१५१५८०	१५२०१४	१५२४४८	१५२८८२	१५३३१६	६०३
१३५	१५३८५१	१५४२८५	१५४७१९	१५५१५३	१५५५८७	१५६०२१	१५६४५५	१५६८८९	१५७३२३	१५७७५७	६०८
१३६	१५८२९२	१५८७२६	१५९१६०	१५९५९४	१६००२८	१६०४६२	१६०८९६	१६१३३०	१६१७६४	१६२१९८	६१३
१३७	१६२७३३	१६३१६७	१६३६०१	१६४०३५	१६४४६९	१६४९०३	१६५३३७	१६५७७१	१६६२०५	१६६६३९	६१८
१३८	१६७१७४	१६७६०८	१६८०४२	१६८४७६	१६८९१०	१६९३४४	१६९७७८	१७०२१२	१७०६४६	१७१०८०	६२३
१३९	१७१६१५	१७२०४९	१७२४८३	१७२९१७	१७३३५१	१७३७८५	१७४२१९	१७४६५३	१७५०८७	१७५५२१	६२८
१४०	१७६०५६	१७६४९०	१७६९२४	१७७३५८	१७७७९२	१७८२२६	१७८६६०	१७९०९४	१७९५२८	१८००००	६३३
१४१	१८०५०७	१८०९४१	१८१३७५	१८१८०९	१८२२४३	१८२६७७	१८३१११	१८३५४५	१८३९७९	१८४४१३	६३८
१४२	१८४९४८	१८५३८२	१८५८१६	१८६२५०	१८६६८४	१८७११८	१८७५५२	१८७९८६	१८८४२०	१८८८५४	६४३
१४३	१८९३८९	१८९८२३	१९०२५७	१९०६९१	१९११२५	१९१५५९	१९१९९३	१९२४२७	१९२८६१	१९३२९५	६४८
१४४	१९३८३०	१९४२६४	१९४६९८	१९५१३२	१९५५६६	१९६०००	१९६४३४	१९६८६८	१९७३०२	१९७७३६	६५३
१४५	१९८२७१	१९८७०५	१९९१३९	१९९५७३	१९९९९७	२००४३१	२००८६५	२०१२९९	२०१७३३	२०२१६७	६५८
१४६	२०२७१२	२०३१४६	२०३५८०	२०४०१४	२०४४४८	२०४८८२	२०५३१६	२०५७५०	२०६१८४	२०६६१८	६६३
१४७	२०७१५३	२०७५८७	२०८०२१	२०८४५५	२०८८८९	२०९३२३	२०९७५७	२१०१९१	२१०६२५	२११०५९	६६८
१४८	२११६०४	२१२०३८	२१२४७२	२१२९०६	२१३३४०	२१३७७४	२१४२०८	२१४६४२	२१५०७६	२१५५१०	६७३
१४९	२१६०४५	२१६४७९	२१६९१३	२१७३४७	२१७७८१	२१८२१५	२१८६४९	२१९०८३	२१९५१७	२१९९५१	६७८
१५०	२२०४८६	२२०९२०	२२१३५४	२२१७८८	२२२२२२	२२२६५६	२२३०९०	२२३५२४	२२३९५८	२२४३९२	६८३
१५१	२२४९२७	२२५३६१	२२५७९५	२२६२२९	२२६६६३	२२७०९७	२२७५३१	२२७९६५	२२८४००	२२८८३४	६८८
१५२	२२९३६८	२२९८०२	२३०२३६	२३०६७०	२३११०४	२३१५३८	२३१९७२	२३२४०६	२३२८४०	२३३२७४	६९३
१५३	२३३८०९	२३४२४३	२३४६७७	२३५१११	२३५५४५	२३५९७९	२३६४१३	२३६८४७	२३७२८१	२३७७१५	६९८
१५४	२३८२५०	२३८६८४	२३९११८	२३९५५२	२४००००	२४०४३४	२४०८६८	२४१३०२	२४१७३६	२४२१७०	७०३
१५५	२४२६९१	२४३१२५	२४३५५९	२४३९९३	२४४४२७	२४४८६१	२४५२९५	२४५७२९	२४६१६३	२४६५९७	७०८
१५६	२४७१३२	२४७५६६	२४८०००	२४८४३४	२४८८६८	२४९३०२	२४९७३६	२५०१७०	२५०६०४	२५१०३८	७१३
१५७	२५१५७३	२५२००७	२५२४४१	२५२८७५	२५३३०९	२५३७४३	२५४१७७	२५४६११	२५५०४५	२५५४७९	७१८
१५८	२५६०१४	२५६४४८	२५६८८२	२५७३१६	२५७७५०	२५८१८४	२५८६१८	२५९०५२	२५९४८६	२५९९२०	७२३
१५९	२६०४५५	२६०८८९	२६१३२३	२६१७५७	२६२१९१	२६२६२५	२६३०५९	२६३४९३	२६३९२७	२६४३६१	७२८
१६०	२६४८९६	२६५३३०	२६५७६४	२६६१९८	२६६६३२	२६७०६६	२६७५००	२६७९३४	२६८३६८	२६८८०२	७३३
१६१	२६९३३७	२६९७७१	२७०२०५	२७०६३९	२७१०७३	२७१५०७	२७१९४१	२७२३७५	२७२८०९	२७३२४३	७३८

आश्विन २०४९२० — १४२४२१

144

संख्यां च लाग्रत्वे

लाग्रतम ३४२४२३ — ४४७१५८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
२२०	१२२२३	१२२२०	१२२०१७	१२३०१४	१२३११२	१२३२०९	१२३३०६	१२३४०३	१२३५००	१२३५९७	१२३
२२१	१२२२४	१२२२१	१२२०१८	१२३०१५	१२३११३	१२३२१०	१२३३०७	१२३४०४	१२३५०१	१२३५९८	१२४
२२२	१२२२५	१२२२२	१२२०१९	१२३०१६	१२३११४	१२३२११	१२३३०८	१२३४०५	१२३५०२	१२३५९९	१२५
२२३	१२२२६	१२२२३	१२२०२०	१२३०१७	१२३११५	१२३२१२	१२३३०९	१२३४०६	१२३५०३	१२३६००	१२६
२२४	१२२२७	१२२२४	१२२०२१	१२३०१८	१२३११६	१२३२१३	१२३३१०	१२३४०७	१२३५०४	१२३६०१	१२७
२२५	१२२२८	१२२२५	१२२०२२	१२३०१९	१२३११७	१२३२१४	१२३३११	१२३४०८	१२३५०५	१२३६०२	१२८
२२६	१२२२९	१२२२६	१२२०२३	१२३०२०	१२३११८	१२३२१५	१२३३१२	१२३४०९	१२३५०६	१२३६०३	१२९
२२७	१२२३०	१२२२७	१२२०२४	१२३०२१	१२३११९	१२३२१६	१२३३१३	१२३४१०	१२३५०७	१२३६०४	१३०
२२८	१२२३१	१२२२८	१२२०२५	१२३०२२	१२३१२०	१२३२१७	१२३३१४	१२३४११	१२३५०८	१२३६०५	१३१
२२९	१२२३२	१२२२९	१२२०२६	१२३०२३	१२३१२१	१२३२१८	१२३३१५	१२३४१२	१२३५०९	१२३६०६	१३२
२३०	१२२३३	१२२३०	१२२०२७	१२३०२४	१२३१२२	१२३२१९	१२३३१६	१२३४१३	१२३५१०	१२३६०७	१३३
२३१	१२२३४	१२२३१	१२२०२८	१२३०२५	१२३१२३	१२३२२०	१२३३१७	१२३४१४	१२३५११	१२३६०८	१३४
२३२	१२२३५	१२२३२	१२२०२९	१२३०२६	१२३१२४	१२३२२१	१२३३१८	१२३४१५	१२३५१२	१२३६०९	१३५
२३३	१२२३६	१२२३३	१२२०३०	१२३०२७	१२३१२५	१२३२२२	१२३३१९	१२३४१६	१२३५१३	१२३६१०	१३६
२३४	१२२३७	१२२३४	१२२०३१	१२३०२८	१२३१२६	१२३२२३	१२३३२०	१२३४१७	१२३५१४	१२३६११	१३७
२३५	१२२३८	१२२३५	१२२०३२	१२३०२९	१२३१२७	१२३२२४	१२३३२१	१२३४१८	१२३५१५	१२३६१२	१३८
२३६	१२२३९	१२२३६	१२२०३३	१२३०३०	१२३१२८	१२३२२५	१२३३२२	१२३४१९	१२३५१६	१२३६१३	१३९
२३७	१२२४०	१२२३७	१२२०३४	१२३०३१	१२३१२९	१२३२२६	१२३३२३	१२३४२०	१२३५१७	१२३६१४	१४०
२३८	१२२४१	१२२३८	१२२०३५	१२३०३२	१२३१३०	१२३२२७	१२३३२४	१२३४२१	१२३५१८	१२३६१५	१४१
२३९	१२२४२	१२२३९	१२२०३६	१२३०३३	१२३१३१	१२३२२८	१२३३२५	१२३४२२	१२३५१९	१२३६१६	१४२
२४०	१२२४३	१२२४०	१२२०३७	१२३०३४	१२३१३२	१२३२२९	१२३३२६				

संख्या-वीं आशु तमे

संख्या २८०० — २४००

आग्रतम ४४७९७८ - ५३९४७९

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
२८०	४४०५८	४४०५९	४४०६०	४४०६१	४४०६२	४४०६३	४४०६४	४४०६५	४४०६६	४४०६७	४४०६८
२८१	४४०६९	४४०७०	४४०७१	४४०७२	४४०७३	४४०७४	४४०७५	४४०७६	४४०७७	४४०७८	४४०७९
२८२	४४०८०	४४०८१	४४०८२	४४०८३	४४०८४	४४०८५	४४०८६	४४०८७	४४०८८	४४०८९	४४०९०
२८३	४४०९१	४४०९२	४४०९३	४४०९४	४४०९५	४४०९६	४४०९७	४४०९८	४४०९९	४४१००	४४१०१
२८४	४४१०२	४४१०३	४४१०४	४४१०५	४४१०६	४४१०७	४४१०८	४४१०९	४४११०	४४१११	४४११२
२८५	४४११३	४४११४	४४११५	४४११६	४४११७	४४११८	४४११९	४४१२०	४४१२१	४४१२२	४४१२३
२८६	४४१२४	४४१२५	४४१२६	४४१२७	४४१२८	४४१२९	४४१३०	४४१३१	४४१३२	४४१३३	४४१३४
२८७	४४१३५	४४१३६	४४१३७	४४१३८	४४१३९	४४१४०	४४१४१	४४१४२	४४१४३	४४१४४	४४१४५
२८८	४४१४६	४४१४७	४४१४८	४४१४९	४४१५०	४४१५१	४४१५२	४४१५३	४४१५४	४४१५५	४४१५६
२८९	४४१५७	४४१५८	४४१५९	४४१६०	४४१६१	४४१६२	४४१६३	४४१६४	४४१६५	४४१६६	४४१६७
२९०	४४१६८	४४१६९	४४१७०	४४१७१	४४१७२	४४१७३	४४१७४	४४१७५	४४१७६	४४१७७	४४१७८
२९१	४४१७९	४४१८०	४४१८१	४४१८२	४४१८३	४४१८४	४४१८५	४४१८६	४४१८७	४४१८८	४४१८९
२९२	४४१९०	४४१९१	४४१९२	४४१९३	४४१९४	४४१९५	४४१९६	४४१९७	४४१९८	४४१९९	४४२००
२९३	४४२०१	४४२०२	४४२०३	४४२०४	४४२०५	४४२०६	४४२०७	४४२०८	४४२०९	४४२१०	४४२११
२९४	४४२१२	४४२१३	४४२१४	४४२१५	४४२१६	४४२१७	४४२१८	४४२१९	४४२२०	४४२२१	४४२२२
२९५	४४२२३	४४२२४	४४२२५	४४२२६	४४२२७	४४२२८	४४२२९	४४२३०	४४२३१	४४२३२	४४२३३
२९६	४४२३४	४४२३५	४४२३६	४४२३७	४४२३८	४४२३९	४४२४०	४४२४१	४४२४२	४४२४३	४४२४४
२९७	४४२४५	४४२४६	४४२४७	४४२४८	४४२४९	४४२५०	४४२५१	४४२५२	४४२५३	४४२५४	४४२५५
२९८	४४२५६	४४२५७	४४२५८	४४२५९	४४२६०	४४२६१	४४२६२	४४२६३	४४२६४	४४२६५	४४२६६
२९९	४४२६७	४४२६८	४४२६९	४४२७०	४४२७१	४४२७२	४४२७३	४४२७४	४४२७५	४४२७६	४४२७७
३००	४४२७८	४४२७९	४४२८०	४४२८१	४४२८२	४४२८३	४४२८४	४४२८५	४४२८६	४४२८७	४४२८८
३०१	४४२८९	४४२९०	४४२९१	४४२९२	४४२९३	४४२९४	४४२९५	४४२९६	४४२९७	४४२९८	४४२९९
३											

मं शब्दां चो लाघु तमे

लायलम ५.३१७३९ --- ६०२०६०

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
१००	५३११०९	५३११०५	५३११०४	५३११०३	५३११०२	५३११०१	५३११००	५३१०९९	५३१०९८	५३१०९७	१२८
१०१	२०५४	२०८२	३०८९	३१३६	३२६४	३३९१	३५१८	३६४५	३७७२	३८९९	१२९
१०२	४०२६	४१५३	४२८०	४४०७	४५३४	४६६१	४७८८	४९१५	५०४२	५१६९	१३०
१०३	५३१४	५३१४	५५४३	५६७०	५८००	५९२७	६०५४	६१८१	६३०८	६४३५	१३१
१०४	६५४६	६६८५	६८१४	६९४३	७०७२	७२०१	७३३०	७४५९	७५८८	७७१७	१३२
१०५	७८१९	७९४८	८०७७	८२०६	८३३५	८४६४	८५९३	८७२२	८८५१	८९८०	१३३
१०६	९०७६	९२०५	९३३४	९४६३	९५९२	९७२१	९८५०	९९७९	१०१०८	१०२३७	१३४
१०७	५४०३१०	५४०४५५	५४०५८०	५४०७०५	५४०८३०	५४०९५५	५४१०८०	५४१२०५	५४१३३०	५४१४५५	१३५
१०८	१५०४	१५०४	१६३१	१६३१	१७५८	१७५८	१८८५	१८८५	२०१२	२०१२	१३६
१०९	२०२५	२०२५	२१५२	२१५२	२२७९	२२७९	२४०६	२४०६	२५३३	२५३३	१३७
११०	५४१०६८	५४१११३	५४११५८	५४१२०३	५४१२४८	५४१२९३	५४१३३८	५४१३८३	५४१४२८	५४१४७३	१३८
१११	५४१०७३	५४१११८	५४११६३	५४१२०८	५४१२५३	५४१२९८	५४१३४३	५४१३८८	५४१४३३	५४१४७८	१३९
११२	६५४७	६६६६	६७९३	६९२०	७०४७	७१७४	७३०१	७४२८	७५५५	७६८२	१४०
११३	७७०७	७८३४	७९६१	८०८८	८२१५	८३४२	८४६९	८५९६	८७२३	८८५०	१४१
११४	९००७	९१३६	९२६३	९३९०	९५१७	९६४४	९७७१	९८९८	१००२५	१०१५२	१४२
११५	५४००२८	५४००७३	५४०११८	५४०१६३	५४०२०८	५४०२५३	५४०२९८	५४०३४३	५४०३८८	५४०४३३	१४३
११६	१४५०	१४५०	१६७७	१६७७	१९०४	१९०४	२१३१	२१३१	२३५८	२३५८	१४४
११७	२६६८	२६६८	२८९५	२८९५	३१२२	३१२२	३३४९	३३४९	३५७६	३५७६	१४५
११८	३८८३	३८८३	४११०	४११०	४३३७	४३३७	४५६४	४५६४	४७९१	४७९१	१४६
११९	५०९९	५०९९	५३२६	५३२६	५५५३	५५५३	५७८०	५७८०	६००७	६००७	१४७
१२०	५४६३०७	५४६३५२	५४६३९७	५४६४४२	५४६४८७	५४६५३२	५४६५७७	५४६६२२	५४६६६७	५४६७१२	१४८
१२१	१५०७	१५०७	१७३४	१७३४	१९६१	१९६१	२१८८	२१८८	२४१५	२४१५	१४९
१२२	२७००	२७००	२९२७	२९२७	३१५४	३१५४	३३८१	३३८१	३६०८	३६०८	१५०
१२३	३९०७	३९०७	४१३४	४१३४	४३६१	४३६१	४५८८	४५८८	४८१५		

प्रथम कोष्टक
संख्या-वी लाग्रनेम

संख्या ४००० — ४६००

लाग्रनेम ६०२०६० — ६६२०५८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
४००	६०२०६०	६०२१६१	६०२२०७	६०२३८६	६०२४८४	६०२६०३	६०२७११	६०२८१९	६०२९२८	६०३०३६	१०८
४०१	३१३४	३२५३	३३६३	३४६९	३५७७	३६८६	३७९४	३९०२	४०१०	४११८	१०८
४०२	४२३६	४३३४	४४३४	४५४०	४६४८	४७५६	४८७४	४९८२	५०९०	५१९८	१०८
४०३	५३०५	५४१३	५५२१	५६२८	५७३६	५८४४	५९५३	६०६१	६१६९	६२७७	१०८
४०४	६३८१	६४८९	६५९६	६७०४	६८११	६९१९	७०२६	७१३३	७२४१	७३४८	१०८
४०५	७४५५	७५६३	७६६९	७७७७	७८८४	७९९१	८०९८	८२०५	८३१३	८४२०	१०८
४०६	८५३६	८६३३	८७४०	८८४७	८९५४	९०६१	९१६८	९२७५	९३८२	९४८९	१०८
४०७	९५९४	९७०३	९८०८	९९१४	१००२१	१०१२८	१०२३४	१०३४१	१०४४७	१०५५४	१०८
४०८	१०६६०	१०७७७	१०८८७	१०९९९	११०८६	१११९३	११२९८	११४०५	११५११	११६१८	१०८
४०९	११७२३	११८२६	११९३६	१२०४२	१२१४८	१२२५४	१२३६०	१२४६६	१२५७२	१२६७८	१०८
४१०	१२७८०	१२८८०	१२९८६	१३०९२	१३१९७	१३३०३	१३४०९	१३५१५	१३६२१	१३७२७	१०८
४११	१३८३७	१३९३७	१४०४०	१४१४३	१४२४६	१४३५०	१४४५३	१४५५६	१४६६०	१४७६३	१०८
४१२	१४८९४	१४९९४	१५०९८	१५२०१	१५३०४	१५४०७	१५५१०	१५६१३	१५७१६	१५८१९	१०८
४१३	१५९५०	१६०५५	१६१६०	१६२६५	१६३७०	१६४७५	१६५८०	१६६८५	१६७९०	१६८९५	१०८
४१४	१७००७	१७१०७	१७२१०	१७३१५	१७४१९	१७५२३	१७६२७	१७७३१	१७८३५	१७९३९	१०८
४१५	१८०६४	१८१६४	१८२६७	१८३७१	१८४७५	१८५७९	१८६८३	१८७८७	१८८९१	१८९९५	१०८
४१६	१९१२१	१९२२१	१९३२४	१९४२८	१९५३२	१९६३६	१९७४०	१९८४४	१९९४८	२००५२	१०८
४१७	२०१७८	२०२७८	२०३८१	२०४८५	२०५८९	२०६९३	२०७९७	२०८९९	२०९९९	२१०९९	१०८
४१८	२१२३५	२१३३५	२१४३८	२१५४२	२१६४६	२१७५०	२१८५३	२१९५६	२२०५९	२२१६२	१०८
४१९	२२२९२	२२३९२	२२४९५	२२५९९	२२७०३	२२८०७	२२९१०	२३०१३	२३११६	२३२१९	१०८
४२०	२३३४९	२३४४९	२३५५२	२३६५६	२३७६०	२३८६३	२३९६६	२४०६९	२४१७२	२४२७५	१०८
४२१	२४४०६	२४५०६	२४६०९	२४७१३	२४८१६	२४९१९	२५०२३	२५१२६	२५२२९	२५३३२	१०८
४२२	२५४६३	२५५६३	२५६६६	२५७७०	२५८७३	२५९७६	२६०७९	२६१८२	२६२८५	२६३८८	१०८
४२३	२६५२०	२६६२०	२६७२३	२६८२७	२६९३०	२७०३३	२७१३६	२७२३९	२७३४२	२७४४५	१०८
४२४	२७५७७	२७६७७	२७७८०	२७८८३	२७९८६	२८०८९	२८१९२	२८२९५	२८३९८	२८४९९	१०८
४२५	२८६३४	२८७३४	२८८३७	२८९४०	२९०४३	२९१४६	२९२४९	२९३५२	२९४५५	२९५५८	१०८
४२६	२९६९१	२९७९१	२९८९४	२९९९७	३००९९	३०२०२	३०३०५	३०४०८	३०५११	३०६१४	१०८
४२७	३०७४८	३०८४८	३०९५१	३१०५४	३११५७	३१२६०	३१३६३	३१४६६	३१५६९	३१६७२	१०८
४२८	३१८०५	३१९०५	३२००८	३२१११	३२२१४	३२३१७	३२४२०	३२५२३	३२६२६	३२७२९	१०८
४२९	३२८६२	३२९६२	३३०६५	३३१६८	३३२७१	३३३७४	३३४७७	३३५८०	३३६८३	३३७८६	१०८
४३०	३३९१९	३४०१९	३४१२२	३४२२५	३४३२८	३४४३१	३४५३४	३४६३७	३४७४०	३४८४३	१०८
४३१	३४९७६	३५०७६	३५१७९	३५२८२	३५३८५	३५४८८	३५५९१	३५६९४	३५७९७	३५८९९	१०८
४३२	३६०३३	३६१३३	३६२३६	३६३३९	३६४४२	३६५४५	३६६४८	३६७५१	३६८५४	३६९५७	१०८
४३३	३७०९०	३७१९०	३७२९३	३७३९६	३७४९९	३७६०२	३७७०५	३७८०८	३७९११	३८०१४	१०८
४३४	३८१४७	३८२४७	३८३५०	३८४५३	३८५५६	३८६५९	३८७६२	३८८६५	३८९६८	३९०७१	१०८
४३५	३९२०४	३९३०४	३९४०७	३९५१०	३९६१३	३९७१६	३९८१९	३९९२२	४००२५	४०१२८	१०८
४३६	४०२६१	४०३६१	४०४६४	४०५६७	४०६७०	४०७७३	४०८७६	४०९७९	४१०८२	४११८५	१०८
४३७	४१३१८	४१४१८	४१५२१	४१६२४	४१७२७	४१८३०	४१९३३	४२०३६	४२१३९	४२२४२	१०८
४३८	४२३७५	४२४७५	४२५७८	४२६८१	४२७८४	४२८८७	४२९९०	४३०९३	४३१९६	४३२९९	१०८
४३९	४३४३२	४३५३२	४३६३५	४३७३८	४३८४१	४३९४४	४४०४७	४४१५०	४४२५३	४४३५६	१०८
४४०	४४४८९	४४५८९	४४६९२	४४७९५	४४८९८	४४९९९	४५०९९	४५१९९	४५२९९	४५३९९	१०८
४४१	४५५४६	४५६४६	४५७४९	४५८५२	४५९५५	४६०५८	४६१५९	४६२६०	४६३६१	४६४६२	१०८
४४२	४६६०३	४६७०३	४६८०६	४६९०९	४७०१२	४७११५	४७२१८	४७३२१	४७४२४	४७५२७	१०८
४४३	४७६६०	४७७६०	४७८६३	४७९६६	४८०६९	४८१७२	४८२७५	४८३७८	४८४८१	४८५८४	१०८
४४४	४८७१७	४८८१७	४८९२०	४९०२३	४९१२६	४९२२९	४९३३२	४९४३५	४९५३८	४९६४१	१०८
४४५	४९७७४	४९८७४	४९९७७	५००८०	५०१८३	५०२८६	५०३८९	५०४९२	५०५९५	५०६९८	१०८
४४६	५०८३१	५०९३१	५१०३४	५११३७	५१२४०	५१३४३	५१४४६	५१५४९	५१६५२	५१७५५	१०८
४४७	५१८८८	५१९८८	५२०९१	५२१९४	५२२९७	५२३९९	५२५०२	५२६०५	५२७०८	५२८११	१०८
४४८	५२९४५	५३०४५	५३१४८	५३२५१	५३३५४	५३४५७	५३५६०	५३६६३	५३७६६	५३८६९	१०८
४४९	५४००२	५४१०२	५४२०५	५४३०८	५४४११	५४५१४	५४६१७	५४७२०	५४८२३	५४९२६	१०८
४५०	५५०५९	५५१५९	५५२६२	५५३६५	५५४६८	५५५७१	५५६७४	५५७७७	५५८८०	५५९८३	१०८
४५१	५६११६	५६२१६	५६३१९	५६४२२	५६५२५	५६६२८	५६७३१	५६८३४	५६९३७	५७०४०	१०८
४५२	५७१७३	५७२७३	५७३७६	५७४७९	५७५८२	५७६८५	५७७८८	५७८९१	५७९९४	५८०९७	१०८
४५३	५८२३०	५८३३०	५८४३३	५८५३६	५८६३९	५८७४२	५८८४५	५८९४८	५९०५१	५९१५४	१०८
४५४	५९२८७	५९३८७	५९४९०	५९५९३	५९६९६	५९७९९	५९९०२	६०००५	६०१०८	६०२११	१०८
४५५	६०३४४	६०४४४	६०५४७	६०६५०	६०७५३	६०८५६	६०९५९	६१०६२	६११६५	६१२६८	१०८
४५६	६१४०१	६१५०१	६१६०४	६१७०७	६१८१०	६१९१३	६२०१६	६२११९	६२२२२	६२३२५	१०८
४५७	६२४५८	६२५५८	६२६६१	६२७६४	६२८६७	६२९७०	६३०७३	६३१७६	६३२७९	६३३८२	१०८
४५८	६३५१५	६३६१५	६३७१८	६३८२१	६३९२४	६४०२७	६४१३०	६४२३३	६४३३६	६४४३९	१०८
४५९	६४५७२	६४६७२	६४७७५	६४८७८	६४९८१	६५०८४	६५१८७	६५२९०	६५३९३	६५४९६	१०८
४६०	६५६२९	६५७२९	६५८३२	६५९३५	६६०३८	६६१४१	६६२४४	६६३४७	६६४५०	६६५५३	१०८
४६१	६६६८६	६६७८६	६६८८९	६६९९२	६७०९५	६७१९८	६७२९९	६७४०२	६७५०५	६७६०८	१०८
४६२	६७७४३	६७८४३	६७९४६	६८०४९	६८१५२	६८२५५	६८३५८	६८४६१	६८५६४	६८६६७	१०८
४६३	६८७९९	६८८९९	६८९९९	६९०९९	६९१९९	६९२९९	६९३९९	६९४९९	६९५९९	६९६९९	१०८
४६४	६९८५६	६९९५६	७००५९	७०१६२	७०२६५	७०३६८	७०४७१	७०५७४	७०६७७	७०७८०	१०८
४६५	७०९१३	७१०१३	७१११६	७१२१९	७१३२२	७१४२५	७१५२८	७१६३१	७१७३४	७१८३७	१०८
४६६	७१९६९	७२०६९	७२१७२	७२२७५	७२३७८	७२४८१	७२५८४	७२६८७	७२७९०	७२८९३	१०८
४६७	७३०२६	७३१२६	७३२२९	७३३३२	७३४३५	७३५३८	७३६४१	७३७४४	७३८४७	७३९५०	१०८
४६८	७४०८३	७४१८३	७४२८६	७४३८९	७४४९२	७४५९५	७४६९८	७४७९९	७४९०२	७	

संख्यांची लाग्र तंत्रे

संख्या १६०० — ५२००				लाघनम ६६२०५८ — ७९००३							
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
१६०	६६२०५८	६६२०५९	६६२०६०	६६२०६१	६६२०६२	६६२०६३	६६२०६४	६६२०६५	६६२०६६	६६२०६७	६९
१६१	७००१	७००२	७००३	७००४	७००५	७००६	७००७	७००८	७००९	७०१०	६९
१६२	७४०१	७४०२	७४०३	७४०४	७४०५	७४०६	७४०७	७४०८	७४०९	७४१०	६९
१६३	७८०१	७८०२	७८०३	७८०४	७८०५	७८०६	७८०७	७८०८	७८०९	७८१०	६९
१६४	८२०१	८२०२	८२०३	८२०४	८२०५	८२०६	८२०७	८२०८	८२०९	८२१०	६९
१६५	८६०१	८६०२	८६०३	८६०४	८६०५	८६०६	८६०७	८६०८	८६०९	८६१०	६९
१६६	९००१	९००२	९००३	९००४	९००५	९००६	९००७	९००८	९००९	९०१०	६९
१६७	९४०१	९४०२	९४०३	९४०४	९४०५	९४०६	९४०७	९४०८	९४०९	९४१०	६९
१६८	९८०१	९८०२	९८०३	९८०४	९८०५	९८०६	९८०७	९८०८	९८०९	९८१०	६९
१६९	१००१	१००२	१००३	१००४	१००५	१००६	१००७	१००८	१००९	१०१०	६९
१७०	१०१०	१०११	१०१२	१०१३	१०१४	१०१५	१०१६	१०१७	१०१८	१०१९	६९
१७१	१०२०	१०२१	१०२२	१०२३	१०२४	१०२५	१०२६	१०२७	१०२८	१०२९	६९
१७२	१०३०	१०३१	१०३२	१०३३	१०३४	१०३५	१०३६	१०३७	१०३८	१०३९	६९
१७३	१०४०	१०४१	१०४२	१०४३	१०४४	१०४५	१०४६	१०४७	१०४८	१०४९	६९
१७४	१०५०	१०५१	१०५२	१०५३	१०५४	१०५५	१०५६	१०५७	१०५८	१०५९	६९
१७५	१०६०	१०६१	१०६२	१०६३	१०६४	१०६५	१०६६	१०६७	१०६८	१०६९	६९
१७६	१०७०	१०७१	१०७२	१०७३	१०७४	१०७५	१०७६	१०७७	१०७८	१०७९	६९
१७७	१०८०	१०८१	१०८२	१०८३	१०८४	१०८५	१०८६	१०८७	१०८८	१०८९	६९
१७८	१०९०	१०९१	१०९२	१०९३	१०९४	१०९५	१०९६	१०९७	१०९८	१०९९	६९
१७९	११००	११०१	११०२	११०३	११०४	११०५	११०६	११०७	११०८	११०९	६९
१८०	१११०	११११	१११२	१११३	१११४	१११५	१११६	१११७	१११८	१११९	६९
१८१	११२०	११२१	११२२	११२३	११२४	११२५	११२६	११२७	११२८	११२९	६९
१८२	११३०	११३१	११३२	११३३	११३४	११३५	११३६	११३७	११३८	११३९	६९
१८३	११४०	११४१	११४२	११४३	११४४	११४५	११४६	११४७	११४८	११४९	६९
१८४	११५०	११५१	११५२	११५३	११५४	११५५	११५६	११५७	११५८	११५९	६९
१८५	११६०	११६१	११६२	११६३	११६४	११६५	११६६	११६७	११६८	११६९	६९
१८६	११७०	११७१	११७२	११७३	११७४	११७५	११७६	११७७	११७८	११७९	६९
१८७	११८०	११८१	११८२	११८३	११८४	११८५	११८६	११८७	११८८	११८९	६९
१८८	११९०	११९१	११९२	११९३	११९४	११९५	११९६	११९७	११९८	११९९	६९
१८९	१२००	१२०१	१२०२	१२०३	१२०४	१२०५	१२०६	१२०७	१२०८	१२०९	६९
१९०	१२१०	१२११	१२१२	१२१३	१२१४	१२१५	१२१६	१२१७	१२१८	१२१९	६९
१९१	१२२०	१२२१	१२२२	१२२३	१२२४	१२२५	१२२६	१२२७	१२२८	१२२९	६९
१९२	१२३०	१२३१	१२३२	१२३३	१२३४	१२३५	१२३६	१२३७	१२३८	१२३९	६९
१९३	१२४०	१२४१	१२४२	१२४३	१२४४	१२४५	१२४६	१२४७	१२४८	१२४९	६९
१९४	१२५०	१२५१	१२५२	१२५३	१२५४	१२५५	१२५६	१२५७	१२५८	१२५९	६९
१९५	१२६०	१२६१	१२६२	१२६३	१२६४	१२६५	१२६६	१२६७	१२६८	१२६९	६९
१९६	१२७०	१२७१	१२७२	१२७३	१२७४	१२७५	१२७६	१२७७	१२७८	१२७९	६९
१९७	१२८०	१२८१	१२८२	१२८३	१२८४	१२८५	१२८६	१२८७	१२८८	१२८९	६९
१९८	१२९०	१२९१	१२९२	१२९३	१२९४	१२९५	१२९६	१२९७	१२९८	१२९९	६९
१९९	१३००	१३०१	१३०२	१३०३	१३०४	१३०५	१३०६	१३०७	१३०८	१३०९	६९
२००	१३१०	१३११	१३१२	१३१३	१३१४	१३१५	१३१६	१३१७	१३१८	१३१९	६९
२०१	१३२०	१३२१	१३२२	१३२३	१३२४	१३२५	१३२६	१३२७	१३२८	१३२९	६९
२०२	१३३०	१३३१	१३३२	१३३३	१३३४	१३३५	१३३६	१३३७	१३३८	१३३९	६९
२०३	१३४०	१३४१	१३४२	१३४३	१३४४	१३४५	१३४६	१३४७	१३४८	१३४९	६९
२०४	१३५०	१३५१	१३५२	१३५३	१३५४	१३५५	१३५६	१३५७	१३५८	१३५९	६९
२०५	१३६०	१३६१	१३६२	१३६३	१३६४	१३६५	१३६६	१३६७	१३६८	१३६९	६९
२०६	१३७०	१३७१	१३७२	१३७३	१३७४	१३७५	१३७६	१३७७	१३७८	१३७९	६९
२०७	१३८०	१३८१	१३८२	१३८३	१३८४	१३८५	१३८६	१३८७	१३८८	१३८९	६९
२०८	१३९०	१३९१	१३९२	१३९३	१३९४	१३९५	१३९६	१३९७	१३९८	१३९९	६९
२०९	१४००	१४०१	१४०२	१४०३	१४०४	१४०५	१४०६	१४०७	१४०८	१४०९	६९
२१०	१४१०	१४११	१४१२	१४१३	१४१४	१४१५	१४१६	१४१७	१४१८	१४१९	६९
२११	१४२०	१४२१	१४२२	१४२३	१४२४	१४२५	१४२६	१४२७	१४२८	१४२९	६९
२१२	१४३०	१४३१	१४३२	१४३३	१४३४	१४३५	१४३६	१४३७	१४३८	१४३९	६९
२१३	१४४०	१४४१	१४४२	१४४३	१४४४	१४४५	१४४६	१४४७	१४४८	१४४९	६९
२१४	१४५०	१४५१	१४५२	१४५३	१४५४	१४५५	१४५६	१४५७	१४५८	१४५९	६९
२१५	१४६०	१४६१	१४६२	१४६३	१४६४	१४६५	१४६६	१४६७	१४६८	१४६९	६९
२१६	१४७०	१४७१	१४७२	१४७३	१४७४	१४७५	१४७६	१४७७	१४७८	१४७९	६९
२१७	१४८०	१४८१	१४८२	१४८३	१४८४	१४८५	१४८६	१४८७	१४८८	१४८९	६९
२१८	१४९०	१४९१	१४९२	१४९३	१४९४	१४९५	१४९६	१४९७	१४९८	१४९९	६९
२१९	१५००	१५०१	१५०२	१५०३	१५०४	१५०५	१५०६	१५०७	१५०८	१५०९	६९
२२०	१५१०	१५११	१५१२	१५१३	१५१४	१५१५	१५१६	१५१७	१५१८	१५१९	६९
२२१	१५२०	१५२१	१५२२	१५२३	१५२४	१५२५	१५२६	१५२७	१५२८	१५२९	६९
२२२	१५३०	१५३१	१५३२	१५३३	१५३४	१५३५	१५३६	१५३७	१५३८	१५३९	६९
२२३	१५४०	१५४१	१५४२	१५४३	१५४४	१५४५	१५४६	१५४७	१५४८	१५४९	६९
२२४	१५५०	१५५१	१५५२	१५५३	१५५४	१५५५	१५५६	१५५७	१५५८	१५५९	६९
२२५	१५६०	१५६१	१५६२	१५६३	१५६४	१५६५	१५६६	१५६७	१५६८	१५६९	६९
२२६	१५७०	१५७१	१५७२	१५७३	१५७४	१५७५	१५७६	१५७७	१५७८	१५७९	६९
२२७	१५८०	१५८१	१५८२	१५८३	१५८४	१५८५	१५८६	१५८७	१५८८	१५८९	६९
२२८	१५९०	१५९१	१५९२	१५९३	१५९४	१५९५	१५९६	१५९७	१५९८	१५९९	६९
२२९	१६००	१६०१	१६०२	१६०३	१६०४	१६०५	१६०६	१६०७	१६०८	१६०९	६९
२३०	१६१०	१६११	१६१२	१६१३	१६१४	१६१५	१६१६	१६१७	१६१८	१६१९	६९
२३१	१६२०	१६२१	१६२२	१६२३	१६२४	१६२५	१६२६	१६२७	१६२८	१६२९	६९
२३२	१६३०	१६३१	१६३२	१६३३	१६३४	१६३५	१६३६	१६३७	१६३८	१६३९	६९
२३३	१६४०	१६४१	१६४२	१६४३	१६४४	१६४५	१६४६	१६४७	१६४८	१६४९	६९
२३४	१६५०	१६५१	१६५२	१६५३	१६५४	१६५५	१६५६	१६५७	१६५८	१६५९	६९
२३५	१६६०	१६६१	१६६२	१६६३	१६६४	१६६५	१६६६	१६६७	१६६८	१६६९	६९
२३६	१६७०	१६७१	१६७२	१६७३	१६७४	१६७५	१६७६	१६७७	१६७८	१६७९	६९
२३७	१६८०	१६८१	१६८२	१६८३	१६८४	१६८५	१६८६	१६८७	१६८८	१६८९	६९
२३८	१६९०	१६९१	१६९२	१६९३	१६९४	१६९५	१६९६	१६९७	१६९८	१६९९	६९
२३९											

प्रथम कोष्टक
संख्या बी. प्रथम

संख्या ५२०० — ५६००

आप्रतम ११६००३ — १६५४२८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
५२०	११६००३	११६००३	११६१००	११६२५४	११६३१०	११६४२१	११६५०४	११६५८८	११६६७१	११६७५४	८३
५२१	६८७८	६८७९	३००४	३००८	३०११	३०१४	३०१८	३०२१	३०२५	३०२८	८३
५२२	३६७१	३६७४	३६७७	३६८०	३६८३	३६८६	३६८९	३६९२	३६९६	३६९९	८३
५२३	८५०२	८५०५	८५०८	८५११	८५१४	८५१७	८५२०	८५२३	८५२६	८५२९	८३
५२४	९३११	९३१४	९३१७	९३२०	९३२३	९३२६	९३२९	९३३२	९३३५	९३३८	८३
५२५	३२०१५१	३२०२४३	३२०३३५	३२०४२७	३२०५१९	३२०६११	३२०७०३	३२०७९५	३२०८८७	३२०९७९	८३
५२६	०९८६	१०८८	११८९	१२९०	१३९१	१४९२	१५९३	१६९४	१७९५	१८९६	८३
५२७	१८११	१८१४	१८१७	१८२०	१८२३	१८२६	१८२९	१८३२	१८३५	१८३८	८३
५२८	२६३४	२६३७	२६४०	२६४३	२६४६	२६४९	२६५२	२६५५	२६५८	२६६१	८३
५२९	३४५६	३४५९	३४६२	३४६५	३४६८	३४७१	३४७४	३४७७	३४८०	३४८३	८३
५३०	४२७८	४२८१	४२८४	४२८७	४२९०	४२९३	४२९६	४२९९	४३०२	४३०५	८३
५३१	५०९९	५१०२	५१०५	५१०८	५१११	५११४	५११७	५१२०	५१२३	५१२६	८३
५३२	५९२०	५९२३	५९२६	५९२९	५९३२	५९३५	५९३८	५९४१	५९४४	५९४७	८३
५३३	६७४१	६७४४	६७४७	६७५०	६७५३	६७५६	६७५९	६७६२	६७६५	६७६८	८३
५३४	७५६२	७५६५	७५६८	७५७१	७५७४	७५७७	७५८०	७५८३	७५८६	७५८९	८३
५३५	८३८३	८३८६	८३८९	८३९२	८३९५	८३९८	८४०१	८४०४	८४०७	८४१०	८३
५३६	९२०४	९२०७	९२१०	९२१३	९२१६	९२१९	९२२२	९२२५	९२२८	९२३१	८३
५३७	१००२५	१००३४	१००४३	१००५२	१००६१	१००७०	१००७९	१००८८	१००९७	१०१०६	८३
५३८	१०८८६	१०८८९	१०८९२	१०८९५	१०८९८	१०९०१	१०९०४	१०९०७	१०९१०	१०९१३	८३
५३९	११७०८	११७११	११७१४	११७१७	११७२०	११७२३	११७२६	११७२९	११७३२	११७३५	८३
५४०	१२५३०	१२५३३	१२५३६	१२५३९	१२५४२	१२५४५	१२५४८	१२५५१	१२५५४	१२५५७	८३
५४१	१३३६२	१३३६५	१३३६८	१३३७१	१३३७४	१३३७७	१३३८०	१३३८३	१३३८६	१३३८९	८३
५४२	१४१९४	१४१९७	१४२००	१४२०३	१४२०६	१४२०९	१४२१२	१४२१५	१४२१८	१४२२१	८३
५४३	१५०२६	१५०२९	१५०३२	१५०३५	१५०३८	१५०४१	१५०४४	१५०४७	१५०५०	१५०५३	८३
५४४	१५८५८	१५८६१	१५८६४	१५८६७	१५८७०	१५८७३	१५८७६	१५८७९	१५८८२	१५८८५	८३
५४५	१६६९०	१६६९३	१६६९६	१६६९९	१६७०२	१६७०५	१६७०८	१६७११	१६७१४	१६७१७	८३
५४६	१७५२२	१७५२५	१७५२८	१७५३१	१७५३४	१७५३७	१७५४०	१७५४३	१७५४६	१७५४९	८३
५४७	१८३५४	१८३५७	१८३६०	१८३६३	१८३६६	१८३६९	१८३७२	१८३७५	१८३७८	१८३८१	८३
५४८	१९१८६	१९१८९	१९१९२	१९१९५	१९१९८	१९२०१	१९२०४	१९२०७	१९२१०	१९२१३	८३
५४९	२००१८	२००२१	२००२४	२००२७	२००३०	२००३३	२००३६	२००३९	२००४२	२००४५	८३
५५०	२०८५०	२०८५३	२०८५६	२०८५९	२०८६२	२०८६५	२०८६८	२०८७१	२०८७४	२०८७७	८३
५५१	२१६८२	२१६८५	२१६८८	२१६९१	२१६९४	२१६९७	२१७००	२१७०३	२१७०६	२१७०९	८३
५५२	२२५१४	२२५१७	२२५२०	२२५२३	२२५२६	२२५२९	२२५३२	२२५३५	२२५३८	२२५४१	८३
५५३	२३३४६	२३३४९	२३३५२	२३३५५	२३३५८	२३३६१	२३३६४	२३३६७	२३३७०	२३३७३	८३
५५४	२४१७८	२४१८१	२४१८४	२४१८७	२४१९०	२४१९३	२४१९६	२४१९९	२४२०२	२४२०५	८३
५५५	२५०१०	२५०१३	२५०१६	२५०१९	२५०२२	२५०२५	२५०२८	२५०३१	२५०३४	२५०३७	८३
५५६	२५८४२	२५८४५	२५८४८	२५८५१	२५८५४	२५८५७	२५८६०	२५८६३	२५८६६	२५८६९	८३
५५७	२६६७४	२६६७७	२६६८०	२६६८३	२६६८६	२६६८९	२६६९२	२६६९५	२६६९८	२६७०१	८३
५५८	२७५०६	२७५०९	२७५१२	२७५१५	२७५१८	२७५२१	२७५२४	२७५२७	२७५३०	२७५३३	८३
५५९	२८३३८	२८३४१	२८३४४	२८३४७	२८३५०	२८३५३	२८३५६	२८३५९	२८३६२	२८३६५	८३
५६०	२९१७०	२९१७३	२९१७६	२९१७९	२९१८२	२९१८५	२९१८८	२९१९१	२९१९४	२९१९७	८३
५६१	३०००२	३०००५	३०००८	३००११	३००१४	३००१७	३००२०	३००२३	३००२६	३००२९	८३
५६२	३०८३४	३०८३७	३०८४०	३०८४३	३०८४६	३०८४९	३०८५२	३०८५५	३०८५८	३०८६१	८३
५६३	३१६६६	३१६६९	३१६७२	३१६७५	३१६७८	३१६८१	३१६८४	३१६८७	३१६९०	३१६९३	८३
५६४	३२५०८	३२५११	३२५१४	३२५१७	३२५२०	३२५२३	३२५२६	३२५२९	३२५३२	३२५३५	८३
५६५	३३३४०	३३३४३	३३३४६	३३३४९	३३३५२	३३३५५	३३३५८	३३३६१	३३३६४	३३३६७	८३
५६६	३४१७२	३४१७५	३४१७८	३४१८१	३४१८४	३४१८७	३४१९०	३४१९३	३४१९६	३४१९९	८३
५६७	३५००४	३५००७	३५०१०	३५०१३	३५०१६	३५०१९	३५०२२	३५०२५	३५०२८	३५०३१	८३
५६८	३५८३६	३५८३९	३५८४२	३५८४५	३५८४८	३५८५१	३५८५४	३५८५७	३५८६०	३५८६३	८३
५६९	३६६६८	३६६७१	३६६७४	३६६७७	३६६८०	३६६८३	३६६८६	३६६८९	३६६९२	३६६९५	८३
५७०	३७५००	३७५०३	३७५०६	३७५०९	३७५१२	३७५१५	३७५१८	३७५२१	३७५२४	३७५२७	८३
५७१	३८३३२	३८३३५	३८३३८	३८३४१	३८३४४	३८३४७	३८३५०	३८३५३	३८३५६	३८३५९	८३
५७२	३९१६४	३९१६७	३९१७०	३९१७३	३९१७६	३९१७९	३९१८२	३९१८५	३९१८८	३९१९१	८३
५७३	४०००६	४०००९	४००१२	४००१५	४००१८	४००२१	४००२४	४००२७	४००३०	४००३३	८३
५७४	४०८३८	४०८४१	४०८४४	४०८४७	४०८५०	४०८५३	४०८५६	४०८५९	४०८६२	४०८६५	८३
५७५	४१६७०	४१६७३	४१६७६	४१६७९	४१६८२	४१६८५	४१६८८	४१६९१	४१६९४	४१६९७	८३
५७६	४२५०२	४२५०५	४२५०८	४२५११	४२५१४	४२५१७	४२५२०	४२५२३	४२५२६	४२५२९	८३
५७७	४३३३४	४३३३७	४३३४०	४३३४३	४३३४६	४३३४९	४३३५२	४३३५५	४३३५८	४३३६१	८३
५७८	४४१६६	४४१६९	४४१७२	४४१७५	४४१७८	४४१८१	४४१८४	४४१८७	४४१९०	४४१९३	८३
५७९	४५००८	४५०११	४५०१४	४५०१७	४५०२०	४५०२३	४५०२६	४५०२९	४५०३२	४५०३५	८३
५८०	४५८४०	४५८४३	४५८४६	४५८४९	४५८५२	४५८५५	४५८५८	४५८६१	४५८६४	४५८६७	८३
५८१	४६६७२	४६६७५	४६६७८	४६६८१	४६६८४	४६६८७	४६६९०	४६६९३	४६६९६	४६६९९	८३
५८२	४७५०४	४७५०७	४७५१०	४७५१३	४७५१६	४७५१९	४७५२२	४७५२५	४७५२८	४७५३१	८३
५८३	४८३३६	४८३३९	४८३४२	४८३४५	४८३४८	४८३५१	४८३५४	४८३५७	४८३६०	४८३६३	८३
५८४	४९१६८	४९१७१	४९१७४	४९१७७	४९१८०	४९१८३	४९१८६	४९१८९	४९१९२	४९१९५	८३
५८५	५००००	५०००३	५०००६	५०००९	५००१२	५००१५	५००१८	५००२१	५००२४	५००२७	८३
५८६	५०८३२	५०८३५	५०८३८	५०८४१	५०८४४	५०८४७	५०८५०	५०८५३	५०८५६	५०८५९	८३
५८७	५१६६४	५१६६७	५१६७०	५१६७३	५१६७६	५१६७९	५१६८२	५१६८५	५१६८८	५१६९१	८३
५८८	५२५०६	५२५०९	५२५१२	५२५१५	५२५१८	५२५२१	५२५२४	५२५२७	५२५३०	५२५३३	८३
५८९	५३३३८	५३३४१	५३३४४	५३३४७	५३३५०	५३३५३	५३३५६	५३३५९	५३३६२	५३३६५	८३
५९०	५४१७०	५४१७३	५४१७६	५४१७९	५४१८२						

लाघर्गम ७६१४२८ — ८०६१८०

मंख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
५८०	३६१२८	३६१५०	३६१५८	३६१६५	३६१७०	३६१८०	३६१८५	३६१९२	३६१९७	३६१९९	३६
५८१	३६१३६	३६१५१	३६१६६	३६१७०	३६१७५	३६१८०	३६१८५	३६१९०	३६१९५	३६१९८	३६
५८२	३६१४३	३६१५६	३६१६९	३६१७३	३६१७७	३६१८०	३६१८५	३६१९०	३६१९५	३६१९८	३६
५८३	३६१५०	३६१५९	३६१६९	३६१७३	३६१७७	३६१८०	३६१८५	३६१९०	३६१९५	३६१९८	३६
५८४	३६१५७	३६१६०	३६१६९	३६१७३	३६१७७	३६१८०	३६१८५	३६१९०	३६१९५	३६१९८	३६
५८५	३६१६४	३६१६७	३६१६९	३६१७३	३६१७७	३६१८०	३६१८५	३६१९०	३६१९५	३६१९८	३६
५८६	३६१७१	३६१७४	३६१७६	३६१७९	३६१८३	३६१८६	३६१९०	३६१९३	३६१९६	३६१९९	३६
५८७	३६१७८	३६१८१	३६१८३	३६१८६	३६१९०	३६१९३	३६१९६	३६१९९	३६२०२	३६२०५	३६
५८८	३६१८५	३६१८८	३६१९०	३६१९३	३६१९६	३६१९९	३६२०२	३६२०५	३६२०८	३६२११	३६
५८९	३६१९२	३६१९५	३६१९७	३६१९९	३६२०२	३६२०५	३६२०८	३६२११	३६२१४	३६२१७	३६
५९०	३६१९९	३६२०२	३६२०४	३६२०७	३६२१०	३६२१३	३६२१६	३६२१९	३६२२२	३६२२५	३६
५९१	३६२०६	३६२०९	३६२११	३६२१४	३६२१७	३६२२०	३६२२३	३६२२६	३६२२९	३६२३२	३६
५९२	३६२१३	३६२१६	३६२१८	३६२२१	३६२२४	३६२२७	३६२३०	३६२३३	३६२३६	३६२३९	३६
५९३	३६२२०	३६२२३	३६२२५	३६२२८	३६२३१	३६२३४	३६२३७	३६२४०	३६२४३	३६२४६	३६
५९४	३६२२७	३६२२९	३६२३१	३६२३४	३६२३७	३६२४०	३६२४३	३६२४६	३६२४९	३६२५२	३६
५९५	३६२३४	३६२३६	३६२३८	३६२४१	३६२४४	३६२४७	३६२५०	३६२५३	३६२५६	३६२५९	३६
५९६	३६२४१	३६२४३	३६२४५	३६२४८	३६२५१	३६२५४	३६२५७	३६२६०	३६२६३	३६२६६	३६
५९७	३६२४८	३६२५०	३६२५२	३६२५५	३६२५८	३६२६१	३६२६४	३६२६७	३६२७०	३६२७३	३६
५९८	३६२५५	३६२५७	३६२५९	३६२६२	३६२६५	३६२६८	३६२७१	३६२७४	३६२७७	३६२८०	३६
५९९	३६२६२	३६२६४	३६२६६	३६२६९	३६२७२	३६२७५	३६२७८	३६२८१	३६२८४	३६२८७	३६
६००	३६२६९	३६२७१	३६२७३	३६२७६	३६२७९	३६२८२	३६२८५	३६२८८	३६२९१	३६२९४	३६
६०१	३६२७६	३६२७८	३६२८०	३६२८३	३६२८६	३६२८९	३६२९२	३६२९५	३६२९८	३६३०१	३६
६०२	३६२८३	३६२८५	३६२८७	३६२९०	३६२९३	३६२९६	३६२९९	३६३०२	३६३०५	३६३०८	३६
६०३	३६२८९	३६२९१	३६२९३	३६२९६	३६२९९	३६३०२	३६३०५	३६३०८	३६३११	३६३१४	३६
६०४	३६२९६	३६२९८	३६२९९	३६३०२	३६३०५	३६३०८	३६३११	३६३१४	३६३१७	३६३२०	३६
६०५	३६३०३	३६३०५	३६३०६	३६३०९	३६३१२	३६३१५	३६३१८	३६३२१	३६३२४	३६३२७	३६
६०६	३६३१०	३६३१२	३६३१३	३६३१६	३६३१९	३६३२२	३६३२५	३६३२८	३६३३१	३६३३४	३६
६०७	३६३१७	३६३१९	३६३२०	३६३२३	३६३२६	३६३२९	३६३३२	३६३३५	३६३३८	३६३४१	३६
६०८	३६३२४	३६३२६	३६३२७	३६३३०	३६३३३	३६३३६	३६३३९	३६३४२	३६३४५	३६३४८	३६
६०९	३६३३१	३६३३३	३६३३४	३६३३७	३६३४०	३६३४३	३६३४६	३६३४९	३६३५२	३६३५५	३६
६१०	३६३३८	३६३४०	३६३४१	३६३४४	३६३४७	३६३४९	३६३५२	३६३५५	३६३५८	३६३६१	३६
६११	३६३४५	३६३४७	३६३४८	३६३५१	३६३५४	३६३५६	३६३५९	३६३६२	३६३६५	३६३६८	३६
६१२	३६३५२	३६३५४	३६३५५	३६३५८	३६३६१	३६३६३	३६३६६	३६३६९	३६३७२	३६३७५	३६
६१३	३६३५९	३६३६१	३६३६२	३६३६५	३६३६८	३६३७१	३६३७४	३६३७७	३६३८०	३६३८३	३६
६१४	३६३६६	३६३६८	३६३६९	३६३७२	३६३७५	३६३७७	३६३८०	३६३८३	३६३८६	३६३८९	३६
६१५	३६३७३	३६३७५	३६३७६	३६३७९	३६३८२	३६३८४	३६३८७	३६३९०	३६३९३	३६३९६	३६
६१६	३६३८०	३६३८२	३६३८३	३६३८६	३६३८९	३६३९२	३६३९५	३६३९८	३६४०१	३६४०४	३६
६१७	३६३८७	३६३८९	३६३९०	३६३९३	३६३९६	३६३९९	३६४०२	३६४०५	३६४०८	३६४११	३६
६१८	३६३९४	३६३९६	३६३९७	३६४००	३६४०३	३६४०५	३६४०८	३६४११	३६४१४	३६४१७	३६
६१९	३६४०१	३६४०३	३६४०४	३६४०७	३६४१०	३६४१२	३६४१५	३६४१८	३६४२१	३६४२४	३६
६२०	३६४०८	३६४१०	३६४११	३६४१४	३६४१७	३६४१९	३६४२२	३६४२५	३६४२८	३६४३१	३६
६२१	३६४१५	३६४१७	३६४१८	३६४२१	३६४२४	३६४२६	३६४२९	३६४३२	३६४३५	३६४३८	३६
६२२	३६४२२	३६४२४	३६४२५	३६४२८	३६४३१	३६४३३	३६४३६	३६४३९	३६४४२	३६४४५	३६
६२३	३६४२९	३६४३१	३६४३२	३६४३५	३६४३८	३६४४०	३६४४३	३६४४६	३६४४९	३६४५२	३६
६२४	३६४३६	३६४३८	३६४३९	३६४४२	३६४४५	३६४४७	३६४५०	३६४५३	३६४५६	३६४५९	३६
६२५	३६४४३	३६४४५	३६४४६	३६४४९	३६४५२	३६४५४	३६४५७	३६४६०	३६४६३	३६४६६	३६
६२६	३६४५०	३६४५२	३६४५३	३६४५६	३६४५९	३६४६१	३६४६४	३६४६७	३६४७०	३६४७३	३६
६२७	३६४५७	३६४५९	३६४६०	३६४६३	३६४६६	३६४६८	३६४७१	३६४७४	३६४७७	३६४८०	३६
६२८	३६४६४	३६४६६	३६४६७	३६४७०	३६४७३	३६४७५	३६४७८	३६४८१	३६४८४	३६४८७	३६
६२९	३६४७१	३६४७३	३६४७४	३६४७७	३६४८०	३६४८२	३६४८५	३६४८८	३६४९१	३६४९४	३६
६३०	३६४७८	३६४८०	३६४८१	३६४८४	३६४८७	३६४८९	३६४९२	३६४९५	३६४९८	३६५०१	३६
६३१	३६४८५	३६४८७	३६४८८	३६४९१	३६४९४	३६४९६	३६४९९	३६५०२	३६५०५	३६५०८	३६
६३२	३६४९२	३६४९४	३६४९५	३६४९८	३६५०१	३६५०३	३६५०६	३६५०९	३६५१२	३६५१५	३६
६३३	३६४९९	३६५०१	३६५०२	३६५०५	३६५०८	३६५१०	३६५१३	३६५१६	३६५१९	३६५२२	३६
६३४	३६५०६	३६५०८	३६५०९	३६५१२	३६५१५	३६५१७	३६५२०	३६५२३	३६५२६	३६५२९	३६
६३५	३६५१३	३६५१५	३६५१६	३६५१९	३६५२२	३६५२४	३६५२७	३६५३०	३६५३३	३६५३६	३६
६३६	३६५२०	३६५२२	३६५२३	३६५२६	३६५२९	३६५३१	३६५३४	३६५३७	३६५४०	३६५४३	३६
६३७	३६५२७	३६५२९	३६५३०	३६५३३	३६५३६	३६५३८	३६५४१	३६५४४	३६५४७	३६५५०	३६
६३८	३६५३४	३६५३६	३६५३७	३६५३९	३६५४२	३६५४४	३६५४७	३६५४९	३६५५२	३६५५५	३६
६३९	३६५४१	३६५४३	३६५४४	३६५४७	३६५४९	३६५५२	३६५५५	३६५५८	३६५६१	३६५६४	३६
६४०	३६५४८	३६५४९	३६५५०	३६५५३	३६५५६	३६५५८	३६५६१	३६५६४	३६५६७	३६५७०	३६
६४१	३६५५५	३६५५७	३६५५८	३६५६१	३६५६३	३६५६६	३६५६९	३६५७२	३६५७५	३६५७८	३६
६४२	३६५६२	३६५६४	३६५६५	३६५६८	३६५६९	३६५७२	३६५७५	३६५७८	३६५८१	३६५८४	३६
६४३	३६५६९	३६५७१	३६५७२	३६५७५	३६५७७	३६५८०	३६५८३	३६५८६	३६५८९	३६५९२	३६
६४४	३६५७६	३६५७८	३६५७९	३६५८२	३६५८४	३६५८७	३६५९०	३६५९३	३६५९६	३६५९९	३६
६४५	३६५८३	३६५८५	३६५८६	३६५८९	३६५९१	३६५९४	३६५९७	३६६००	३६६०३	३६६०६	३६
६४६	३६५९०	३६५९२	३६५९३	३६५९६	३६५९८	३६६०१	३६६०४	३६६०७	३६६१०	३६६१३	३६
६४७	३६५९७	३६५९९	३६६००	३६६०३	३६६०५	३६६०८	३६६११	३६६१४	३६६१७	३६६२०	३६
६४८	३६६०४	३६६०६	३६६०७	३६६१०	३६६१२	३६६१५	३६६१८	३६६२१	३६६२४	३६६२७	३६
६४९	३६६११	३६६१३	३६६१४	३६६१७	३६६१९	३६६२२	३६६२५	३६६२८	३६६३१	३६६३४	३६
६५०	३६६१८	३६६२०	३६६२१	३६६२४	३६६२६	३६६२९	३६६३				

संख्या-ची लाघतने

संख्या ६४०० — १०००

ला.प्र.त.म. ८०६१८० — ८४५०९८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
६४०	८०६१८०	८०६२४०	८०६३००	८०६३६०	८०६४२०	८०६४८०	८०६५४०	८०६६००	८०६६६०	८०६७२०	६४
६४१	६४५८	६४६४	६४७०	६४७६	६४८२	६४८८	६४९४	६४९९	६५०५	६५१०	६५
६४२	७५५५	७५६१	७५६७	७५७३	७५७९	७५८५	७५९१	७५९६	७६०२	७६०८	६६
६४३	८६६१	८६६७	८६७३	८६७९	८६८५	८६९१	८६९६	८७०२	८७०८	८७१४	६७
६४४	९७६७	९७७३	९७७९	९७८५	९७९१	९७९६	९८०२	९८०८	९८१४	९८२०	६८
६४५	१०७७३	१०७७९	१०७८५	१०७९१	१०७९६	१०८०२	१०८०८	१०८१४	१०८२०	१०८२६	६९
६४६	११८७९	११८८५	११८९१	११८९६	११९०२	११९०८	११९१४	११९२०	११९२६	११९३२	७०
६४७	१२९८५	१२९९१	१२९९६	१३००२	१३००८	१३०१४	१३०२०	१३०२६	१३०३२	१३०३८	७१
६४८	१४०९१	१४०९६	१४१०२	१४१०८	१४११४	१४१२०	१४१२६	१४१३२	१४१३८	१४१४४	७२
६४९	१५१९७	१५१९७	१५२०३	१५२०९	१५२१५	१५२२१	१५२२६	१५२३२	१५२३८	१५२४४	७३
६५०	१६२९७	१६२९७	१६३०३	१६३०९	१६३१५	१६३२१	१६३२६	१६३३२	१६३३८	१६३४४	७४
६५१	१७३९७	१७३९७	१७४०३	१७४०९	१७४१५	१७४२१	१७४२६	१७४३२	१७४३८	१७४४४	७५
६५२	१८४९७	१८४९७	१८५०३	१८५०९	१८५१५	१८५२१	१८५२६	१८५३२	१८५३८	१८५४४	७६
६५३	१९५९७	१९५९७	१९६०३	१९६०९	१९६१५	१९६२१	१९६२६	१९६३२	१९६३८	१९६४४	७७
६५४	२०६९७	२०६९७	२०७०३	२०७०९	२०७१५	२०७२१	२०७२६	२०७३२	२०७३८	२०७४४	७८
६५५	२१७९७	२१७९७	२१८०३	२१८०९	२१८१५	२१८२१	२१८२६	२१८३२	२१८३८	२१८४४	७९
६५६	२२८९७	२२८९७	२२९०३	२२९०९	२२९१५	२२९२१	२२९२६	२२९३२	२२९३८	२२९४४	८०
६५७	२३९९७	२३९९७	२४००३	२४००९	२४०१५	२४०२१	२४०२६	२४०३२	२४०३८	२४०४४	८१
६५८	२५०९७	२५०९७	२५१०३	२५१०९	२५११५	२५१२१	२५१२६	२५१३२	२५१३८	२५१४४	८२
६५९	२६१९७	२६१९७	२६२०३	२६२०९	२६२१५	२६२२१	२६२२६	२६२३२	२६२३८	२६२४४	८३
६६०	२७२९७	२७२९७	२७३०३	२७३०९	२७३१५	२७३२१	२७३२६	२७३३२	२७३३८	२७३४४	८४
६६१	२८३९७	२८३९७	२८४०३	२८४०९	२८४१५	२८४२१	२८४२६	२८४३२	२८४३८	२८४४४	८५
६६२	२९४९७	२९४९७	२९५०३	२९५०९	२९५१५	२९५२१	२९५२६	२९५३२	२९५३८	२९५४४	८६
६६३	३०५९७	३०५९७	३०६०३	३०६०९	३०६१५	३०६२१	३०६२६	३०६३२	३०६३८	३०६४४	८७
६६४	३१६९७	३१६९७	३१७०३	३१७०९	३१७१५	३१७२१	३१७२६	३१७३२	३१७३८	३१७४४	८८
६६५	३२७९७	३२७९७	३२८०३	३२८०९	३२८१५	३२८२१	३२८२६	३२८३२	३२८३८	३२८४४	८९
६६६	३३८९७	३३८९७	३३९०३	३३९०९	३३९१५	३३९२१	३३९२६	३३९३२	३३९३८	३३९४४	९०
६६७	३४९९७	३४९९७	३५००३	३५००९	३५०१५	३५०२१	३५०२६	३५०३२	३५०३८	३५०४४	९१
६६८	३६०९७	३६०९७	३६१०३	३६१०९	३६११५	३६१२१	३६१२६	३६१३२	३६१३८	३६१४४	९२
६६९	३७१९७	३७१९७	३७२०३	३७२०९	३७२१५	३७२२१	३७२२६	३७२३२	३७२३८	३७२४४	९३
६७०	३८२९७	३८२९७	३८३०३	३८३०९	३८३१५	३८३२१	३८३२६	३८३३२	३८३३८	३८३४४	९४
६७१	३९३९७	३९३९७	३९४०३	३९४०९	३९४१५	३९४२१	३९४२६	३९४३२	३९४३८	३९४४४	९५
६७२	४०४९७	४०४९७	४०५०३	४०५०९	४०५१५	४०५२१	४०५२६	४०५३२	४०५३८	४०५४४	९६
६७३	४१५९७	४१५९७	४१६०३	४१६०९	४१६१५	४१६२१	४१६२६	४१६३२	४१६३८	४१६४४	९७
६७४	४२६९७	४२६९७	४२७०३	४२७०९	४२७१५	४२७२१	४२७२६	४२७३२	४२७३८	४२७४४	९८
६७५	४३७९७	४३७९७	४३८०३	४३८०९	४३८१५	४३८२१	४३८२६	४३८३२	४३८३८	४३८४४	९९
६७६	४४८९७	४४८९७	४४९०३	४४९०९	४४९१५	४४९२१	४४९२६	४४९३२	४४९३८	४४९४४	१००
६७७	४५९९७	४५९९७	४६००३	४६००९	४६०१५	४६०२१	४६०२६	४६०३२	४६०३८	४६०४४	१०१
६७८	४७०९७	४७०९७	४७१०३	४७१०९	४७११५	४७१२१	४७१२६	४७१३२	४७१३८	४७१४४	१०२
६७९	४८१९७	४८१९७	४८२०३	४८२०९	४८२१५	४८२२१	४८२२६	४८२३२	४८२३८	४८२४४	१०३
६८०	४९२९७	४९२९७	४९३०३	४९३०९	४९३१५	४९३२१	४९३२६	४९३३२	४९३३८	४९३४४	१०४
६८१	५०३९७	५०३९७	५०४०३	५०४०९	५०४१५	५०४२१	५०४२६	५०४३२	५०४३८	५०४४४	१०५
६८२	५१४९७	५१४९७	५१५०३	५१५०९	५१५१५	५१५२१	५१५२६	५१५३२	५१५३८	५१५४४	१०६
६८३	५२५९७	५२५९७	५२६०३	५२६०९	५२६१५	५२६२१	५२६२६	५२६३२	५२६३८	५२६४४	१०७
६८४	५३६९७	५३६९७	५३७०३	५३७०९	५३७१५	५३७२१	५३७२६	५३७३२	५३७३८	५३७४४	१०८
६८५	५४७९७	५४७९७	५४८०३	५४८०९	५४८१५	५४८२१	५४८२६	५४८३२	५४८३८	५४८४४	१०९
६८६	५५८९७	५५८९७	५५९०३	५५९०९	५५९१५	५५९२१	५५९२६	५५९३२	५५९३८	५५९४४	११०
६८७	५६९९७	५६९९७	५७००३	५७००९	५७०१५	५७०२१	५७०२६	५७०३२	५७०३८	५७०४४	१११
६८८	५८०९७	५८०९७	५८१०३	५८१०९	५८११५	५८१२१	५८१२६	५८१३२	५८१३८	५८१४४	११२
६८९	५९१९७	५९१९७	५९२०३	५९२०९	५९२१५	५९२२१	५९२२६	५९२३२	५९२३८	५९२४४	११३
६९०	६०२९७	६०२९७	६०३०३	६०३०९	६०३१५	६०३२१	६०३२६	६०३३२	६०३३८	६०३४४	११४
६९१	६१३९७	६१३९७	६१४०३	६१४०९	६१४१५	६१४२१	६१४२६	६१४३२	६१४३८	६१४४४	११५
६९२	६२४९७	६२४९७	६२५०३	६२५०९	६२५१५	६२५२१	६२५२६	६२५३२	६२५३८	६२५४४	११६
६९३	६३५९७	६३५९७	६३६०३	६३६०९	६३६१५	६३६२१	६३६२६	६३६३२	६३६३८	६३६४४	११७
६९४	६४६९७	६४६९७	६४७०३	६४७०९	६४७१५	६४७२१	६४७२६	६४७३२	६४७३८	६४७४४	११८
६९५	६५७९७	६५७९७	६५८०३	६५८०९	६५८१५	६५८२१	६५८२६	६५८३२	६५८३८	६५८४४	११९
६९६	६६८९७	६६८९७	६६९०३	६६९०९	६६९१५	६६९२१	६६९२६	६६९३२	६६९३८	६६९४४	१२०
६९७	६७९९७	६७९९७	६८००३	६८००९	६८०१५	६८०२१	६८०२६	६८०३२	६८०३८	६८०४४	१२१
६९८	६९०९७	६९०९७	६९१०३	६९१०९	६९११५	६९१२१	६९१२६	६९१३२	६९१३८	६९१४४	१२२
६९९	७०१९७	७०१९७	७०२०३	७०२०९	७०२१५	७०२२१	७०२२६	७०२३२	७०२३८	७०२४४	१२३
७००	७१२९७	७१२९७	७१३०३	७१३०९	७१३१५	७१३२१	७१३२६	७१३३२	७१३३८	७१३४४	१२४
७०१	७२३९७	७२३९७	७२४०३	७२४०९	७२४१५	७२४२१	७२४२६	७२४३२	७२४३८	७२४४४	१२५
७०२	७३४९७	७३४९७	७३५०३	७३५०९	७३५१५	७३५२१	७३५२६	७३५३२	७३५३८	७३५४४	१२६
७०३	७४५९७	७४५९७	७४६०३	७४६०९	७४६१५	७४६२१	७४६२६	७४६३२	७४६३८	७४६४४	१२७
७०४	७५६९७	७५६९७	७५७०३	७५७०९	७५७१५	७५७२१	७५७२६	७५७३२	७५७३८	७५७४४	१२८
७०५	७६७९७	७६७९७	७६८०३	७६८०९	७६८१५	७६८२१	७६८२६	७६८३२	७६८३८	७६८४४	१२९
७०६	७७८९७	७७८९७	७७९०३	७७९०९	७७९१५	७७९२१	७७९२६	७७९३२	७७९३८	७७९४४	१३०
७०७	७८९९७	७८९९७	७९००३	७९००९	७९०१५	७९०२१	७९०२६	७९०३२	७९०३८	७९०४४	१३१
७०८	८००९७	८००९७	८०१०३	८०१०९	८०११५	८०१२१	८०१२६	८०१३२	८०१३८	८०१४४	१३२
७०९	८११९७	८११९७	८१२०३	८१२०९	८१२१५	८१२२१	८१२२६	८१२३२	८१२३८	८१२४४	१३३
७१०	८२२९७	८२२९७	८२३०३	८२३०९	८२३१५	८२३२१					

संख्या-१ लाग्रतमे

अनुवृत्ति, १००० — ३६.००

आवृत्ति ८८५०९८ — ८८०८१४

[illegible]

संख्या-ची लायतं मे

संख्या १६०० — ८३००

આચરણ ૨૦૦૭-૦૮ — ૨૦૧૦-૧૧

[illegible]

संख्या ८२०० — ८८००

लाग्रतम ९१३८१४ — ९४४४८१

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
८२०	९११८१४	९१३८६७	९१५९२०	९१७९७३	९१९०२६	९१९०७९	९१९१३२	९१९१८५	९१९२३८	९१९२९०	५३
८२१	१३१३	१३३६	१३५९	१३८२	१४०५	१४२८	१४५१	१४७३	१४९६	१५१९	५३
८२२	१५०२	१५२५	१५४८	१५७१	१५९४	१६१७	१६४०	१६६३	१६८६	१७०९	५३
८२३	१७००	१७२३	१७४६	१७६९	१७९२	१८१५	१८३८	१८६१	१८८४	१९०७	५३
८२४	१९००	१९२३	१९४६	१९६९	१९९२	२०१५	२०३८	२०६१	२०८४	२१०७	५३
८२५	२१००	२१२३	२१४६	२१६९	२१९२	२२१५	२२३८	२२६१	२२८४	२३०७	५३
८२६	२३००	२३२३	२३४६	२३६९	२३९२	२४१५	२४३८	२४६१	२४८४	२५०७	५३
८२७	२५००	२५२३	२५४६	२५६९	२५९२	२६१५	२६३८	२६६१	२६८४	२७०७	५३
८२८	२७००	२७२३	२७४६	२७६९	२७९२	२८१५	२८३८	२८६१	२८८४	२९०७	५३
८२९	२९००	२९२३	२९४६	२९६९	२९९२	३०१५	३०३८	३०६१	३०८४	३१०७	५३
८३०	३१००	३१२३	३१४६	३१६९	३१९२	३२१५	३२३८	३२६१	३२८४	३३०७	५३
८३१	३३००	३३२३	३३४६	३३६९	३३९२	३४१५	३४३८	३४६१	३४८४	३५०७	५३
८३२	३५००	३५२३	३५४६	३५६९	३५९२	३६१५	३६३८	३६६१	३६८४	३७०७	५३
८३३	३७००	३७२३	३७४६	३७६९	३७९२	३८१५	३८३८	३८६१	३८८४	३९०७	५३
८३४	३९००	३९२३	३९४६	३९६९	३९९२	४०१५	४०३८	४०६१	४०८४	४१०७	५३
८३५	४१००	४१२३	४१४६	४१६९	४१९२	४२१५	४२३८	४२६१	४२८४	४३०७	५३
८३६	४३००	४३२३	४३४६	४३६९	४३९२	४४१५	४४३८	४४६१	४४८४	४५०७	५३
८३७	४५००	४५२३	४५४६	४५६९	४५९२	४६१५	४६३८	४६६१	४६८४	४७०७	५३
८३८	४७००	४७२३	४७४६	४७६९	४७९२	४८१५	४८३८	४८६१	४८८४	४९०७	५३
८३९	४९००	४९२३	४९४६	४९६९	४९९२	५०१५	५०३८	५०६१	५०८४	५१०७	५३
८४०	५१००	५१२३	५१४६	५१६९	५१९२	५२१५	५२३८	५२६१	५२८४	५३०७	५३
८४१	५३००	५३२३	५३४६	५३६९	५३९२	५४१५	५४३८	५४६१	५४८४	५५०७	५३
८४२	५५००	५५२३	५५४६	५५६९	५५९२	५६१५	५६३८	५६६१	५६८४	५७०७	५३
८४३	५७००	५७२३	५७४६	५७६९	५७९२	५८१५	५८३८	५८६१	५८८४	५९०७	५३
८४४	५९००	५९२३	५९४६	५९६९	५९९२	६०१५	६०३८	६०६१	६०८४	६१०७	५३
८४५	६१००	६१२३	६१४६	६१६९	६१९						

संख्यांची लायतं मे

लाभतम १४४८३ — १७७१२८

[illegible]

संख्या-बी लाघुनमे

आयतं १०३१२८ — १०००००

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	वांकी
१४०	१०३२८	१०३२९	१०३३०	१०३३१	१०३३२	१०३३३	१०३३४	१०३३५	१०३३६	१०३३७	१४
१४१	३५१०	३५११	३५१२	३५१३	३५१४	३५१५	३५१६	३५१७	३५१८	३५१९	१५
१४२	३५१९	३५२०	३५२१	३५२२	३५२३	३५२४	३५२५	३५२६	३५२७	३५२८	१६
१४३	३५२९	३५३०	३५३१	३५३२	३५३३	३५३४	३५३५	३५३६	३५३७	३५३८	१७
१४४	३५३९	३५४०	३५४१	३५४२	३५४३	३५४४	३५४५	३५४६	३५४७	३५४८	१८
१४५	३५४९	३५५०	३५५१	३५५२	३५५३	३५५४	३५५५	३५५६	३५५७	३५५८	१९
१४६	३५५९	३५६०	३५६१	३५६२	३५६३	३५६४	३५६५	३५६६	३५६७	३५६८	२०
१४७	३५६९	३५७०	३५७१	३५७२	३५७३	३५७४	३५७५	३५७६	३५७७	३५७८	२१
१४८	३५७९	३५८०	३५८१	३५८२	३५८३	३५८४	३५८५	३५८६	३५८७	३५८८	२२
१४९	३५८९	३५९०	३५९१	३५९२	३५९३	३५९४	३५९५	३५९६	३५९७	३५९८	२३
१५०	३५९९	३६००	३६०१	३६०२	३६०३	३६०४	३६०५	३६०६	३६०७	३६०८	२४
१५१	३६०९	३६१०	३६११	३६१२	३६१३	३६१४	३६१५	३६१६	३६१७	३६१८	२५
१५२	३६१९	३६२०	३६२१	३६२२	३६२३	३६२४	३६२५	३६२६	३६२७	३६२८	२६
१५३	३६२९	३६३०	३६३१	३६३२	३६३३	३६३४	३६३५	३६३६	३६३७	३६३८	२७
१५४	३६३९	३६४०	३६४१	३६४२	३६४३	३६४४	३६४५	३६४६	३६४७	३६४८	२८
१५५	३६४९	३६५०	३६५१	३६५२	३६५३	३६५४	३६५५	३६५६	३६५७	३६५८	२९
१५६	३६५९	३६६०	३६६१	३६६२	३६६३	३६६४	३६६५	३६६६	३६६७	३६६८	३०
१५७	३६६९	३६७०	३६७१	३६७२	३६७३	३६७४	३६७५	३६७६	३६७७	३६७८	३१
१५८	३६७९	३६८०	३६८१	३६८२	३६८३	३६८४	३६८५	३६८६	३६८७	३६८८	३२
१५९	३६८९	३६९०	३६९१	३६९२	३६९३	३६९४	३६९५	३६९६	३६९७	३६९८	३३
१६०	३६९९	३७००	३७०१	३७०२	३७०३	३७०४	३७०५	३७०६	३७०७	३७०८	३४
१६१	३७०९	३७१०	३७११	३७१२	३७१३	३७१४	३७१५	३७१६	३७१७	३७१८	३५
१६२	३७१९	३७२०	३७२१	३७२२	३७२३	३७२४	३७२५	३७२६	३७२७	३७२८	३६
१६३	३७२९	३७३०	३७३१	३७३२	३७३३	३७३४	३७३५	३७३६	३७३७	३७३८	३७
१६४	३७३९	३७४०	३७४१	३७४२	३७४३	३७४४	३७४५	३७४६	३७४७	३७४८	३८
१६५	३७४९	३७५०	३७५१	३७५२	३७५३	३७५४	३७५५	३७५६	३७५७	३७५८	३९
१६६	३७५९	३७६०	३७६१	३७६२	३७६३	३७६४	३७६५	३७६६	३७६७	३७६८	४०
१६७	३७६९	३७७०	३७७१	३७७२	३७७३	३७७४	३७७५	३७७६	३७७७	३७७८	४१
१६८	३७७९	३७८०	३७८१	३७८२	३७८३	३७८४	३७८५	३७८६	३७८७	३७८८	४२
१६९	३७८९	३७९०	३७९१	३७९२	३७९३	३७९४	३७९५	३७९६	३७९७	३७९८	४३
१७०	३७९९	३८००	३८०१	३८०२	३८०३	३८०४	३८०५	३८०६	३८०७	३८०८	४४
१७१	३८०९	३८१०	३८११	३८१२	३८१३	३८१४	३८१५	३८१६	३८१७	३८१८	४५
१७२	३८१९	३८२०	३८२१	३८२२	३८२३	३८२४	३८२५	३८२६	३८२७	३८२८	४६
१७३	३८२९	३८३०	३८३१	३८३२	३८३३	३८३४	३८३५	३८३६	३८३७	३८३८	४७
१७४	३८३९	३८४०	३८४१	३८४२	३८४३	३८४४	३८४५	३८४६	३८४७	३८४८	४८
१७५	३८४९	३८५०	३८५१	३८५२	३८५३	३८५४	३८५५	३८५६	३८५७	३८५८	४९
१७६	३८५९	३८६०	३८६१	३८६२	३८६३	३८६४	३८६५	३८६६	३८६७	३८६८	५०
१७७	३८६९	३८७०	३८७१	३८७२	३८७३	३८७४	३८७५	३८७६	३८७७	३८७८	५१
१७८	३८७९	३८८०	३८८१	३८८२	३८८३	३८८४	३८८५	३८८६	३८८७	३८८८	५२
१७९	३८८९	३८९०	३८९१	३८९२	३८९३	३८९४	३८९५	३८९६	३८९७	३८९८	५३
१८०	३८९९	३९००	३९०१	३९०२	३९०३	३९०४	३९०५	३९०६	३९०७	३९०८	५४
१८१	३९०९	३९१०	३९११	३९१२	३९१३	३९१४	३९१५	३९१६	३९१७	३९१८	५५
१८२	३९१९	३९२०	३९२१	३९२२	३९२३	३९२४	३९२५	३९२६	३९२७	३९२८	५६
१८३	३९२९	३९३०	३९३१	३९३२	३९३३	३९३४	३९३५	३९३६	३९३७	३९३८	५७
१८४	३९३९	३९४०	३९४१	३९४२	३९४३	३९४४	३९४५	३९४६	३९४७	३९४८	५८
१८५	३९४९	३९५०	३९५१	३९५२	३९५३	३९५४	३९५५	३९५६	३९५७	३९५८	५९
१८६	३९५९	३९६०	३९६१	३९६२	३९६३	३९६४	३९६५	३९६६	३९६७	३९६८	६०
१८७	३९६९	३९७०	३९७१	३९७२	३९७३	३९७४	३९७५	३९७६	३९७७	३९७८	६१
१८८	३९७९	३९८०	३९८१	३९८२	३९८३	३९८४	३९८५	३९८६	३९८७	३९८८	६२
१८९	३९८९	३९९०	३९९१	३९९२	३९९३	३९९४	३९९५	३९९६	३९९७	३९९८	६३
१९०	३९९९	४०००	४००१	४००२	४००३	४००४	४००५	४००६	४००७	४००८	६४
१९१	४००९	४०१०	४०११	४०१२	४०१३	४०१४	४०१५	४०१६	४०१७	४०१८	६५
१९२	४०१९	४०२०	४०२१	४०२२	४०२३	४०२४	४०२५	४०२६	४०२७	४०२८	६६
१९३	४०२९	४०३०	४०३१	४०३२	४०३३	४०३४	४०३५	४०३६	४०३७	४०३८	६७
१९४	४०३९	४०४०	४०४१	४०४२	४०४३	४०४४	४०४५	४०४६	४०४७	४०४८	६८
१९५	४०४९	४०५०	४०५१	४०५२	४०५३	४०५४	४०५५	४०५६	४०५७	४०५८	६९
१९६	४०५९	४०६०	४०६१	४०६२	४०६३	४०६४	४०६५	४०६६	४०६७	४०६८	७०
१९७	४०६९	४०७०	४०७१	४०७२	४०७३	४०७४	४०७५	४०७६	४०७७	४०७८	७१
१९८	४०७९	४०८०	४०८१	४०८२	४०८३	४०८४	४०८५	४०८६	४०८७	४०८८	७२
१९९	४०८९	४०९०	४०९१	४०९२	४०९३	४०९४	४०९५	४०९६	४०९७	४०९८	७३
२००	४०९९	४१००	४१०१	४१०२	४१०३	४१०४	४१०५	४१०६	४१०७	४१०८	७४
२०१	४१०९	४११०	४१११	४११२	४११३	४११४	४११५	४११६	४११७	४११८	७५
२०२	४११९	४१२०	४१२१	४१२२	४१२३	४१२४	४१२५	४१२६	४१२७	४१२८	७६
२०३	४१२९	४१३०	४१३१	४१३२	४१३३	४१३४	४१३५	४१३६	४१३७	४१३८	७७
२०४	४१३९	४१४०	४१४१	४१४२	४१४३	४१४४	४१४५	४१४६	४१४७	४१४८	७८
२०५	४१४९	४१५०	४१५१	४१५२	४१५३	४१५४	४१५५	४१५६	४१५७	४१५८	७९
२०६	४१५९	४१६०	४१६१	४१६२	४१६३	४१६४	४१६५	४१६६	४१६७	४१६८	८०
२०७	४१६९	४१७०	४१७१	४१७२	४१७३	४१७४	४१७५	४१७६	४१७७	४१७८	८१
२०८	४१७९	४१८०	४१८१	४१८२	४१८३	४१८४	४१८५	४१८६	४१८७	४१८८	८२
२०९	४१८९	४१९०	४१९१	४१९२	४१९३	४१९४	४१९५	४१९६	४१९७	४१९८	८३
२१०	४१९९	४२००	४२०१	४२०२	४२०३	४२०४	४२०५	४२०६	४२०७	४२०८	८४
२११	४२०९	४२१०	४२११	४२१२	४२१३	४२१४	४२१५	४२१६	४२१७	४२१८	८५
२१२	४२१९	४२२०	४२२१	४२२२	४२२३	४२२४	४२२५	४२२६	४२२७	४२२८	८६
२१३	४२२९	४२३०	४२३१	४२३२	४२३३	४२३४	४२३५	४२३६	४२३७	४२३८	८७
२१४	४२३९	४२४०	४२४१	४२४२	४२४३	४२४४	४२४५	४२४६	४२४७	४२४८	८८
२१५	४२४९	४२५०	४२५१	४२५२	४२५३	४२५४	४२५५	४२५६	४२५७	४२५८	८९
२१६	४२५९	४२६०	४२६१	४२६२	४२६३	४२६४	४२६५	४२६६	४२६७	४२६८	९०
२१७	४२६९	४२७०	४२७१	४२७२	४२७३	४२७४	४२७५	४२७६	४२७७	४२७८	९१
२१८	४२७९	४२८०	४२८१	४२८२	४२८३	४२८४	४२८५	४२८६	४२८७	४२८८	९२
२१९	४२८९	४२९०	४२९१	४२९२	४२९३	४२९४	४२९५				

[illegible]

काश्रनंमिकभुज्यास्यशंरपडुत्यादि

३३३३

[illegible]

काय तंभिक भुज्या स्वर्गरेष इत्यादि

५ अश

[illegible]

आयवधिक नुनन्या स्पडरिप इत्यादि

अंश					अंश				
क	नुनन्या	को नुनन्या	स्पडरिप	को स्पडरिप	नुनन्या	को नुनन्या	स्पडरिप	को स्पडरिप	क
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
को नुनन्या	नुनन्या	को स्पडरिप	स्पडरिप	को नुनन्या	नुनन्या	को स्पडरिप	स्पडरिप	को नुनन्या	नुनन्या

[illegible]

आश्विनिक, अजय्यास्पर्श, धनुष्यादि

१३ अंश

[illegible]

१० अंश

आयतं निब. नुत ज्या म्परांघ इत्यादि

लाघवनिमित्तक, भुजस्थ, ग्यङ्गपद इत्यादि

काश्चित्मिकभुलत्वात्सर्गोपदृग्वादि

[illegible]

आम्रतंमिक बुजत्या म्परीरघइत्यादि

[illegible]

आश्रितामकभुज्यास्वशरेषत्यादि

૨૫ ખંડ

६.४. प्रस्ताव

आयत्तमिक, भुज्या स्यदीरेषु इत्यादि

२७ अंग

[illegible]

२०. अंश

10.375

कोष्ठक २									
कायान्तिक भुज्या स्पर्शरेषादि									
३० अंश					३१ अंश				
क	भुज्या	कोभुज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	भुज्या	कोभुज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	क
०	०	१००	०	०	०	१००	०	०	०
१	१	९९	१	१	१	९९	१	१	१
२	२	९८	२	२	२	९८	२	२	२
३	३	९७	३	३	३	९७	३	३	३
४	४	९६	४	४	४	९६	४	४	४
५	५	९५	५	५	५	९५	५	५	५
६	६	९४	६	६	६	९४	६	६	६
७	७	९३	७	७	७	९३	७	७	७
८	८	९२	८	८	८	९२	८	८	८
९	९	९१	९	९	९	९१	९	९	९
१०	१०	९०	१०	१०	१०	९०	१०	१०	१०
११	११	८९	११	११	११	८९	११	११	११
१२	१२	८८	१२	१२	१२	८८	१२	१२	१२
१३	१३	८७	१३	१३	१३	८७	१३	१३	१३
१४	१४	८६	१४	१४	१४	८६	१४	१४	१४
१५	१५	८५	१५	१५	१५	८५	१५	१५	१५
१६	१६	८४	१६	१६	१६	८४	१६	१६	१६
१७	१७	८३	१७	१७	१७	८३	१७	१७	१७
१८	१८	८२	१८	१८	१८	८२	१८	१८	१८
१९	१९	८१	१९	१९	१९	८१	१९	१९	१९
२०	२०	८०	२०	२०	२०	८०	२०	२०	२०
२१	२१	७९	२१	२१	२१	७९	२१	२१	२१
२२	२२	७८	२२	२२	२२	७८	२२	२२	२२
२३	२३	७७	२३	२३	२३	७७	२३	२३	२३
२४	२४	७६	२४	२४	२४	७६	२४	२४	२४
२५	२५	७५	२५	२५	२५	७५	२५	२५	२५
२६	२६	७४	२६	२६	२६	७४	२६	२६	२६
२७	२७	७३	२७	२७	२७	७३	२७	२७	२७
२८	२८	७२	२८	२८	२८	७२	२८	२८	२८
२९	२९	७१	२९	२९	२९	७१	२९	२९	२९
३०	३०	७०	३०	३०	३०	७०	३०	३०	३०
३१	३१	६९	३१	३१	३१	६९	३१	३१	३१
३२	३२	६८	३२	३२	३२	६८	३२	३२	३२
३३	३३	६७	३३	३३	३३	६७	३३	३३	३३
३४	३४	६६	३४	३४	३४	६६	३४	३४	३४
३५	३५	६५	३५	३५	३५	६५	३५	३५	३५
३६	३६	६४	३६	३६	३६	६४	३६	३६	३६
३७	३७	६३	३७	३७	३७	६३	३७	३७	३७
३८	३८	६२	३८	३८	३८	६२	३८	३८	३८
३९	३९	६१	३९	३९	३९	६१	३९	३९	३९
४०	४०	६०	४०	४०	४०	६०	४०	४०	४०
४१	४१	५९	४१	४१	४१	५९	४१	४१	४१
४२	४२	५८	४२	४२	४२	५८	४२	४२	४२
४३	४३	५७	४३	४३	४३	५७	४३	४३	४३
४४	४४	५६	४४	४४	४४	५६	४४	४४	४४
४५	४५	५५	४५	४५	४५	५५	४५	४५	४५
४६	४६	५४	४६	४६	४६	५४	४६	४६	४६
४७	४७	५३	४७	४७	४७	५३	४७	४७	४७
४८	४८	५२	४८	४८	४८	५२	४८	४८	४८
४९	४९	५१	४९	४९	४९	५१	४९	४९	४९
५०	५०	५०	५०	५०	५०	५०	५०	५०	५०
५१	५१	४९	५१	५१	५१	४९	५१	५१	५१
५२	५२	४८	५२	५२	५२	४८	५२	५२	५२
५३	५३	४७	५३	५३	५३	४७	५३	५३	५३
५४	५४	४६	५४	५४	५४	४६	५४	५४	५४
५५	५५	४५	५५	५५	५५	४५	५५	५५	५५
५६	५६	४४	५६	५६	५६	४४	५६	५६	५६
५७	५७	४३	५७	५७	५७	४३	५७	५७	५७
५८	५८	४२	५८	५८	५८	४२	५८	५८	५८
५९	५९	४१	५९	५९	५९	४१	५९	५९	५९
६०	६०	४०	६०	६०	६०	४०	६०	६०	६०
क	कोभुज्या	भुज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	कोभुज्या	भुज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	क
३० अंश					३१ अंश				

लाभानामिक भुज्या त्पगोर घड त्यादि

33 अंश

[illegible]

[illegible]

कायनैमिक, भुज्या ग्यङ्गपञ्चद

३५ अंश

[illegible]

૫૨ અંક

लाघनं चिक भुज्या ग्यर्गरे पइत्यादि

[illegible]

लाघतमिक भुजत्या स्पर्शरं मरुत्वादि

2528

૪૮ અંગ

अथ तन्मिक भुज्या स्वर्गरेष इत्यादि

[illegible]

४४ अंश

[illegible]

स्वाभाविक मृजया

[illegible]

स्वाभाविक भुज्या

स्वाभाविक भुज्या

[illegible]

न्या भवितुं न शक्या

[illegible]

निसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुज्या

१५ अंश		१६ अंश		१७ अंश		१८ अंश		१९ अंश			
क	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	
०	२५८८३	१६५१३	२५५६४	१६१२६	२५२७७	१५६३०	१५०००	१५१०६	१४५५३	१४०५२	६०
१	२५९१०	१६५८५	२५५९२	१६१९८	२५३०५	१५६३२	१५००१	१५१०८	१४५५४	१४०५३	५९
२	२५९३८	१६५५८	२५६२०	१६१७०	२५३३३	१५६३३	१५००२	१५१०९	१४५५५	१४०५४	५८
३	२५९६६	१६५३०	२५६४८	१६१४२	२५३६१	१५६३५	१५००३	१५११०	१४५५६	१४०५५	५७
४	२५९९४	१६५०२	२५६७६	१६११४	२५३८९	१५६३६	१५००४	१५१११	१४५५७	१४०५६	५६
५	२६०२२	१६४७५	२५७०४	१६०८६	२५४१७	१५६३७	१५००५	१५११२	१४५५८	१४०५७	५५
६	२६०५०	१६४४७	२५७३२	१६०५८	२५४४५	१५६३८	१५००६	१५११३	१४५५९	१४०५८	५४
७	२६०७८	१६४२०	२५७६०	१६०३०	२५४७३	१५६३९	१५००७	१५११४	१४५६०	१४०५९	५३
८	२६१०६	१६४०३	२५७८८	१६००२	२५५०१	१५६४०	१५००८	१५११५	१४५६१	१४०६०	५२
९	२६१३४	१६३७५	२५८१६	१५९७४	२५५२९	१५६४१	१५००९	१५११६	१४५६२	१४०६१	५१
१०	२६१६२	१६३४७	२५८४४	१५९४६	२५५५७	१५६४२	१५०१०	१५११७	१४५६३	१४०६२	५०
११	२६१९०	१६३२०	२५८७२	१५९१८	२५५८५	१५६४३	१५०११	१५११८	१४५६४	१४०६३	४९
१२	२६२१८	१६२९२	२५९००	१५८९०	२५६१३	१५६४४	१५०१२	१५११९	१४५६५	१४०६४	४८
१३	२६२४६	१६२६५	२५९२८	१५८६२	२५६४१	१५६४५	१५०१३	१५१२०	१४५६६	१४०६५	४७
१४	२६२७४	१६२३७	२५९५६	१५८३४	२५६६९	१५६४६	१५०१४	१५१२१	१४५६७	१४०६६	४६
१५	२६३०२	१६२१०	२५९८४	१५८०६	२५६९७	१५६४७	१५०१५	१५१२२	१४५६८	१४०६७	४५
१६	२६३३०	१६१८२	२६०१२	१५७७८	२५७२५	१५६४८	१५०१६	१५१२३	१४५६९	१४०६८	४४
१७	२६३५८	१६१५५	२६०४०	१५७५०	२५७५३	१५६४९	१५०१७	१५१२४	१४५७०	१४०६९	४३
१८	२६३८६	१६१२७	२६०६८	१५७२२	२५७८१	१५६५०	१५०१८	१५१२५	१४५७१	१४०७०	४२
१९	२६४१४	१६१००	२६०९६	१५६९४	२५८०९	१५६५१	१५०१९	१५१२६	१४५७२	१४०७१	४१
२०	२६४४२	१६०७२	२६१२४	१५६६६	२५८३७	१५६५२	१५०२०	१५१२७	१४५७३	१४०७२	४०
२१	२६४७०	१६०४५	२६१५२	१५६३८	२५८६५	१५६५३	१५०२१	१५१२८	१४५७४	१४०७३	३९
२२	२६४९८	१६०१७	२६१८०	१५६१०	२५८९३	१५६५४	१५०२२	१५१२९	१४५७५	१४०७४	३८
२३	२६५२६	१५९९०	२६२०८	१५५८२	२५९२१	१५६५५	१५०२३	१५१३०	१४५७६	१४०७५	३७
२४	२६५५४	१५९६२	२६२३६	१५५५४	२५९४९	१५६५६	१५०२४	१५१३१	१४५७७	१४०७६	३६
२५	२६५८२	१५९३५	२६२६४	१५५२६	२५९७७	१५६५७	१५०२५	१५१३२	१४५७८	१४०७७	३५
२६	२६६१०	१५९०७	२६२९२	१५५००	२६००५	१५६५८	१५०२६	१५१३३	१४५७९	१४०७८	३४
२७	२६६३८	१५८८०	२६३२०	१५४७२	२६०३३	१५६५९	१५०२७	१५१३४	१४५८०	१४०७९	३३
२८	२६६६६	१५८५२	२६३४८	१५४४४	२६०६१	१५६६०	१५०२८	१५१३५	१४५८१	१४०८०	३२
२९	२६६९४	१५८२५	२६३७६	१५४१६	२६०८९	१५६६१	१५०२९	१५१३६	१४५८२	१४०८१	३१
३०	२६७२२	१५८००	२६४०४	१५३८८	२६११७	१५६६२	१५०३०	१५१३७	१४५८३	१४०८२	३०
३१	२६७५०	१५७७२	२६४३२	१५३६०	२६१४५	१५६६३	१५०३१	१५१३८	१४५८४	१४०८३	२९
३२	२६७७८	१५७४५	२६४६०	१५३३२	२६१७३	१५६६४	१५०३२	१५१३९	१४५८५	१४०८४	२८
३३	२६८०६	१५७१७	२६४८८	१५३०४	२६२०१	१५६६५	१५०३३	१५१४०	१४५८६	१४०८५	२७
३४	२६८३४	१५६९०	२६५१६	१५२७६	२६२२९	१५६६६	१५०३४	१५१४१	१४५८७	१४०८६	२६
३५	२६८६२	१५६६२	२६५४४	१५२४८	२६२५७	१५६६७	१५०३५	१५१४२	१४५८८	१४०८७	२५
३६	२६८९०	१५६३५	२६५७२	१५२२०	२६२८५	१५६६८	१५०३६	१५१४३	१४५८९	१४०८८	२४
३७	२६९१८	१५६०७	२६६००	१५१९२	२६३१३	१५६६९	१५०३७	१५१४४	१४५९०	१४०८९	२३
३८	२६९४६	१५५८०	२६६२८	१५१६४	२६३४१	१५६७०	१५०३८	१५१४५	१४५९१	१४०९०	२२
३९	२६९७४	१५५५२	२६६५६	१५१३६	२६३६९	१५६७१	१५०३९	१५१४६	१४५९२	१४०९१	२१
४०	२७००२	१५५२५	२६६८४	१५१०८	२६३९७	१५६७२	१५०४०	१५१४७	१४५९३	१४०९२	२०
४१	२७०३०	१५५००	२६७१२	१५०८०	२६४२५	१५६७३	१५०४१	१५१४८	१४५९४	१४०९३	१९
४२	२७०५८	१५४७२	२६७४०	१५०५२	२६४५३	१५६७४	१५०४२	१५१४९	१४५९५	१४०९४	१८
४३	२७०८६	१५४४५	२६७६८	१५०२४	२६४८१	१५६७५	१५०४३	१५१५०	१४५९६	१४०९५	१७
४४	२७११४	१५४१७	२६७९६	१५०००	२६५०९	१५६७६	१५०४४	१५१५१	१४५९७	१४०९६	१६
४५	२७१४२	१५३९०	२६८२४	१४९७२	२६५३७	१५६७७	१५०४५	१५१५२	१४५९८	१४०९७	१५
४६	२७१७०	१५३६२	२६८५२	१४९४४	२६५६५	१५६७८	१५०४६	१५१५३	१४५९९	१४०९८	१४
४७	२७१९८	१५३३५	२६८८०	१४९१६	२६५९३	१५६७९	१५०४७	१५१५४	१४६००	१४०९९	१३
४८	२७२२६	१५३०७	२६९०८	१४८८८	२६६२१	१५६८०	१५०४८	१५१५५	१४६०१	१४१००	१२
४९	२७२५४	१५२८०	२६९३६	१४८६०	२६६४९	१५६८१	१५०४९	१५१५६	१४६०२	१४१०१	११
५०	२७२८२	१५२५२	२६९६४	१४८३२	२६६७७	१५६८२	१५०५०	१५१५७	१४६०३	१४१०२	१०
५१	२७३१०	१५२२५	२६९९२	१४८०४	२६७०५	१५६८३	१५०५१	१५१५८	१४६०४	१४१०३	९
५२	२७३३८	१५२००	२७०२०	१४७७६	२६७३३	१५६८४	१५०५२	१५१५९	१४६०५	१४१०४	८
५३	२७३६६	१५१७२	२७०४८	१४७४८	२६७६१	१५६८५	१५०५३	१५१६०	१४६०६	१४१०५	७
५४	२७३९४	१५१४५	२७०७६	१४७२०	२६७८९	१५६८६	१५०५४	१५१६१	१४६०७	१४१०६	६
५५	२७४२२	१५११७	२७१०४	१४६९२	२६८१७	१५६८७	१५०५५	१५१६२	१४६०८	१४१०७	५
५६	२७४५०	१५०९०	२७१३२	१४६६४	२६८४५	१५६८८	१५०५६	१५१६३	१४६०९	१४१०८	४
५७	२७४७८	१५०६२	२७१६०	१४६३६	२६८७३	१५६८९	१५०५७	१५१६४	१४६१०	१४१०९	३
५८	२७५०६	१५०३५	२७१८८	१४६०८	२६९०१	१५६९०	१५०५८	१५१६५	१४६११	१४११०	२
५९	२७५३४	१५००७	२७२१६	१४५८०	२६९२९	१५६९१	१५०५९	१५१६६	१४६१२	१४१११	१
६०	२७५६२	१४९८०	२७२४४	१४५५२	२६९५७	१५६९२	१५०६०	१५१६७	१४६१३	१४११२	०
स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	क.
१५ अंश		१६ अंश		१७ अंश		१८ अंश		१९ अंश			

महाभाषिक भुजङ्गा

२० अंश		२१ अंश		२२ अंश		२३ अंश		२४ अंश			
क.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	
०	३४३००	१३१६१	३५६३७	१३३५८	३७४६१	१३७०३	३९७७३	१३९५०	४०६३४	०१३०५	६०
१	३४३२५	१३१६५	३५६६३	१३३६२	३७४८६	१३७०७	३९७७७	१३९५४	४०६३८	०१३०९	५९
२	३४३५०	१३१६९	३५६८९	१३३६६	३७५११	१३७११	३९७८३	१३९५८	४०६४२	०१३१३	५८
३	३४३७५	१३१७३	३५७१५	१३३७०	३७५३६	१३७१५	३९७८९	१३९६२	४०६४६	०१३१७	५७
४	३४३९९	१३१७७	३५७४१	१३३७४	३७५६१	१३७१९	३९७९५	१३९६६	४०६५०	०१३२१	५६
५	३४४२४	१३१८१	३५७६७	१३३७८	३७५८६	१३७२३	३९८०१	१३९७०	४०६५४	०१३२५	५५
६	३४४४९	१३१८५	३५७९३	१३३८२	३७६११	१३७२७	३९८०७	१३९७४	४०६५८	०१३२९	५४
७	३४४७४	१३१८९	३५८१९	१३३८६	३७६३६	१३७३१	३९८१३	१३९७८	४०६६२	०१३३३	५३
८	३४४९९	१३१९३	३५८४५	१३३९०	३७६६१	१३७३५	३९८१९	१३९८२	४०६६६	०१३३७	५२
९	३४५२४	१३१९७	३५८७१	१३३९४	३७६८६	१३७३९	३९८२५	१३९८६	४०६७०	०१३४१	५१
१०	३४५४९	१३२०१	३५९००	१३४००	३७७१३	१३७४३	३९८३१	१३९९०	४०६७४	०१३४५	५०
११	३४५७४	१३२०५	३५९२६	१३४०४	३७७३८	१३७४७	३९८३७	१३९९४	४०६७८	०१३४९	४९
१२	३४५९९	१३२०९	३५९५२	१३४०८	३७७६३	१३७५१	३९८४३	१३९९८	४०६८२	०१३५३	४८
१३	३४६२४	१३२१३	३५९७८	१३४१२	३७७८८	१३७५५	३९८४९	१३९९९	४०६८६	०१३५७	४७
१४	३४६४९	१३२१७	३५९९९	१३४१६	३७८१३	१३७५९	३९८५५	१४०००	४०६९०	०१३६०	४६
१५	३४६७४	१३२२१	३६०२५	१३४२०	३७८३८	१३७६३	३९८६१	१४००४	४०६९४	०१३६४	४५
१६	३४६९९	१३२२५	३६०५१	१३४२४	३७८६३	१३७६७	३९८६७	१४००८	४०६९८	०१३६८	४४
१७	३४७२४	१३२२९	३६०७७	१३४२८	३७८८८	१३७७१	३९८७३	१४०१२	४०७०२	०१३७२	४३
१८	३४७४९	१३२३३	३६१०३	१३४३२	३७९१३	१३७७५	३९८७९	१४०१६	४०७०६	०१३७६	४२
१९	३४७७४	१३२३७	३६१२९	१३४३६	३७९३८	१३७७९	३९८८५	१४०२०	४०७१०	०१३८०	४१
२०	३४७९९	१३२४१	३६१५५	१३४४०	३७९६३	१३७८३	३९८९१	१४०२४	४०७१४	०१३८४	४०
२१	३४८२४	१३२४५	३६१८१	१३४४४	३७९८८	१३७८७	३९८९७	१४०२८	४०७१८	०१३८८	३९
२२	३४८४९	१३२४९	३६२०७	१३४४८	३८०१३	१३७९१	३९९०३	१४०३२	४०७२२	०१३९२	३८
२३	३४८७४	१३२५३	३६२३३	१३४५२	३८०३८	१३७९५	३९९०९	१४०३६	४०७२६	०१३९६	३७
२४	३४८९९	१३२५७	३६२५९	१३४५६	३८०६३	१३७९९	३९९१५	१४०४०	४०७३०	०१४००	३६
२५	३४९२४	१३२६१	३६२८५	१३४६०	३८०८८	१३८०३	३९९२१	१४०४४	४०७३४	०१४०४	३५
२६	३४९४९	१३२६५	३६३११	१३४६४	३८११३	१३८०७	३९९२७	१४०४८	४०७३८	०१४०८	३४
२७	३४९७४	१३२६९	३६३३७	१३४६८	३८१३८	१३८११	३९९३३	१४०५२	४०७४२	०१४१२	३३
२८	३४९९९	१३२७३	३६३६३	१३४७२	३८१६३	१३८१५	३९९३९	१४०५६	४०७४६	०१४१६	३२
२९	३५०२४	१३२७७	३६३८९	१३४७६	३८१८८	१३८१९	३९९४५	१४०६०	४०७५०	०१४२०	३१
३०	३५०४९	१३२८१	३६४१५	१३४८०	३८२१३	१३८२३	३९९५१	१४०६४	४०७५४	०१४२४	३०
३१	३५०७४	१३२८५	३६४४१	१३४८४	३८२३८	१३८२७	३९९५७	१४०६८	४०७५८	०१४२८	२९
३२	३५०९९	१३२८९	३६४६७	१३४८८	३८२६३	१३८३१	३९९६३	१४०७२	४०७६२	०१४३२	२८
३३	३५१२४	१३२९३	३६४९३	१३४९२	३८२८८	१३८३५	३९९६९	१४०७६	४०७६६	०१४३६	२७
३४	३५१४९	१३२९७	३६५१९	१३४९६	३८३१३	१३८३९	३९९७५	१४०८०	४०७७०	०१४४०	२६
३५	३५१७४	१३३०१	३६५४५	१३४९९	३८३३८	१३८४३	३९९८१	१४०८४	४०७७४	०१४४४	२५
३६	३५१९९	१३३०५	३६५७१	१३५०४	३८३६३	१३८४७	३९९८७	१४०८८	४०७७८	०१४४८	२४
३७	३५२२४	१३३०९	३६५९७	१३५०८	३८३८८	१३८५१	३९९९३	१४०९२	४०७८२	०१४५२	२३
३८	३५२४९	१३३१३	३६६२३	१३५१२	३८४१३	१३८५५	४००००	१४०९६	४०७८६	०१४५६	२२
३९	३५२७४	१३३१७	३६६४९	१३५१६	३८४३८	१३८५९	४०००६	१४१००	४०७९०	०१४६०	२१
४०	३५२९९	१३३२१	३६६७५	१३५२०	३८४६३	१३८६३	४००१२	१४१०४	४०७९४	०१४६४	२०
४१	३५३२४	१३३२५	३६६९९	१३५२४	३८४८८	१३८६७	४००१८	१४१०८	४०७९८	०१४६८	१९
४२	३५३४९	१३३२९	३६७२५	१३५२८	३८५१३	१३८७१	४००२४	१४११२	४०८०२	०१४७२	१८
४३	३५३७४	१३३३३	३६७५१	१३५३२	३८५३८	१३८७५	४००३०	१४११६	४०८०६	०१४७६	१७
४४	३५३९९	१३३३७	३६७७७	१३५३६	३८५६३	१३८७९	४००३६	१४१२०	४०८१०	०१४८०	१६
४५	३५४२४	१३३४१	३६८०३	१३५४०	३८५८८	१३८८३	४००४२	१४१२४	४०८१४	०१४८४	१५
४६	३५४४९	१३३४५	३६८२९	१३५४४	३८६१३	१३८८७	४००४८	१४१२८	४०८१८	०१४८८	१४
४७	३५४७४	१३३४९	३६८५५	१३५४८	३८६३८	१३८९१	४००५४	१४१३२	४०८२२	०१४९२	१३
४८	३५४९९	१३३५३	३६८८१	१३५५२	३८६६३	१३८९५	४००६०	१४१३६	४०८२६	०१४९६	१२
४९	३५५२४	१३३५७	३६९०७	१३५५६	३८६८८	१३८९९	४००६६	१४१४०	४०८३०	०१४९९	११
५०	३५५४९	१३३६१	३६९३३	१३५६०	३८७१३	१३९०३	४००७२	१४१४४	४०८३४	०१५००	१०
५१	३५५७४	१३३६५	३६९५९	१३५६४	३८७३८	१३९०७	४००७८	१४१४८	४०८३८	०१५०४	९
५२	३५५९९	१३३६९	३६९८५	१३५६८	३८७६३	१३९११	४००८४	१४१५२	४०८४२	०१५०८	८
५३	३५६२४	१३३७३	३६९९९	१३५७२	३८७८८	१३९१५	४००९०	१४१५६	४०८४६	०१५१२	७
५४	३५६४९	१३३७७	३७०२५	१३५७६	३८८१३	१३९१९	४००९६	१४१६०	४०८५०	०१५१६	६
५५	३५६७४	१३३८१	३७०५१	१३५८०	३८८३८	१३९२३	४०१०२	१४१६४	४०८५४	०१५२०	५
५६	३५६९९	१३३८५	३७०७७	१३५८४	३८८६३	१३९२७	४०१०८	१४१६८	४०८५८	०१५२४	४
५७	३५७२४	१३३८९	३७१०३	१३५८८	३८८८८	१३९३१	४०११४	१४१७२	४०८६२	०१५२८	३
५८	३५७४९	१३३९३	३७१२९	१३५९२	३८९१३	१३९३५	४०१२०	१४१७६	४०८६६	०१५३२	२
५९	३५७७४	१३३९७	३७१५५	१३५९६	३८९३८	१३९३९	४०१२६	१४१८०	४०८७०	०१५३६	१
६०	३५७९९	१३४०१	३७१८१	१३६००	३८९६३	१३९४३	४०१३२	१४१८४	४०८७४	०१५४०	०
स्वा.की.भु.		स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	क.
६० अंश		६० अंश		६० अंश		६० अंश		६० अंश			

स्वाभाविक भुनज्या

[illegible]

तिसरे कोष्टक
स्वाभाविक भुज-ज्या

३० अंश		३१ अंश		३२ अंश		३३ अंश		३४ अंश		३५ अंश		
क.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.	स्वा.भु.	स्वा.की.भु.
०	५००००	८६६०३	५१५५४	८५६१०	५३६२३	८४८०५	५४४६४	८३८६०	५५६१९	८२८०४	५६८०४	८१८०४
१	५०००५	८६६०८	५१५५९	८५६१५	५३६२८	८४८१०	५४४६९	८३८६५	५५६२४	८२८०९	५६८०९	८१८०९
२	५००१०	८६६०९	५१५६४	८५६२०	५३६३३	८४८१५	५४४७४	८३८७०	५५६२९	८२८१४	५६८१४	८१८१४
३	५००१५	८६६१०	५१५६९	८५६२५	५३६३८	८४८२०	५४४७९	८३८७५	५५६३४	८२८१९	५६८१९	८१८१९
४	५००२०	८६६११	५१५७०	८५६३०	५३६४३	८४८२५	५४४८०	८३८८०	५५६३९	८२८२४	५६८२४	८१८२४
५	५००२५	८६६१२	५१५७५	८५६३५	५३६४८	८४८३०	५४४८५	८३८८५	५५६४०	८२८२९	५६८२९	८१८२९
६	५००३०	८६६१३	५१५७६	८५६४०	५३६४९	८४८३५	५४४८६	८३८९०	५५६४१	८२८३४	५६८३४	८१८३४
७	५००३५	८६६१४	५१५७७	८५६४५	५३६५०	८४८४०	५४४८७	८३८९५	५५६४२	८२८३९	५६८३९	८१८३९
८	५००४०	८६६१५	५१५७८	८५६४६	५३६५१	८४८४५	५४४८८	८३९००	५५६४३	८२८४०	५६८४०	८१८४०
९	५००४५	८६६१६	५१५७९	८५६४७	५३६५२	८४८५०	५४४८९	८३९०५	५५६४४	८२८४५	५६८४५	८१८४५
१०	५००५०	८६६१७	५१५८०	८५६४८	५३६५३	८४८५५	५४४९०	८३९१०	५५६४५	८२८५०	५६८४६	८१८५०
११	५००५५	८६६१८	५१५८१	८५६४९	५३६५४	८४८६०	५४४९१	८३९१५	५५६४६	८२८५५	५६८४७	८१८५५
१२	५००६०	८६६१९	५१५८२	८५६५०	५३६५५	८४८६५	५४४९२	८३९२०	५५६४७	८२८६०	५६८४८	८१८६०
१३	५००६५	८६६२०	५१५८३	८५६५१	५३६५६	८४८७०	५४४९३	८३९२५	५५६४८	८२८६५	५६८४९	८१८६५
१४	५००७०	८६६२१	५१५८४	८५६५२	५३६५७	८४८७५	५४४९४	८३९३०	५५६४९	८२८७०	५६८५०	८१८७०
१५	५००७५	८६६२२	५१५८५	८५६५३	५३६५८	८४८८०	५४४९५	८३९३५	५५६५०	८२८७५	५६८५१	८१८७५
१६	५००८०	८६६२३	५१५८६	८५६५४	५३६५९	८४८८५	५४४९६	८३९४०	५५६५१	८२८८०	५६८५२	८१८८०
१७	५००८५	८६६२४	५१५८७	८५६५५	५३६६०	८४८९०	५४४९७	८३९४५	५५६५२	८२८८५	५६८५३	८१८८५
१८	५००९०	८६६२५	५१५८८	८५६५६	५३६६१	८४८९५	५४४९८	८३९५०	५५६५३	८२८९०	५६८५४	८१८९०
१९	५००९५	८६६२६	५१५८९	८५६५७	५३६६२	८४९००	५४४९९	८३९५५	५५६५४	८२		

मिसरे की एक
स्वाभाविक भुज्या

क.	३५ अंश		३६ अंश		३७ अंश		३८ अंश		३९ अंश		क.
	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	
०	५३३५८	८११५	५८३३१	८०२०२	६०१८२	७८८६५	६१५६६	७८८०१	६२२३३	७७७५५	६०
१	५३३८१	८१८२९	५८८०३	८०८८५	६०२०५	७८८५६	६१५८९	७८८०३	६२२५५	७७७९६	५९
२	५३४०५	८१८८२	५८८२६	८०८६३	६०२२८	७८८२९	६१६१२	७८८०५	६२२७७	७७८३८	५८
३	५३४२९	८१९३५	५८८४९	८०८४०	६०२५१	७८८०१	६१६३५	७८८०७	६२२९९	७७८८०	५७
४	५३४५३	८१९८८	५८८७२	८०८१७	६०२७४	७८७७४	६१६५८	७८८०९	६२३२२	७७९२१	५६
५	५३४७७	८२०४१	५८८९५	८०७९४	६०२९७	७८७५१	६१६८१	७८८११	६२३४५	७७९६३	५५
६	५३५०१	८२०९४	५८९१८	८०७७१	६०३२०	७८७२८	६१७०४	७८८१३	६२३६८	७७९८५	५४
७	५३५२५	८२१४७	५८९४१	८०७४८	६०३४३	७८७०५	६१७२७	७८८१५	६२३९१	७८०२७	५३
८	५३५४९	८२१९९	५८९६४	८०७२५	६०३६६	७८६८२	६१७५०	७८८१७	६२४१४	७८०६९	५२
९	५३५७३	८२२५२	५८९८७	८०७०२	६०३८९	७८६५९	६१७७३	७८८१९	६२४३७	७८१११	५१
१०	५३५९६	८२३०५	५९०१०	८०६७९	६०४१२	७८६३६	६१७९६	७८८२१	६२४६०	७८१५३	५०
११	५३६२०	८२३५८	५९०३३	८०६५६	६०४३५	७८६१३	६१८१९	७८८२३	६२४८३	७८१९५	४९
१२	५३६४३	८२४११	५९०५६	८०६३३	६०४५८	७८५९०	६१८४२	७८८२५	६२५०६	७८२३७	४८
१३	५३६६७	८२४६४	५९०७९	८०६१०	६०४८१	७८५६७	६१८६५	७८८२७	६२५२९	७८२७९	४७
१४	५३६९०	८२५१७	५९१०२	८०५८७	६०५०४	७८५४४	६१८८८	७८८२९	६२५५२	७८३२१	४६
१५	५३७१४	८२५७०	५९१२५	८०५६४	६०५२७	७८५२१	६१९११	७८८३१	६२५७५	७८३६३	४५
१६	५३७३७	८२६२३	५९१४८	८०५४१	६०५५०	७८४९८	६१९३४	७८८३३	६२५९८	७८४०५	४४
१७	५३७६०	८२६७६	५९१७१	८०५१८	६०५७३	७८४७५	६१९५७	७८८३५	६२६२१	७८४४७	४३
१८	५३७८३	८२७२९	५९१९४	८०४९५	६०५९६	७८४५२	६१९८०	७८८३७	६२६४४	७८४८९	४२
१९	५३८०७	८२७८२	५९२१७	८०४७२	६०६१९	७८४२९	६२००३	७८८३९	६२६६७	७८५३१	४१
२०	५३८३०	८२८३५	५९२४०	८०४४९	६०६४२	७८४०६	६२०२६	७८८४१	६२६९०	७८५७३	४०
२१	५३८५३	८२८८८	५९२६३	८०४२६	६०६६५	७८३८३	६२०४९	७८८४३	६२७१३	७८६१५	३९
२२	५३८७६	८२९४१	५९२८६	८०४०३	६०६८८	७८३६०	६२०७२	७८८४५	६२७३६	७८६५७	३८
२३	५३८९९	८२९९४	५९३०९	८०३८०	६०७११	७८३३७	६२०९५	७८८४७	६२७५९	७८७००	३७
२४	५३९२३	८३०४७	५९३३२	८०३५७	६०७३४	७८३१४	६२११८	७८८४९	६२७८२	७८७४२	३६
२५	५३९४६	८३१००	५९३५५	८०३३४	६०७५७	७८२९१	६२१४१	७८८५१	६२८०५	७८७८५	३५
२६	५३९६९	८३१५३	५९३७८	८०३११	६०७८०	७८२६८	६२१६४	७८८५३	६२८२८	७८८२७	३४
२७	५३९९३	८३२०६	५९४०१	८०२८८	६०८०३	७८२४५	६२१८७	७८८५५	६२८५१	७८८७०	३३
२८	५४०१६	८३२५९	५९४२४	८०२६५	६०८२६	७८२२२	६२२१०	७८८५७	६२८७४	७८९१३	३२
२९	५४०४०	८३३१२	५९४४७	८०२४२	६०८४९	७८२००	६२२३३	७८८५९	६२८९७	७८९५५	३१
३०	५४०६३	८३३६५	५९४७०	८०२१९	६०८७२	७८१७७	६२२५६	७८८६१	६२९२०	७८९९७	३०
३१	५४०८६	८३४१८	५९४९३	८०१९६	६०८९५	७८१५४	६२२७९	७८८६३	६२९४३	७९०४०	२९
३२	५४१०९	८३४७१	५९५१६	८०१७३	६०९१८	७८१३१	६२३०२	७८८६५	६२९६६	७९०८२	२८
३३	५४१३३	८३५२४	५९५३९	८०१५०	६०९४१	७८१०८	६२३२५	७८८६७	६२९८९	७९१२५	२७
३४	५४१५६	८३५७७	५९५६२	८०१२७	६०९६४	७८०८५	६२३४८	७८८६९	६३००८	७९१६७	२६
३५	५४१७९	८३६३०	५९५८५	८०१०४	६०९८७	७८०६२	६२३७१	७८८७१	६३०३१	७९२०९	२५
३६	५४२०३	८३६८३	५९६०८	८००८१	६१०१०	७८०३९	६२३९४	७८८७३	६३०५४	७९२५१	२४
३७	५४२२६	८३७३६	५९६३१	८००५८	६१०३३	७८०१६	६२४१७	७८८७५	६३०७७	७९२९३	२३
३८	५४२४९	८३७८९	५९६५४	८००३५	६१०५६	७८०००	६२४४०	७८८७७	६३१००	७९३३५	२२
३९	५४२७३	८३८४२	५९६७७	८००१२	६१०७९	७८०००	६२४६३	७८८७९	६३१२३	७९३७७	२१
४०	५४२९६	८३८९५	५९७००	८००००	६११०२	७८०००	६२४८६	७८८८१	६३१४६	७९४१९	२०
४१	५४३२०	८३९४८	५९७२३	८००००	६११२५	७८०००	६२५०९	७८८८३	६३१६९	७९४६१	१९
४२	५४३४३	८३९९९	५९७४६	८००००	६११४८	७८०००	६२५३२	७८८८५	६३१९२	७९५०३	१८
४३	५४३६६	८४०५०	५९७६९	८००००	६११७१	७८०००	६२५५५	७८८८७	६३२१५	७९५४५	१७
४४	५४३८९	८४१०१	५९७९२	८००००	६११९४	७८०००	६२५७८	७८८८९	६३२३८	७९५८७	१६
४५	५४४१३	८४१५२	५९८१५	८००००	६१२१७	७८०००	६२६०१	७८८९१	६३२६१	७९६३०	१५
४६	५४४३६	८४२०३	५९८३८	८००००	६१२४०	७८०००	६२६२४	७८८९३	६३२८४	७९६७२	१४
४७	५४४६०	८४२५४	५९८६१	८००००	६१२६३	७८०००	६२६४७	७८८९५	६३३०७	७९७१४	१३
४८	५४४८३	८४३०५	५९८८४	८००००	६१२८६	७८०००	६२६७०	७८८९७	६३३३०	७९७५६	१२
४९	५४५०७	८४३५६	५९९०७	८००००	६१३०९	७८०००	६२६९३	७८८९९	६३३५३	७९७९८	११
५०	५४५३०	८४४०७	५९९३०	८००००	६१३३२	७८०००	६२७१६	७८९०१	६३३७६	७९८४०	१०
५१	५४५५३	८४४५८	५९९५३	८००००	६१३५५	७८०००	६२७३९	७८९०३	६३३९९	७९८८२	९
५२	५४५७६	८४५०९	५९९७६	८००००	६१३७८	७८०००	६२७६२	७८९०५	६३४२२	७९९२४	८
५३	५४५९९	८४५६०	५९९९९	८००००	६१४०१	७८०००	६२७८५	७८९०७	६३४४५	७९९६६	७
५४	५४६२३	८४६११	६००२२	८००००	६१४२४	७८०००	६२८०८	७८९०९	६३४६८	७९९८९	६
५५	५४६४६	८४६६२	६००४५	८००००	६१४४७	७८०००	६२८३१	७८९११	६३४९१	७९९९१	५
५६	५४६६९	८४७१३	६००६८	८००००	६१४७०	७८०००	६२८५४	७८९१३	६३५१४	७९९९३	४
५७	५४६९३	८४७६४	६००९१	८००००	६१४९३	७८०००	६२८७७	७८९१५	६३५३७	७९९९५	३
५८	५४७१६	८४८१५	६०११४	८००००	६१५१६	७८०००	६२८९९	७८९१७	६३५६०	७९९९७	२
५९	५४७४०	८४८६६	६०१३७	८००००	६१५३९	७८०००	६२९२२	७८९१९	६३५८३	७९९९९	१
६०	५४७६३	८४९१७	६०१६०	८००००	६१५६२	७८०००	६२९४५	७८९२१	६३६०६	७९९९९	०
	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	क.
	५४ अंश		५४ अंश		५४ अंश		५४ अंश		५४ अंश		

तिमरे कोष्टक
स्वाभाविक बुजबुझा

